

VÉGES HŐMÉRSÉKLETŰ RENDSZEREK KVANTUMTÉRELMÉLETE

Sailer Kornél

(Speciális előadások)

Debreceni Egyetem
Debrecen
1991-2013.

BEVEZETÉS

Az anyag mikroszkopikus leírása a kvantumelmélet segítségével lehetséges. Ha az anyagot alkotó részecskék közötti kölcsönhatást fundamentális szinten kívánjuk kezelni, akkor az anyag leírására a kvantumtérelméletet kell használnunk.

Mindaddig, amíg olyan rendszereket vizsgálunk, amelyekben a részecskék száma állandó, nem szükséges a kvantumtérelmélet módszereihez folyamodnunk. Ha azonban a vizsgált rendszerben a részecskék száma nem állandó, akkor csak ez az út járható. A részecskék száma viszont egy közegben akkor szokott általában változni, ha a magas hőmérséklet miatt részecske-antirészecske párok keletkezhetnek a vákuumból, vagy ha a nagy nyomás miatt a részecskék ütközéseik során nagy energiájú fékezési sugárzást tudnak kibocsátani, amely aztán részecske-antirészecske párokat tud keltetni. Ezért a földitől általában erősen eltérő magas hőmérsékleten és nyomáson az anyagot a kvantumtérelmélet módszereivel kell leírni.

A világ fermionokból épül fel, amelyek közt mértékterek közvetítik a kölcsönhatást. Nem zérus nyugalmi tömegű részecskéket csak olyan hőmérsékleten lehet termikus gerjesztéssel keltetni, amely nagyobb egyenlő, mint a nyugalmi tömeg kétszerese, ami egy párkeltéshez szükséges minimális energia, $k_B T \geq 2mc^2$. Például elektron-pozitron párkeltés esetén ez $k_B T \approx 1 \text{ MeV}$, ami az elektron-pozitron plazma esetében érdekes; hadronkeltés esetén ez a határhőmérséklet a pion-tömeg nagyságrendjébe esik, $k_B T \approx 130 \text{ MeV}$, de természetesen nagyobb hőmérsékleteken beindulhat a nehezebb hadronok keltése is termikus gerjesztés révén.

A vége hőmérsékleti kvantumtérelmélet a kozmológia számára is rendkívül fontos. Az anyag a hőmérsékletnek a Világegyetem tágulásával bekövetkező változása során fázisátalakulást szenvedhet, s ez erősen befolyásolhatja a Világegyetem fejlődését.

Bármely közeg makroszkopikus viselkedésének mikroszkopikus modell alapján történő megértésére a statisztikus fizika szolgáltat módszert. A jelen jegyzetben azt vázoljuk fel, hogyan használható a statisztikus fizika, ha a rendszert kvantumtérelméleti mikroszkopikus modellel írjuk le. Éppen ezért a jegyzetet csak annak ajánljuk olvasásra, aki a statisztikus fizika és a kvantumtérelmélet alapjait már megtanulta.

A vizsgált közegek, amelyekről szó lesz, az elektron-pozitron plazma és a kvarkgluon-plazma. Normál földi körülmények között egyik sem létezik. A kvarkgluon-plazma az anyagnak olyan fázisa, amelynek létezését a kvantumszíndinamika jósolja. Újabban sikerült a kvarkgluon-plazma létezésének földi körülmények között is kísérleti bizonyítékát találni nagy-energiás nehézion-ütközésekben. A jegyzetben általános elvi keretet kívánunk adni arra, hogyan lehet a kvantumtérelmélet és a statisztikus fizika segítségével közegek extrém magas hőmérsékleten és nyomáson való viselkedését vizsgálni.

Egy közeg makroszkopikus viselkedésének megértése azzal kezdődik, hogy jellemezni tudjuk termodinamikai egyensúlyi állapotait. Hőtartályban és részecsketartályban elhelyezett rendszer statisztikus fizikai jellemzésére a Z makrokanonikus állapotösszeg alkalmas. A rendszer termodinamikai egyensúlyi állapotaira vonatkozó valamennyi információ kiolvasható az $\Omega = -T \ln Z$ termodinamikai potenciálból a termodinamika ismert összefüggései szerint. Így pl. a P nyomás is, mint a T hőmérséklet és a V térfogat függvénye, vis. az állapotegyenlet. Elsődleges célunk ezért az lesz, hogy meghatározzuk a kvantumelektrodinamikai és a kvantumszíndinamikai modellel leírt makroszkopikus rendszerek makrokanonikus állapotösszegét.

A statisztikus fizika arra is lehetőséget nyújt, hogy vizsgáljuk a fenti rendszereket gyenge külső perturbáció hatása alatt. A rendszerben ilyen hatásra bekövetkező változásokról az egyensúlyi rendszer korrelációs függvényei adnak számot, mint az a statisztikus fizika elemeiből ismeretes. A korrelációkat a térelméletben a valós idejű Green-függvények írják le. Ezek pólusai mondják meg, hogy gyenge külső zavarra a rendszer hogyan válaszol. A Green-függvények pólusainak helyét viszont az határozza meg, hogy milyen a közeg polarizációja. A jegyzet utolsó részében ezért a közegek polarizációjával foglalkozunk.

A jegyzetben nem törekedtünk teljességre. Lényegében végig a képzetes idővel dolgozó Matsubara-féle tárgyalásmódot és a perturbatív leírási módot használjuk.

I. KÖLCSÖNHATÁSMENTES RENDSZEREK

1 Az útintegrál és az állapotösszeg

Először átismétljük a térelmélet útintegrálok segítségével történő kvantálásának fontosabb lépéseit. Ezt követően definiáljuk a (makro)kanonikus állapotösszeget az útintegrál felhasználásával.

Tegyük fel, hogy a teret Schrödinger-képben a $\hat{\Phi}(\vec{x}, 0)$ téroperátorok és a hozzájuk kanonikusan konjugált $\hat{\pi}(\vec{x}, 0)$ impulzusok írják le a $t = 0$ pillanatban. Vezessük be a téroperátorok sajátállapotait:

$$\hat{\Phi}(\vec{x}, 0)|\Phi\rangle = \Phi(\vec{x})|\Phi\rangle. \quad (1.1)$$

A sajátvektorok az alábbi ortonormáltsági és teljességi relációt elégítik ki;

$$\langle \Phi_a | \Phi_b \rangle = \delta[\Phi_a(\vec{x}) - \Phi_b(\vec{x})], \quad (1.2)$$

$$\int d\Phi(\vec{x}) |\Phi\rangle \langle \Phi| = 1. \quad (1.3)$$

Az integrálás kiterjed az összes lehetséges $\Phi(\vec{x})$ térkonfigurációra, $\Phi_a(\vec{x})$ és $\Phi_b(\vec{x})$ ezek közül jelöl két tetszőlegeset. Hasonlóképpen bevezetjük a kanonikus impulzus sajátvektorait:

$$\hat{\pi}(\vec{x}, 0)|\pi\rangle = \pi(\vec{x})|\pi\rangle, \quad (1.4)$$

amelyekre az ortonormáltsági és a teljességi reláció az alábbi alakú:

$$\langle \pi_a | \pi_b \rangle = \delta[\pi_a(\vec{x}) - \pi_b(\vec{x})], \quad (1.5)$$

$$\int \frac{d\pi(\vec{x})}{2\pi} |\pi\rangle \langle \pi| = 1. \quad (1.6)$$

A kvantummechanikai $\langle x | p \rangle = \exp(ipx)$ összefüggéssel analóg módon a koordináta- és az impulzusreprezentáció közötti áttérést a

$$\langle \Phi | \pi \rangle = \exp \left\{ i \int d^3x \pi(\vec{x}) \Phi(\vec{x}) \right\} \quad (1.7)$$

”mátrix” biztosítja.

A rendszer dinamikáját a

$$H = \int d^3x \mathcal{H}(\hat{\pi}, \hat{\Phi}) \quad (1.8)$$

Hamilton-operátor szabja meg. A $t = 0$ pillanatban megvalósuló $|\Phi^a\rangle$ állapotból az $\exp(-iHt_f)$ időfejlesztő operátor a $t = t_f$ pillanatra az $\exp(-iHt_f)|\Phi^a\rangle$ állapotot fejleszti ki. A fizikus ezt az állapotot úgy vizsgálja, hogy megkérdi, milyen valószínűséggel vannak benne jelen az egyes $|\Phi^b\rangle$ bázisállapotok. A választ az átmeneti amplitúdó adja meg:

$$A_{ba}(t_f) = \langle \Phi^b | \exp(-iHt_f) | \Phi^a \rangle. \quad (1.9)$$

Az átmeneti amplitúdó a Feynman-féle útintegrál segítségével is felírható. Járjunk el a következőképpen. Osszuk fel a $[0, t_f]$ intervallumot $\Delta t = t_f/N_t$ hosszúságú N_t darab intervallumra, $t_j = (j-1)\Delta t$, a V térfogatot pedig N^3 darab a^3 térfogatelemre. Bontsuk fel az időfejlésztő operátort az egyes Δt intervallumokhoz tartozó időfejlésztő operátorok szorzatára. Az egyes tényezők közé írjunk be egy koordináta- és egy impulzus-reprezentációhoz tartozó egységfelbontást. Ekkor az átmeneti amplitúdó az alábbi alakot ölti:

$$\begin{aligned} A_{ba}(t_f) &= \lim_{N_t, N \rightarrow \infty} \int \left(\prod_{j=1}^{N_t} \prod_{\vec{x}}^{N^3} C \frac{d\pi_{j,\vec{x}} d\Phi_{j,\vec{x}}}{2\pi} \right) \langle \Phi^b | \pi_N \rangle \langle \pi_N | \exp(-iH\Delta t) | \Phi_N \rangle \cdot \\ &\quad \langle \Phi_N | \pi_{N-1} \rangle \langle \pi_{N-1} | \exp(-iH\Delta t) | \Phi_{N-1} \rangle \cdots \\ &\quad \langle \Phi_2 | \pi_1 \rangle \langle \pi_1 | \exp(-iH\Delta t) | \Phi_1 \rangle \langle \Phi_1 | \Phi^a \rangle. \end{aligned} \quad (1.10)$$

Itt a C egyelőre meghatározatlan állandó dimenziótlanítsa az integrálási mértéket, $C \frac{d\pi_{j,\vec{x}} d\Phi_{j,\vec{x}}}{2\pi}$ az 1 szabadsági fokhoz tartozó fázistérfogatelem osztva a $(2\pi\hbar)^3$ elemi fázistérfogattal (ahol $\hbar = 1$). Alakítsuk most át az infinitezimális átmeneti amplitúdót, felhasználva, hogy $\Delta t \rightarrow 0$:

$$\begin{aligned} \langle \pi_j | \exp(-iH\Delta t) | \Phi_j \rangle &\approx \langle \pi_j | 1 - iH\Delta t | \Phi_j \rangle \\ &= \langle \pi_j | \Phi_j \rangle (1 - iH_j\Delta t) \\ &= (1 - iH_j\Delta t) \exp \left\{ -i \sum_{\vec{x}} a^3 \pi_{j,\vec{x}} \Phi_{j,\vec{x}} \right\} \\ &\approx \exp(-iH_j\Delta t) \exp \left\{ -i \sum_{\vec{x}} a^3 \pi_{j,\vec{x}} \Phi_{j,\vec{x}} \right\}, \end{aligned} \quad (1.11)$$

ahol $V = Na^3$ és

$$H_j = \sum_{\vec{x}} a^3 \mathcal{H}(\pi_{j,\vec{x}}, \Phi_{j,\vec{x}}). \quad (1.12)$$

A rendszer állapotösszegének definíciójához annak az amplitúdójára lesz szükségünk, hogy a rendszer marad eredeti $\Phi^b \Rightarrow |\Phi^a \rangle$ állapotában:

$$\begin{aligned} A_{aa}(t_f) &= \langle \Phi^a | \exp(-iH\Delta t) | \Phi^a \rangle \\ &= \lim_{N_t, N \rightarrow \infty} \int \left(\prod_{j=1}^{N_t} \prod_{\vec{x}}^{N^3} C \frac{d\pi_{j,\vec{x}} d\Phi_{j,\vec{x}}}{2\pi} \right) \delta[\Phi_{1,\vec{x}} - \Phi_{\vec{x}}^a] \exp \left\{ i \sum_{j=1}^{N_t} \sum_{\vec{x}} a^3 \pi_{j,\vec{x}} \Phi_{j+1,\vec{x}} \right\} \cdot \\ &\quad \exp \left\{ -i \sum_{j=1}^{N_t} \sum_{\vec{x}} a^3 \pi_{j,\vec{x}} \Phi_{j,\vec{x}} \right\} \exp \left\{ -i\Delta t \sum_{j=1}^{N_t} H_j \right\} \\ &= \lim_{N_t, N \rightarrow \infty} \int \left(\prod_{j=1}^{N_t} \prod_{\vec{x}}^{N^3} C \frac{d\pi_{j,\vec{x}} d\Phi_{j,\vec{x}}}{2\pi} \right) \delta[\Phi_{1,\vec{x}} - \Phi_{\vec{x}}^a]. \end{aligned}$$

$$\exp \left\{ -i\Delta t \sum_{j=1}^{N_t} \sum_{\vec{x}} a^3 [\mathcal{H}(\pi_{j,\vec{x}}, \Phi_{j,\vec{x}}) - \pi_{j,\vec{x}}(\Phi_{j+1,\vec{x}} - \Phi_{j,\vec{x}})/\Delta t] \right\}, \quad (1.13)$$

ahol $\Phi_{N+1,\vec{x}} = \Phi_{\vec{x}}^a$. A fenti kifejezést formálisan a következőképpen fogjuk jelölni:

$$A_{aa}(t_f) = \int [d\pi] \int_{\Phi(\vec{x},0)=\Phi^a(\vec{x})}^{\Phi(\vec{x},t_f)=\Phi^a(\vec{x})} [d\Phi] \cdot \exp \left\{ i \int_0^{t_f} dt \int d^3x (\pi(\vec{x},t) \partial_t \Phi(\vec{x},t) - \mathcal{H}(\pi(\vec{x},t), \Phi(\vec{x},t))) \right\}. \quad (1.14)$$

Ne felejtjük azonban el, hogy ez csak az egyszerűbb írásmód kedvéért bevezetett jelölés. Igazi jelentését a végtelen sok integrál szorzatának határértéke adja. Vegyük észre, hogy az útintegrál egyáltalán nem tartalmaz operátorokat. Benne integrálás történik az összes lehetséges $(\Phi(\vec{x},t), \pi(\vec{x},t))$ térkonfigurációra, azzal a megszorítással, hogy a $\Phi(\vec{x},t)$ térmennyiség a $t=0$ és a $t=t_f$ pillanatban ugyanazt a $\Phi^a(\vec{x})$ konfigurációt jelenti. Mivel az integrálás felső határa egy véges t_f , ezért a Lorentz-invariancia megsérül. Ez azonban természetes, mert a statisztikus fizikai leírás, amelyre törekszünk, abban a vonatkoztatási rendszerben lesz érvényes, amelyben a vizsgált fizikai rendszer nyugalomban van.

Keressünk most kapcsolatot a (makro)kanonikus állapotösszeg és az A_{aa} átmeneti amplitúdó között. Egyelőre a bozonterekkel foglalkozunk, a fermionterek esetét későbbre halasztjuk. Tegyük fel, hogy

$$N = \int d^3x \mathcal{N}(\hat{\pi}, \hat{\Phi}) \quad (1.15)$$

megmaradó töltés operátora. Az egyszerűség kedvéért csak olyan esettel foglalkozunk, amikor egyetlen megmaradó töltés van. Az általánosítás több megmaradó töltés esetére triviális. Legyen μ az N töltéshez tartozó kémiai potenciál. Véges szabadsági fokú rendszerekre vonatkozó kvantummechanikai ismereteink extrapolációja alapján a végtelen szabadsági fokú terek makrokanonikus állapotösszege:

$$Z = \text{Tr} \exp \{ -\beta(H - \mu N) \} = \int \sum_a d\Phi^a < \Phi^a | \exp \{ -\beta(H - \mu N) \} | \Phi^a >. \quad (1.16)$$

Most szeretnénk ezt a kifejezést az A_{aa} átmeneti amplitúdóval kapcsolatba hozni. Folytassuk ezért az A_{aa} amplitúdót analitikusan a komplex idősíkon a képzetes tengelyre, $t \rightarrow \tau = it$. Az integrálás határaiban végezzük a $(0, t_f) \rightarrow (0, \beta)$ helyettesítést. Itt $\beta = 1/T$ az inverz hőmérséklet. (A jegyzetben a $\hbar = 1$, $c = 1$ és $k_B = 1$ egységrendszerrel használjuk.) Helyettesítsük továbbá a Hamilton-sűrűséget $\mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H} - \mu \mathcal{N}$ módon. Az eredeti $\Phi(\vec{x}, t_f) = \Phi(\vec{x}, 0) = \Phi^a(\vec{x})$ megszorítással analóg módon továbbra is csak olyan térkonfigurációkra integráljunk, amelyek periodikusak, azaz amelyekre

$$(B) \quad \Phi(\vec{x}, \beta) = \Phi(\vec{x}, 0) = \Phi_a(\vec{x}). \quad (1.17)$$

(A (B) jel arra utal, hogy ez a megszorítás fermionterek esetén módosulni fog.) A fentiek eredményeképpen

$$A_{aa} \rightarrow \mathcal{A}_{aa} = \lim_{N_\tau \rightarrow \infty, N \rightarrow \infty} \int \left(\prod_{j=1}^{N_\tau} \prod_{\vec{x}}^{N^3} C \frac{d\pi_{j,\vec{x}} d\Phi_{j,\vec{x}}}{2\pi} \right) \delta[\Phi_{1,\vec{x}} - \Phi_{\vec{x}}^a] \cdot \exp \left\{ \Delta\tau \sum_{j=0}^{N_\tau-1} \sum_{\vec{x}}^{N^3} a^3 [-\mathcal{H}_{j,\vec{x}} + \mu \mathcal{N}_{j,\vec{x}} + i\pi_{j,\vec{x}}(\Phi_{j+1,\vec{x}} - \Phi_{j,\vec{x}})/\Delta\tau] \right\} \quad (1.18)$$

adódik ($\Delta\tau = \beta/N_\tau$, $a^3 = V/N^3$). A makrokanonikus állapotösszeget ezek után az összes periodikus $\Phi_a(\vec{x})$ térkonfigurációra történő integrálás révén kapjuk:

$$Z = \int \sum_a d\Phi_a \mathcal{A}_{aa} = \int [d\pi] \int_{\text{per.}} [d\Phi] \exp \left\{ \int_0^\beta d\tau \int d^3x (i\pi \partial_\tau \Phi - \mathcal{H} + \mu \mathcal{N}) \right\}. \quad (1.19)$$

Ezzel megmutattuk, hogy a kvantummechanikai átmeneti amplitúdó analitikus folytatása és az állapotösszeg között szoros kapcsolat van. A fenti összefüggések véges szabadsági fokú kvantummechanikai rendszerek esetén egzaktul igazak. Az általánosításuk végtelen szabadsági fokú terekre, ahogy ezt fentebb megtettük, nem egzakt bizonyítás, hanem csak a megfelelő összefüggések kézenfekvővé tétele volt. A (1.19) kifejezést a továbbiakban a makrokanonikus állapotösszeg definíciójaként fogadjuk el.

Mielőtt nekilátnánk azon technikai lépések megtárgyalásának, amelyek segítségével ki tudjuk számolni az állapotösszeget, meg kell beszéljünk, hogy mit is jelent a kvantumtérelméletként modellezett fizikai rendszer esetében a hőmérséklet és a kémiai potenciál. Először is hangsúlyozzuk újra, hogy termodinamikai egyensúlyban található fizikai rendszer leírására alkalmas modellel foglalkozunk. Az általános statisztikus fizikai szemlélet szerint gondolhatjuk azt, hogy a térelméleti modellel leírt fizikai rendszer adott hőmérsékletű hőtartállyal és adott kémiai potenciálú részecsketartállyal (ill. töltéstartállyal) érintkezik és azokkal egyensúlyban van. Lehetséges azonban az a szemlélet is, hogy a térelméleti modell által leírt végtelen szabadsági fokú rendszer különböző részrendszerei vannak egymással termodinamikai egyensúlyban. Ezeket a részrendszereket képzelhetjük a vizsgált fizikai rendszer makroszkopikus térfogatú, érintkező diszjunkt tartományainak, de képzelhetjük pl. a nagy és az alacsony frekvenciás módusok egymással egyensúlyban levő részrendszerének is. A célunk az lesz, hogy a partíciós függvényből határozzuk meg a termodinamikai potenciálokat, a vizsgált rendszer fázisait és ezen fázisok termodinamikai állapotegyenleteit.

2 A semleges skalártér

Ebben a fejezetben meghatározzuk a semleges skalártér kanonikus állapotösszegét. Mivel nincsen megmaradó töltés, nem szükséges kémiai potenciált bevezetnünk. A pályaintegrálban szereplő normálási tényező egyértelműsítésében az vezet célra, hogy az állapotösszeg legyen dimenziótlan és létezzen a véges határértéke a kontinuum határesetben. A kontinuum limeszt azt jelenti, hogy a pályaintegrál értelmezéséhez szükséges térbeli rács a rácsállandójával és a képzetes időtengelyen felvett „rács” $\Delta\tau$ állandójával zérushoz tartunk. A kontinuum limeszt végez térfogat és $\beta = 1/T$ inverz hőmérséklet mellett képezzük, s a pályaintegrál normálását, azaz benne az integrálási mérték rögzítését a kölcsönhatás mentes terek esetében végezzük el. Ezután tehetjük meg a termodinamikai limesz képzését, ami azt jelenti, hogy a rendszer V térfogatával tartunk végtelenhez. Ez abban jut végül kifejezésre, hogy a véges térfogat esetén periodikus térbeli határfeltételek által rögzített diszkrét impulzus folytonossá válik, és a diszkrét impulzusokra történő összegzést integrállá kell alakítani:

$$\frac{1}{V} \sum_{\vec{p}} \cdots \rightarrow \int \frac{d^3p}{(2\pi\hbar)^3}, \quad (2.1)$$

ahol $\hbar = 1$ -et fogunk a továbbiakban írni ($\hbar = k_B = c = 1$ egységrendszerben dolgozunk).

A semleges $\Phi(x)$ skalártér Lagrange-sűrűsége

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \Phi \partial^\mu \Phi - \frac{1}{2} m^2 \Phi^2 - \mathcal{U}(\Phi), \quad (2.2)$$

ahol $\mathcal{U}(\Phi)$ az önkölcsönhatás. A $\Phi(x)$ térmennyiséghez kanonikusan konjugált impulzus

$$\pi = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_0 \Phi)} = \partial_t \Phi. \quad (2.3)$$

A Hamilton-sűrűség:

$$\begin{aligned} \mathcal{H} &= \pi \partial_t \Phi - \mathcal{L} \\ &= \frac{1}{2} \pi^2 + \frac{1}{2} (\vec{\nabla} \Phi)^2 + \frac{1}{2} m^2 \Phi^2 + \mathcal{U}(\Phi). \end{aligned} \quad (2.4)$$

A (1.19) definíciót alkalmazva, a kanonikus állapotösszeg:

$$Z = \lim \left(\prod_{j=1}^{N_\tau} \prod_{\vec{x}}^{N^3} C \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\pi_{j,\vec{x}}}{2\pi} \int_{\text{per.}} d\Phi_{j,\vec{x}} \right).$$

$$\exp\left\{\sum_{j=1}^{N_\tau}\sum_{\vec{x}}^{N^3}a^3\left[i\pi_{j,\vec{x}}(\Phi_{j+1,\vec{x}}-\Phi_{j,\vec{x}})-\Delta\tau\left(\frac{1}{2}\pi_{j,\vec{x}}^2+\frac{1}{2}\sum_{\mu=1}^3a^{-2}(\Phi_{j,\vec{x}+a\vec{n}_\mu}-\Phi_{j,\vec{x}})^2+\frac{1}{2}m^2\Phi_{j,\vec{x}}^2+\mathcal{U}(\Phi_j)\right)\right]\right\}. \quad (2.5)$$

Itt a j index mindenütt ugyanarra a $\tau_j = ij\Delta\tau = ij\beta/N_\tau$ képzetes időre vonatkozik.

A tényleges számolásokhoz az állapotösszegben szereplő integrált még pontosítjuk. Ahhoz, hogy Z dimenziótlan legyen, mint azt a statisztikus fizikában megszoktuk, dimenziótlan integrálási mértéket kell használni. A kanonikus impulzus és a térmennyiség dimenzióját azonosnak tekinthetjük β és V megfelelő hatványainak dimenziójával annak alapján, hogy az integrandusban az exponenciális függvény kitevője dimenziótlan:

$$\begin{aligned} [a^3\Delta\tau\pi^2] &= [V\beta\pi^2], \quad \Rightarrow \quad [\pi] = [(V\beta)^{1/2}], \\ [m^2a^3\Delta\tau\Phi^2] &= [\beta^{-2}V\beta\Phi^2], \quad \Rightarrow \quad [\Phi] = [(\beta/V)^{1/2}]. \end{aligned} \quad (2.6)$$

Ennek alapján dimenziótlan integrálási mértéket akkor kapunk, ha $C = C''\left(\frac{V}{\beta}\beta V\right)^{1/2} = C'V$ alakú, ahol C' dimenziótlan (β -tól, V -tól független szám). Ezt használva a formális pályaintegrál jelentése:

$$\int[d\pi]\int[d\Phi] = \left(\frac{C'V}{2\pi}\right)^{N^3N_\tau}\left(\prod_{j=1}^{N_\tau}\prod_{\vec{x}}^{N^3}\int d\pi_{j,\vec{x}}\int d\Phi_{j,\vec{x}}\right) \quad (2.7)$$

Végezzük el ezután a $\int d[\pi]$ integrált, ami Gauss-típusú integrálok (analitikus folytatásainak) szorzata:

$$\begin{aligned} &\left(\frac{C'V}{2\pi}\right)^{N^3N_\tau}\left(\prod_{j=1}^{N_\tau}\prod_{\vec{x}}^{N^3}\int d\pi_{j,\vec{x}}\right)\exp\left\{\sum_{j=1}^{N_\tau}\sum_{\vec{x}}^{N^3}a^3\left[i\pi_{j,\vec{x}}(\Phi_{j+1,\vec{x}}-\Phi_{j,\vec{x}})-\Delta\tau\frac{1}{2}\pi_{j,\vec{x}}^2\right]\right\} \\ &= \left(\frac{C'V}{2\pi}\right)^{N^3N_\tau}\left(\frac{2\pi}{a^3\Delta\tau}\right)^{N^3N_\tau/2}\exp\left\{-\sum_{n=1}^{N_\tau}\sum_{\vec{x}}a^3\Delta\tau\frac{(\Phi_{j+1,\vec{x}}-\Phi_{j,\vec{x}})^2}{2(\Delta\tau)^2}\right\}. \end{aligned} \quad (2.8)$$

Az állapotösszeg így a térmennyiség szerinti pályaintegrál alakját ölti:

$$Z = \int_{per} [d\Phi]e^{-S_E}, \quad (2.9)$$

ahol az integrandusban az exponenciális függvény kitevőjében az euklideszi hatás negatívja áll:

$$-S_E = -\sum_{n=1}^{N_\tau}\sum_{\vec{x}}a^3\Delta\tau\left[\frac{1}{2}\left(\frac{(\Phi_{j+1,\vec{x}}-\Phi_{j,\vec{x}})^2}{(\Delta\tau)^2}\right)+\sum_{\mu=1}^3\frac{(\Phi_{j,\vec{x}+a\vec{n}_\mu}-\Phi_{j,\vec{x}})^2}{a^2}+m^2\Phi_{j,\vec{x}}^2\right]$$

$$\begin{aligned}
& +U(\Phi_{j,\vec{x}}) \Big] \\
\rightarrow & - \int_0^\beta d\tau \int d^3x \left[\frac{1}{2} [(\partial_\tau \Phi)^2 + (\vec{\nabla} \Phi)^2 + m^2 \Phi^2] + U(\Phi) \right] \\
= & - \int_0^\beta d\tau \int d^3x \left[\frac{1}{2} \Phi (-\partial_\tau^2 - \vec{\nabla}^2 + m^2) \Phi + U(\Phi) \right] \\
= & - \int_0^\beta d\tau \int d^3x \mathcal{L}_E,
\end{aligned} \tag{2.10}$$

ahol $\mathcal{L}_E$ az euklideszi Lagrange-sűrűség. A parciális integrálás során felhasználtuk, hogy a Φ tér a τ változóban periódikus határfeltételt elégít ki.

Ebben a fejezetben a továbbiakban csak a szabad (nem önkölcsönható) skalártér esetével foglalkozunk. Írjuk ekkor az euklideszi hatást mátrixalakba:

$$\begin{aligned}
-S_0 &= - \int_0^\beta d\tau \int d^3x \frac{1}{2} \Phi (-\partial_\tau^2 - \vec{\nabla}^2 + m^2) \Phi \\
&= - \frac{1}{2} \sum_{j,\vec{x};j',\vec{x}'} \Phi_{j,\vec{x}} \sigma_{(j,\vec{x}),(j',\vec{x}')} \Phi_{j',\vec{x}'} \\
&= - \frac{1}{2} \Phi \cdot \sigma \cdot \Phi
\end{aligned} \tag{2.11}$$

ahol minden szorzótényezőt beolvasztottunk a σ mátrix elemeibe, úgyhogy $\sigma = a^3 \Delta \tau \sigma'$. A Gauss-integrál elvégezhető:

$$\begin{aligned}
Z_0 &= \int_{per} [d\Phi] e^{-S_0} \\
&= \left(\frac{C'V}{2\pi} \right)^{N^3 N_\tau} \left(\frac{2\pi}{a^3 \Delta \tau} \right)^{N^3 N_\tau / 2} \left(\prod_{j=1}^{N_\tau} \prod_{\vec{x}}^{N^3} \int d\Phi_{j,\vec{x}} \right) \exp \left\{ - \frac{1}{2} \Phi \cdot \sigma \cdot \Phi \right\} \\
&= \left(\frac{C'V}{2\pi} \right)^{N^3 N_\tau} \left(\frac{2\pi}{a^3 \Delta \tau} \right)^{N^3 N_\tau / 2} (2\pi)^{N^3 N_\tau / 2} (\text{Det} \sigma)^{-1/2} \\
&= \left(\frac{(C')^2 V^2}{a^3 \Delta \tau} \right)^{N^3 N_\tau / 2} (\text{Det} \sigma)^{-1/2} = \left(\frac{(C')^2 V^2}{a^3 \Delta \tau} \right)^{N^3 N_\tau / 2} (a^3 \Delta \tau)^{-N^3 N_\tau / 2} (\text{Det} \sigma')^{-1/2} \\
&= \left(\frac{C'V}{a^3 \Delta \tau} \right)^{N^3 N_\tau} (\text{Det} \sigma')^{-1/2}.
\end{aligned} \tag{2.12}$$

Kontinuum limeszben a σ' mátrix:

$$\sigma' = (-\partial_\tau^2 - \vec{\nabla}^2 + m^2) \delta(\tau - \tau') \delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{x}'). \tag{2.13}$$

A σ' mátrix determinánsát úgy számolhatjuk ki, hogy megkeressük a $(-\partial_\tau^2 - \vec{\nabla}^2 + m^2)$ operátornak a $[0, \beta]$ intervallumon τ -ban periodikus, a térbeli irányokban periódikus határfeltételt kielégítő, ortonormált sajátfüggvényei teljes rendszerét. Ebben a bázisban σ diagonális és a determinánsa a sajátértékek szorzata. A

$$\varphi_{n,\vec{p}}(\tau, \vec{x}) = (\beta V)^{-1/2} e^{i\omega_n \tau + i\vec{p}\vec{x}}, \tag{2.14}$$

sajátfüggvények, ahol $\omega_n = 2\pi\beta^{-1}n$ periodikusak a $[0, \beta]$ intervallumon, kielégítik alkalmas diszkrét $\vec{p}$ választással a periódikus határfeltételeket a térbeli irányokban, kielégítik a

$$\int_0^\beta d\tau \int d^3x \varphi_{n,\vec{p}}^*(\tau, \vec{x}) \varphi_{n,\vec{p}}(\tau, \vec{x}) = \delta_{n,n'} \delta_{\vec{p},\vec{p}'} \quad (2.15)$$

normálási feltételt,

Itt

$$\int_0^\beta d\tau e^{i\omega_n \tau} = \lim_{N_\tau \rightarrow \infty} \Delta\tau \sum_{j=1}^{N_\tau} e^{i2\pi n \beta^{-1} j \Delta\tau} = \lim_{N_\tau \rightarrow \infty} \Delta\tau \sum_{j=1}^{N_\tau} (e^{i2\pi n})^{j/N_\tau} = \beta \delta_{n,0} \quad (2.16)$$

hiszen $n \neq 0$ esetén a j -re történő összegzés az N_τ -adik egységgyökök összegét jelenti, ami zérus, és hasonlóan láthatjuk be a páronként merőleges térbeli irányokat külön-külön vizsgálva, hogy

$$\int d^3x e^{i\vec{p}\vec{x}} = V \delta_{\vec{p},0}. \quad (2.17)$$

és teljes rendszert alkotnak, mert

$$\sum_n e^{i\omega_n \tau} = \beta \delta(\tau), \quad \sum_{\vec{p}} e^{i\vec{p}\vec{x}} = V \delta^{(3)}(\vec{x}). \quad (2.18)$$

A $\{\varphi_{n,\vec{p}}\}$ bázisban a σ' mátrix diagonális a nem degenerált

$$\sigma'_{n,\vec{p}} = \omega_n^2 + \vec{p}^2 + m^2 \quad (2.19)$$

sajátértékekkel, úgyhogy a determinánsa:

$$(\text{Det} \sigma')^{-1/2} = \prod_{n,\vec{p}} (\sigma'_{n,\vec{p}})^{-1/2} = \prod_{n,\vec{p}} \left(\frac{1}{\omega_n^2 + \vec{p}^2 + m^2} \right)^{1/2}. \quad (2.20)$$

Azt kaptuk tehát, hogy a makrokanonikus állapotösszeg:

$$Z_0 = \lim_{N_\tau \rightarrow \infty} \left(\frac{C' V}{a^3 \Delta\tau} \right)^{N_\tau} \prod_{n,\vec{p}} \left(\frac{1}{\omega_n^2 + \vec{p}^2 + m^2} \right)^{1/2}. \quad (2.21)$$

A későbbiek szempontjából érdemes az állapotösszeget, mint a skalártér Fourier-módusainak amplitudói szerinti integrált is felírni. Ehhez fejtsük ki a skalárteret a $\{\varphi_{n,\vec{p}}\}$ bázis szerint, ekkor az alábbi Fourier-kifejtéseket kapjuk:

$$\Phi_{j,\vec{x}} = C_1 \sum_{n=-N_\tau}^{N_\tau} \sum_{\vec{p}} e^{i\omega_n j \Delta\tau + i\vec{p}\vec{x}} \Phi_{n,\vec{p}}, \quad (2.22)$$

ahol a diszkrét impulzusokra történő összegzés minden térbeli irányban $-N$ -tól N -ig terjed az impulzuskomponensek kvantumszámaiban, ill. kontinuum limeszben,

$$\Phi(\tau, \vec{x}) = C_1 \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{\vec{p}} e^{i\omega_n \tau + i\vec{p}\vec{x}} \Phi_{n,\vec{p}}. \quad (2.23)$$

Itt a $C_1 = (\beta/V)^{1/2}$ választással tudjuk biztosítani, hogy a $\Phi_{n,\vec{p}}$ Fourier-amplitudók dimenziótlanok legyenek. Megjegyezzük, hogy valós skalártér esetén valós időben fennállnak a $\Phi_{-n,-\vec{p}} = \Phi_{n,\vec{p}}^*$ relációk. Helyettesítsük be a Fourier-sorfejtést a pályaintegrál integrandusában álló exponenciális függvény argumentumában szereplő kvadratikus alakba:

$$-\frac{1}{2}\Phi \cdot \sigma \cdot \Phi = -\frac{1}{2}a^3 \Delta\tau \left(\frac{\beta}{V}\right)^{1/2} (\beta V) \sum_n \sum_{\vec{p}} \sigma'_{n,\vec{p}} |\Phi_{n,\vec{p}}|^2. \quad (2.24)$$

Határozzuk meg most a dimenziótlan $\Phi_{n,\vec{p}}$ Fourier-amplitudókra történő integrálásban az integrálási mérték C'' együtthatóját úgy, hogy

$$\begin{aligned} Z_0 &= \int_{per} [d\Phi] e^{-S_0} = \int_{per} d[\Phi] e^{-\frac{1}{2}\Phi \cdot \sigma \cdot \Phi} \\ &\stackrel{!}{=} \left(\prod_n \prod_{\vec{p}} C'' \int_0^\infty d|\Phi_{n,\vec{p}}| \int_0^{2\pi} d\alpha_{n,\vec{p}} \right) e^{-\frac{1}{2}\Phi \cdot \sigma \cdot \Phi} \\ &= \left(\prod_n \prod_{\vec{p}} (C'' \pi) \int_{-\infty}^\infty d|\Phi_{n,\vec{p}}| \right) e^{-\frac{1}{2}\Phi \cdot \sigma \cdot \Phi} \end{aligned} \quad (2.25)$$

legyen. Itt felhasználtuk, hogy az S_0 hatás csak a Fourier-amplitudók abszolútértékétől függ. A C'' együtthatót rögzítő feltételünk tehát az alábbi alakot ölti,

$$\begin{aligned} &\lim \left(\frac{C'V}{a^3 \Delta\tau} \right)^{N^3 N_\tau} \prod_{n,\vec{p}} \left(\frac{1}{\omega_n^2 + \vec{p}^2 + m^2} \right)^{1/2} \\ &= \lim \left(\prod_n \prod_{\vec{p}} (C'' \pi) \int_{-\infty}^\infty d|\Phi_{n,\vec{p}}| \right) e^{-\frac{1}{2}\Phi \cdot \sigma \cdot \Phi} \\ &= \lim (C'' \pi)^{N^3 N_\tau} \left(\prod_n \prod_{\vec{p}} d|\Phi_{n,\vec{p}}| \right) \exp \left\{ -\frac{1}{2} a^3 \Delta\tau \left(\frac{\beta}{V} \right)^{1/2} (\beta V) \sum_n \sum_{\vec{p}} \sigma'_{n,\vec{p}} |\Phi_{n,\vec{p}}|^2 \right\} \\ &= \lim (C'' \pi)^{N^3 N_\tau} \left(\frac{2\pi}{a^3 \Delta\tau (\beta/V)^{1/2} (\beta V)} \right)^{N^3 N_\tau / 2} \prod_n \prod_{\vec{p}} (\sigma'_{n,\vec{p}})^{-1/2} \\ &= \lim (C'' \pi)^{N^3 N_\tau} \left(\frac{2\pi}{a^3 \Delta\tau (\beta/V)^{1/2} (\beta V)} \right)^{N^3 N_\tau / 2} \prod_{n,\vec{p}} \left(\frac{1}{\omega_n^2 + \vec{p}^2 + m^2} \right)^{1/2} \end{aligned} \quad (2.26)$$

Felhasználtuk, hogy a Fourier-térben pontosan ugyanannyi $N^3 N_\tau$ szabadsági fok van, mint az euklideszi térben. Érdekes a későbbiek céljára bevezetni a

$$(\sigma_0)_{n,\vec{p}} = \beta^2 \sigma'_{n,\vec{p}} = \beta^2 (\omega_n^2 + \omega^2), \quad \omega^2 = \vec{p}^2 + m^2 \quad (2.27)$$

dimenziótlan mátrixelemeket. Ekkor a végtelen szorzatok dimenziótlanok lesznek:

$$\begin{aligned}
Z_0 &= \lim \left(\frac{C'V\beta}{a^3\Delta\tau} \right)^{N^3N_\tau} \prod_{n,\vec{p}} \left(\frac{1}{\beta^2(\omega_n^2 + \vec{p}^2 + m^2)} \right)^{1/2} \\
&= \lim (C''\pi)^{N^3N_\tau} \left(\frac{2\pi\beta^2}{a^3\Delta\tau(\beta/V)^{1/2}(\beta V)} \right)^{N^3N_\tau/2} \prod_{n,\vec{p}} \left(\frac{1}{\beta^2(\omega_n^2 + \vec{p}^2 + m^2)} \right)^{1/2} \\
Z_0 &= \lim \left(\frac{C'V\beta}{a^3\Delta\tau} \right)^{N^3N_\tau} \prod_{n,\vec{p}} \left(\frac{1}{\beta^2(\omega_n^2 + \vec{p}^2 + m^2)} \right)^{1/2} \\
&= \lim (C''\pi)^{N^3N_\tau} \left(\frac{2\pi(\beta/V)^{1/2}}{a^3\Delta\tau} \right)^{N^3N_\tau/2} \prod_{n,\vec{p}} \left(\frac{1}{\beta^2(\omega_n^2 + \vec{p}^2 + m^2)} \right)^{1/2}
\end{aligned} \tag{2.28}$$

Ezekszerint a C' és C'' együttthatók közt fenn kell álljon a

$$\frac{C'V\beta}{a^3\Delta\tau} = C''\pi \frac{(2\pi)^{1/2}(\beta/V)^{1/4}}{(a^3\Delta\tau)^{1/2}} \tag{2.29}$$

összefüggés.

Nézzük, hogy hogyan választhatjuk meg C' -t. Az egyik kritérium, hogy Z_0 dimenziótlan legyen, amiből következik, hogy C' -nek is dimenziótlanoknak kell lennie. A másik kritérium, hogy rögzített β és V esetén létezzen az $a \rightarrow 0$, $\Delta\tau \rightarrow 0$ kontinuum limesz (miközben értelemszerűen $N, N_\tau \rightarrow \infty$), de

$$\left(\frac{C'V\beta}{a^3\Delta\tau} \right)^{N^3N_\tau} = (C'N^3N_\tau)^{N^3N_\tau} \tag{2.30}$$

akkor és csak akkor marad ebben a határértékben véges (és nem zérus), ha $C'N^3N_\tau = 1$, azaz $C' = \frac{a^3\Delta\tau}{V\beta}$, ill. $C'' = \frac{(a^3\Delta\tau)^{1/2}}{\pi(2\pi)^{1/2}(\beta/V)^{1/4}}$. Ekkor azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}
Z_0 &= \int_{per} d[\Phi] e^{-S_0} \\
&= \lim \left(\frac{(a^3\Delta\tau)^{1/2}}{(2\pi)^{1/2}V\beta} \right)^{N^3N_\tau} \left(\prod_{j,\vec{x}} \int_{-\infty}^{\infty} d\Phi_{j,\vec{x}} \right) e^{-S_0} \\
&= \lim \left(\frac{(a^3\Delta\tau)^{1/2}}{(2\pi)^{1/2}(\beta/V)^{1/4}} \right)^{N^3N_\tau} \left(\prod_{n,\vec{p}} \int_{-\infty}^{\infty} d|\Phi_{n,\vec{p}}| \right) e^{-S_0} \\
&= \prod_{n,\vec{p}} \left(\frac{1}{\beta^2(\omega_n^2 + \vec{p}^2 + m^2)} \right)^{1/2}.
\end{aligned} \tag{2.31}$$

Az állapotösszeget átírhatjuk formálisan még egy másik alakba is. Vezessük be a

$$\mathcal{D}_0^{-1} = \left(-\partial_\tau^2 - \vec{\nabla}^2 + m^2 \right) \tag{2.32}$$

operátort, s ekkor

$$\mathcal{D}_0^{-1}(\vec{x}, \tau, \vec{x}', \tau') = \mathcal{D}_0^{-1} \delta(\tau - \tau') \delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{x}') = \sigma'(x - x'), \quad (2.33)$$

ill.

$$\tilde{\mathcal{D}}_0^{-1}(\omega_n, \vec{p}) = \omega_n^2 + \vec{p}^2 + m^2 = \omega_n^2 + \omega^2 = \sigma'_{n, \vec{p}}. \quad (2.34)$$

Ügyeljünk rá, hogy $\mathcal{D}_0^{-1}(\vec{x}, \tau, \vec{x}', \tau')$ Fourier-transzformáltja nem $\tilde{\mathcal{D}}_0^{-1}(\omega_n, \vec{p})$, hanem $\beta^2 \tilde{\mathcal{D}}_0^{-1}(\omega_n, \vec{p})$, és az utóbbi mátrix determinánsának $(-1/2)$ -edik hatványa jelenik meg a Fourier-módusok amplitúdói szerinti pályaintegrálás során.

Ennek segítségével írhatjuk, hogy a semleges részecskékből álló ideális bozongáz partíciós függvénye:

$$\begin{aligned} Z_0 &= \int_{\text{per.}} [d\Phi] e^{-S_E} = \int_{\text{per.}} [d\Phi] \exp\left\{-\frac{1}{2}\beta^2(\Phi, \mathcal{D}_0^{-1}\Phi)\right\} \\ &= \left(\det(\beta^2 \mathcal{D}_0^{-1})\right)^{-1/2}. \end{aligned} \quad (2.35)$$

Látjuk, hogy az euklideszi hatás formálisan egy $d + 1$ dimenziós elmélet energia-kifejezése, ha d az eredeti probléma térbeli dimenzióinak a száma. Ezért a d (tér-)+1(idő-)dimenziós kvantumtérelmélet esetén a termodinamikai egyensúlyának vizsgálata egy $d + 1$ tér-dimenziós euklideszi térben „élő” rendszer egyensúlyi statisztikus fizikájának tanulmányozásával ekvivalens. A termodinamikai potenciálok leszármaztatásához a továbbiakban szükségünk lesz a partíciós függvény logaritmusára:

$$\ln Z_0 = -\frac{1}{2} \sum_{n, \vec{p}} \ln\left(\beta^2 \tilde{\mathcal{D}}_0^{-1}(\omega_n, \vec{p})\right) = \frac{1}{2} \sum_{n, \vec{p}} \ln\left(\beta^{-2} \tilde{\mathcal{D}}_0(\omega_n, \vec{p})\right). \quad (2.36)$$

Látni fogjuk később, hogy $\mathcal{D}_0$ a szabad (nem önkölcsönható) skalár tér propagátorának szerepét játssza:

$$\tilde{\mathcal{D}}_0(\omega_n, \vec{p}) = \frac{1}{\omega_n^2 + \vec{p}^2 + m^2} = \frac{1}{\omega_n^2 + \omega^2}. \quad (2.37)$$

Miután rendelkezésünkre áll a semleges skalártér partíciós függvénye, meghatározhatjuk a tér energiáját és nyomását a hőmérséklet függvényében. A vákuum E_{0v} energiájához és P_{0v} nyomásához képesti különbség adja meg a véges hőmérséklet hatására a vákuumból kigerjesztődő semleges részecskék ideális gázának az E_0 energiáját és P_0 nyomását:

$$E_0 = -\frac{\partial \ln Z_0}{\partial \beta} - E_{0v}, \quad (2.38)$$

$$P_0 = T \frac{\partial \ln Z_0}{\partial V} - P_{0v}. \quad (2.39)$$

Itt a vákuum energiája és nyomása melletti 0 index arra utal, hogy az önmagával kölcsön nem ható semleges skalártér vákuumának energiájáról és nyomásáról van szó. Ha „bekapcsoljuk” az önkölcsönhatást, akkor a vákuum energiája és nyomása is megváltozik.

Összegezzünk először a frekvenciákra $\ln Z_0$ -ban. Felhasználjuk az alábbi azonosságot:

$$\ln \left((2\pi n)^2 + \beta^2 \omega^2 \right) = \int_1^{\beta^2 \omega^2} \frac{d\theta^2}{\theta^2 + (2\pi n)^2} + \ln \left[1 + (2\pi n)^2 \right]. \quad (2.40)$$

Ennek segítségével:

$$\ln Z_0 = -\frac{1}{2} \sum_{\vec{p}} \int_1^{\beta^2 \omega^2} \frac{d\theta^2}{(2\pi)^2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{n^2 + \left(\frac{\theta}{2\pi} \right)^2}, \quad (2.41)$$

ahol a hőmérséklettől független tagot elhagytuk, mivel az úgyis csak a vákuum energiájához és nyomásához ad járulékot. Az n szerinti sor összege:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{n^2 + \left(\frac{\theta}{2\pi} \right)^2} = \frac{2\pi^2}{\theta} \left(1 + \frac{2}{e^\theta - 1} \right). \quad (2.42)$$

Ezt behelyettesítjük $\ln Z_0$ -ba:

$$\begin{aligned} \ln Z_0 &= -\frac{1}{2(2\pi)^2} \sum_{\vec{p}} \int_1^{\beta\omega} 2\theta \, d\theta \, \frac{2\pi^2}{\theta} \left(1 + \frac{2}{e^\theta - 1} \right) \\ &= -V \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \int_1^{\beta\omega} d\theta \left(\frac{1}{2} + \frac{e^{-\theta}}{1 - e^{-\theta}} \right) \\ &= V \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \left[-\frac{1}{2} \beta\omega - \ln(1 - e^{-\beta\omega}) \right] + \text{const.} \end{aligned} \quad (2.43)$$

Itt áttértünk az impulzusok szerinti összegzésről integrálásra és a hőmérséklettől független tagot megint elhagytuk. Felhasználva, hogy a kölcsönhatás mentes vákuum energiája és nyomása rendre

$$E_{0v} = -\frac{\partial \ln Z_0}{\partial \beta} \Big|_{T=0} = V \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2} \omega, \quad (2.44)$$

$$P_{0v} = T \frac{\partial \ln Z_0}{\partial V} \Big|_{T=0} = - \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2} \omega, \quad (2.45)$$

az ideális Bose-gáz rendszer energiájára és nyomására

$$E_0 = V \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \omega n(\omega), \quad (2.46)$$

$$P_0 = T \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \ln(1 + n(\omega)) \quad (2.47)$$

adódik, ahol bevezettük az

$$n(\omega) = [\exp(\beta\omega) - 1]^{-1} \quad (2.48)$$

Bose-Einstein-féle betöltési számot.

A későbbiek szempontjából érdemes megjegyezni, hogy $m = 0$ esetén az impulzus szerinti integrál is elvégezhető $\ln Z_0$ -ban. Itt és a későbbiekben hasznosak az alábbi nevezetes határozott integrálok:

$$\int_0^\infty \frac{p dp}{e^{\beta p} - 1} = \frac{\pi^2 T^2}{6}, \quad (2.49)$$

$$\int_0^\infty \frac{p^2 dp}{e^{\beta p} - 1} = 2\zeta(3)T^3 \approx 2 \cdot 1,202057T^3, \quad (2.50)$$

$$\int_0^\infty \frac{p^3 dp}{e^{\beta p} - 1} = \frac{\pi^4 T^4}{15}. \quad (2.51)$$

Az utóbbi integrált felhasználva kapjuk az alábbi eredményt:

$$\begin{aligned} \ln Z_0 - (\ln Z_0)_v &= -\frac{V}{2\pi^2} \int_0^\infty dp p^2 \ln(1 - e^{-\beta p}) \\ &= \frac{V\beta}{6\pi^2} \int_0^\infty \frac{dp p^3}{e^{\beta p} - 1} \\ &= V\beta \frac{\pi^2}{90} \beta^{-4} = V \frac{\pi^2}{90} \beta^{-3}. \end{aligned} \quad (2.52)$$

Innen az ideális bozongáz energiája és nyomása, rendre

$$E_0 = -\frac{\partial \ln Z}{\partial \beta} = \frac{\pi^2}{30} V T^4, \quad (2.53)$$

$$P_0 = T \frac{\partial \ln Z}{\partial V} = \frac{\pi^2}{90} T^4. \quad (2.54)$$

3 A töltött skalártér. Bose-Einstein-kondenzáció

Töltött skalártér Lagrange-sűrűsége:

$$\mathcal{L} = \partial_\mu \Phi^* \partial^\mu \Phi - m^2 \Phi^* \Phi - \lambda (\Phi^* \Phi)^2. \quad (3.1)$$

Ez a Lagrange-sűrűség globális $U(1)$ szimmetriával rendelkezik, vis. invariáns a $\Phi \rightarrow \Phi' = e^{-i\alpha} \Phi$ transzformációval szemben, ahol α tetszőleges valós állandó. A

globális U(1) szimmetriához tartozó megmaradó áramot úgy határozzuk meg, hogy α -t x -függővé, azaz a transzformációt lokálissá tesszük. Lokális U(1) transzformáció során a Lagrange-sűrűség megváltozása:

$$\begin{aligned}\mathcal{L} &\rightarrow \mathcal{L}' = \partial_\mu \left(\Phi^* e^{i\alpha(x)} \right) \partial^\mu \left(\Phi e^{-i\alpha(x)} \right) \\ &\quad - m^2 \Phi^* \Phi - \lambda (\Phi^* \Phi)^2 \\ &= \mathcal{L} + \Phi^* \Phi \partial_\mu \alpha \partial^\mu \alpha + i \partial_\mu \alpha (\Phi^* \partial^\mu \Phi - \Phi \partial^\mu \Phi^*).\end{aligned}\quad (3.2)$$

Ezt felhasználva $\alpha(x)$ mozgásegyenlete

$$\partial^\mu \frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial (\partial^\mu \alpha)} - \frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial \alpha} = 0 \quad (3.3)$$

alakot ölt. A globális U(1) szimmetria következtében $\delta \mathcal{L}' = \frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial \alpha} \delta \alpha = 0$ tetszőleges $\delta \alpha = \text{áll.}$ esetén, vagyis ekkor $\frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial \alpha} = 0$. Ezért

$$\partial^\mu \frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial (\partial^\mu \alpha)} = 0 \quad (3.4)$$

alapján a globális szimmetriához tartozó j_μ megmaradó áram a

$$\frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial (\partial^\mu \alpha)} = \Phi^* \Phi \partial_\mu \alpha + i (\Phi^* \partial_\mu \Phi - \Phi \partial_\mu \Phi^*) \quad (3.5)$$

kifejezésből kapható meg $\alpha = \text{áll.}$ helyettesítéssel:

$$j_\mu = i (\Phi^* \partial_\mu \Phi - \Phi \partial_\mu \Phi^*). \quad (3.6)$$

Erre $\partial^\mu j_\mu = 0$ teljesül, és a megmaradó töltés

$$Q = \int d^3x j_0(x). \quad (3.7)$$

Kényelmi okok miatt célszerű áttérni valós térmennyiségekre a $\Phi = 2^{-1/2}(\Phi_1 + i\Phi_2)$ összefüggéssel. Elemi átalakítás után a Lagrange-sűrűség

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \Phi_1 \partial^\mu \Phi_1 + \frac{1}{2} \partial_\mu \Phi_2 \partial^\mu \Phi_2 - \frac{1}{2} m^2 (\Phi_1^2 + \Phi_2^2) - \frac{\lambda}{4} (\Phi_1^2 + \Phi_2^2)^2 \quad (3.8)$$

alakot ölt. A valós Φ_a ($a = 1, 2$) terekhez kanonikusan konjugált impulzusok: $\pi_a = \partial \mathcal{L} / \partial \dot{\Phi}_a = \partial_t \Phi_a$. A Hamilton-sűrűség:

$$\begin{aligned}\mathcal{H} &= \frac{1}{2} \pi_1^2 + \frac{1}{2} \pi_2^2 + \frac{1}{2} (\vec{\nabla} \Phi_1)^2 + \frac{1}{2} (\vec{\nabla} \Phi_2)^2 \\ &\quad + \frac{1}{2} m^2 (\Phi_1^2 + \Phi_2^2) + \frac{\lambda}{4} (\Phi_1^2 + \Phi_2^2)^2.\end{aligned}\quad (3.9)$$

Látjuk, hogy amennyiben nincsen kölcsönhatás ($\lambda = 0$), akkor a Φ_a ($a = 1, 2$) terek egymástól függetlenek. A megmaradó áram az új térváltozókban

$$j_\mu = \Phi_2 \partial_\mu \Phi_1 - \Phi_1 \partial_\mu \Phi_2 \quad (3.10)$$

alakra hozható, úgyhogy

$$j_0 = \Phi_2 \pi_1 - \Phi_1 \pi_2 \quad \text{és} \quad Q = \int d^3x (\Phi_2 \pi_1 - \Phi_1 \pi_2). \quad (3.11)$$

Az 1. fejezetben kapott eredmény alapján a töltött skalártér partíciós függvényére az alábbi kifejezés adódik:

$$Z = \int [d\pi_1][d\pi_2] \int_{\text{per.}} [d\Phi_1][d\Phi_2] \exp \left\{ \int_0^\beta d\tau \int d^3x [\mathrm{i}\pi_1 \partial_\tau \Phi_1 + \mathrm{i}\pi_2 \partial_\tau \Phi_2 - \mathcal{H} + \mu(\Phi_2 \pi_1 - \pi_2 \Phi_1)] \right\}. \quad (3.12)$$

Mivel a skalártér töltött és a töltésre a globális $U(1)$, ill. $O(2)$ szimmetria miatt megmaradási törvény érvényes a klasszikus elméletben, ezért be kell vezetnünk a töltéshez tartozó kémiai potenciált.

A partíciós függvényben a kanonikus impulzusok szerinti integrálok Gauss-típusúak és elvégezhetők ($a \neq a'$):

$$\begin{aligned} & \int [d\pi_a] \exp \left\{ \int_0^\beta d\tau \int d^3x \left[-\frac{1}{2} \pi_a^2 + \pi_a (\mathrm{i} \partial_\tau \Phi_a \pm \mu \Phi_{a'}) \right] \right\} \\ &= N' \exp \left\{ - \int_0^\beta d\tau \int d^3x \frac{1}{2} (\partial_\tau \Phi_a \pm \mathrm{i} \mu \Phi_{a'})^2 \right\}. \end{aligned} \quad (3.13)$$

Ezt felhasználva a partíciós függvény

$$\begin{aligned} Z = & \int_{\text{per.}} [d\Phi_1][d\Phi_2] \exp \left\{ \int_0^\beta d\tau \int d^3x \left[-\frac{1}{2} (\partial_\tau \Phi_1 - \mathrm{i} \mu \Phi_2)^2 \right. \right. \\ & - \frac{1}{2} (\partial_\tau \Phi_2 + \mathrm{i} \mu \Phi_1)^2 - \frac{1}{2} (\vec{\nabla} \Phi_1)^2 - \frac{1}{2} (\vec{\nabla} \Phi_2)^2 \\ & \left. \left. - \frac{1}{2} m^2 (\Phi_1^2 + \Phi_2^2) - \frac{\lambda}{4} (\Phi_1^2 + \Phi_2^2)^2 \right] \right\}. \end{aligned} \quad (3.14)$$

A kitevő itt $-\mathcal{L}_E(\mu=0) + \mathrm{i} \mu j_0 + \mu^2 (\Phi_1^2 + \Phi_2^2)/2$ alakú, ami a μ -ben lineáris képzetes tagtól eltekintve annak felel meg, mintha a $\mathcal{L}_E(\mu=0)$ Lagrange-sűrűségben m^2 helyére $m^2 - \mu^2$ -et írtunk volna.

A valós és τ -ban periódikus Φ_a tereket most is Fourier-sorba fejtjük:

$$\Phi_a = \sqrt{2} \zeta_a + \left(\frac{\beta}{V} \right)^{1/2} \sum_n \sum_{\vec{p}} \exp \{ \mathrm{i} (\vec{p} \vec{x} + \omega_n \tau) \} \Phi_{an}(\vec{p}), \quad (3.15)$$

ahol $\Phi_{a0} = 0$, vis. a zérus impulzusú komponens teljes egészében az első taggal vesszük figyelembe, $\zeta_1 = \zeta \cos \Theta$ és $\zeta_2 = \zeta \sin \Theta$, ζ és Θ valósak. Amennyiben $\zeta \neq 0$ adódik majd, akkor ez azt jelenti, hogy makroszkopikus mennyiségű részecske kondenzálódott a $\vec{p} = 0$ impulzusú egy-részecskés alapállapotba. Ez akkor egy klasszikus kondenzátumot jelent, nem pedig kvantumfluktuációt. Ezért a kondenzátum amplitudóját makroszkopikus mérhető mennyiségnek tekintjük, amelyre nem kell integrálni a pályaintegrálban. A pályaintegrálban tehát csak az $n \neq 0$ módusokra fogunk integrálni.

Ebben a fejezetben a továbbiakban a kölcsönhatás nélküli esetet tárgyaljuk, azaz $\lambda = 0$ feltevéssel élünk. Helyettesítsük be a fenti Fourier-sort a hatás kifejezésébe. Kicsit hosszadalmas, de elemi számolás után a következő kifejezést kapjuk:

$$-S_E = \beta V(\mu^2 - m^2)\zeta^2 - \sum_n \sum_{\vec{p}} (\Phi_{1,-n}(-\vec{p}), \Phi_{2,-n}(-\vec{p})) \beta^2 \mathcal{D}_0^{-1} \begin{pmatrix} \Phi_{1n}(\vec{p}) \\ \Phi_{2n}(\vec{p}) \end{pmatrix}, \quad (3.16)$$

ahol bevezettük a

$$\mathcal{D}_0^{-1} = \begin{pmatrix} \omega_n^2 + \omega^2 - \mu^2 & -2\mu\omega_n \\ 2\mu\omega_n & \omega_n^2 + \omega^2 - \mu^2 \end{pmatrix} \quad (3.17)$$

mátrixot és most is $\omega = \sqrt{m^2 + \vec{p}^2}$, ahol m a Lagrange-sűrűségben szereplő tömegparaméter. Az állapotösszeg - normálási tényezőtől eltekintve, - ezek után:

$$Z = \left(\prod_n \prod_{\vec{p}} \int d\Phi_{1n}(\vec{p}) d\Phi_{2n}(\vec{p}) \right) e^{-S_E}. \quad (3.18)$$

Rátérünk az útintegrálok kiszámolására. Mivel Φ_a valós, most is igaz, hogy $\Phi_{a,-n}(-\vec{p}) = \Phi_{a,n}^*(\vec{p})$. Ezért a Fourier-amplitúdók szerinti integrálok, - a semleges skalártér esetéhez hasonlóan, - most is a Fourier-amplitúdók abszolút értékei szerinti integrálokra vezethetők vissza. Az eredmény:

$$\begin{aligned} \ln Z &= \beta V(\mu^2 - m^2)\zeta^2 + \ln(\det \beta^2 \mathcal{D}_0^{-1})^{-1/2} \\ &= \beta V(\mu^2 - m^2)\zeta^2 - \frac{1}{2} \ln \det(\beta^2 \mathcal{D}_0^{-1}). \end{aligned} \quad (3.19)$$

A bozon-determináns negatív logaritmusát pedig az alábbi kifejezés határozza meg:

$$-\frac{1}{2} \ln(\det \beta^2 \mathcal{D}_0^{-1}) = -\frac{1}{2} \ln \left\{ \prod_n \prod_{\vec{p}} \beta^4 [(\omega_n^2 + \omega^2 - \mu^2)^2 + 4\mu^2 \omega_n^2] \right\}. \quad (3.20)$$

A szögletes zárójelben lévő kifejezést szorzatalakra hozzuk:

$$[\omega_n^2 + (\omega - \mu)^2] [\omega_n^2 + (\omega + \mu)^2] \quad (3.21)$$

Ezt felhasználva a partíciós függvény:

$$\begin{aligned}\ln Z &= \beta V(\mu^2 - m^2)\zeta^2 - \frac{1}{2} \sum_n \sum_{\vec{p}} \ln \left\{ \beta^2 \left[\omega_n^2 + (\omega - \mu)^2 \right] \right\} \\ &\quad - \frac{1}{2} \sum_n \sum_{\vec{p}} \ln \left\{ \beta^2 \left[\omega_n^2 + (\omega + \mu)^2 \right] \right\}.\end{aligned}\quad (3.22)$$

A két utolsó tag ugyanolyan alakú összeg, mint amilyennel semleges skalártér esetén volt dolgunk, azzal a különbséggel, hogy az $\omega \rightarrow \omega \pm \mu$ helyettesítést kell elvégezni a semleges skalártér esetében kapott eredményben. Így

$$\begin{aligned}\ln Z &= \beta V(\mu^2 - m^2)\zeta^2 - V \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} [\beta \omega \\ &\quad + \ln \{1 - \exp(-\beta(\omega - \mu))\} + \ln \{1 - \exp(-\beta(\omega + \mu))\}]\end{aligned}\quad (3.23)$$

a végképletünk a töltött skalártér partíciós függvényére. Az első tag az alapállapotba kondenzált részecskék járuléka, a második tag a vákuum járuléka, a harmadik és negyedik tag pedig a termikus gerjesztés révén keletkezett részecskék és antirészecskék járulécai. A harmadik és negyedik tagban szereplő integrál csak $|\mu| \leq m (\leq \omega)$ esetén konvergens, ezért a kémiai potenciál csak a $[-m, m]$ intervallumban változhat.

A töltött ideális Bose-gáz töltéssűrűsége,

$$\rho = \frac{T}{V} \frac{\partial \ln Z}{\partial \mu} = 2\mu\zeta^2 + \rho^*(\beta, \mu), \quad (3.24)$$

a kondenzátum $\rho_k = 2\mu\zeta^2$ töltéssűrűségének és a $T \neq 0$ hőmérséklet miatt gerjesztett állapotban található bozonok

$$\rho^*(\beta, \mu) = \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \left(\frac{1}{\exp\{\beta(\omega - \mu)\} - 1} - \frac{1}{\exp\{\beta(\omega + \mu)\} - 1} \right) \quad (3.25)$$

töltéssűrűségének az összege. Ha μ pozitív (negatív), akkor az integrandus előjele miatt a nem kondenzált részecskék ρ^* töltéssűrűsége pozitív (negatív), azaz a részecske-gerjesztések (az antirészecske-gerjesztések) vannak a gázban túlsúlyban.

Az állapotösszeg független a kondenzátum Θ fázisától, ugyanakkor függ a kondenzátum ζ amplitúdójától, ami megfigyelhető fizikai mennyiség. Ennek értékét termodinamikai egyensúlyban a

$$\frac{\partial \ln Z}{\partial \zeta} = 2\beta V(\mu^2 - m^2)\zeta = 0 \quad (3.26)$$

egyenlet határozza meg. Innen $\zeta = 0$ adódik, ha $|\mu| \neq m$. Ekkor $\rho = \rho^*(\beta, \mu)$, ami egy implicit egyenlet a kémiai potenciálnak, mint a T hőmérséklet és a ρ töltéssűrűség függvényének a meghatározására.

Kondenzátum a fentiek szerint csak akkor keletkezik, ha $\mu = \pm m$. Utóbbi esetben a kondenzátum amplitúdójának értékét az határozza meg, hogy mennyi a rendszer Q töltése, ill. $\rho = Q/V$ töltéssűrűsége:

$$\rho = \pm 2m\zeta^2 + \rho^*(\beta, \pm m), \quad (3.27)$$

ahonnan $\rho_k = \pm 2m\zeta^2 = \rho - \rho^*(\beta, \pm m)$, ahol a $\mu = \pm m$ feltétel miatt a nem kondenzált részecskék által hordozott töltéssűrűség $\rho^*(\beta, +m) > 0$, ill. $\rho^*(\beta, +m) < 0$, és $\zeta = \sqrt{|\rho - \rho^*(\beta, \pm m)|/2m}$ adódik a kondenzátum amplitúdójára. Ha $\mu = m$, akkor a gerjesztett részecskék $\rho^*(\beta, m)$ töltéssűrűsége pozitív, mutatva hogy a részecske-gerjesztések vannak túlsúlyban. A kondenzátum töltéssűrűsége $\rho_k = 2m\zeta^2 > 0$ szintén pozitív, azaz részecske-kondenzátumról beszélhetünk. Ha $\mu = -m$, akkor $\rho^*(\beta, -m) = -\rho^*(\beta, m) < 0$, ekkor az antirészecske-gerjesztések vannak túlsúlyban és $\rho_k = -2m\zeta^2 < 0$, azaz antirészecske-kondenzátum van jelen.

A kondenzátum a következőképpen alakul ki. Ha a ρ töltéssűrűség pozitív és állandó, továbbá a hőmérséklet csökken, akkor a kémiai potenciál a $\mu = m$ értékig nő, amelyet a $T = T_c$ kritikus hőmérsékleten ér el. Az adott ρ töltéssűrűséghez tartozó kritikus hőmérsékletet a

$$\rho = \rho^*(\beta_c, \mu = m) \quad (3.28)$$

egyenletből határozhatjuk meg. Ha a hőmérséklet a kritikus T_c érték alá csökken, akkor $\mu = m$ állandó marad, hiszen nem nőhet tovább. Közben azonban megindul a kondenzáció, amelyet a kondenzátum amplitúdójának fokozatos növekedése jelez:

$$\zeta^2 = \frac{1}{2m} (\rho - \rho^*(\beta, \mu = m)). \quad (3.29)$$

A fázisátalakulás másodrendű és rendparamétere ζ . Ennek T -függését az 1. ábra szemlélteti.

4 Fermiontér partíciós függvénye

Az előzőekben a bozonok statisztikus fizikai leírásával foglalkoztunk. Most kiterjesztjük tanulmányainkat a fermionokra is. Az $1/2$ spinű fermionok (leptonok és kvarkok) Lagrange-sűrűsége:

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \bar{\psi}(i\partial - m)\psi \\ &= \psi^+ \gamma^0 (i\gamma^0 \partial_t + i\vec{\gamma} \vec{\nabla} - m)\psi \end{aligned} \quad (4.1)$$

ahol $\partial = \partial_\mu \gamma^\mu$ és a Dirac-mátrixok algebrája $\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu}$. Utóbbiakra a

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \vec{\gamma} = \begin{pmatrix} 0 & \vec{\sigma} \\ -\vec{\sigma} & 0 \end{pmatrix} \quad (4.2)$$

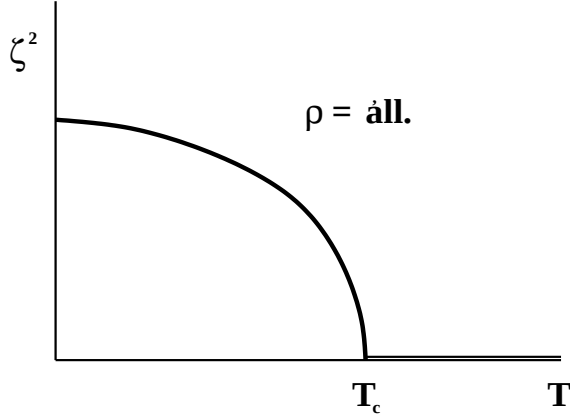


Figure 1: Töltött skalártér Bose-kondenzátumának töltéssűrűsége ρ_k , pontosabban $\zeta^2 = \rho_k/(2m)$ a T hőmérséklet függvényében rögzített ρ teljes töltéssűrűség esetén; T_c a kritikus hőmérséklet.

ábrázolást használjuk.

A Dirac-tér Lagrange-sűrűsége invariáns a globális $U(1)$ mértéktranszformációkkal szemben:

$$\psi \rightarrow \psi e^{-i\alpha}, \quad \psi^+ \rightarrow \psi^+ e^{i\alpha}. \quad (4.3)$$

A megmaradó áramot most is megtalálhatjuk azzal a módszerrel, hogy a transzformációt lokálissá tesszük, és $\alpha(x)$ mozgásegyenletéből olvassuk ki az áramot, majd $\alpha(x)$ helyére újra állandót írunk. Lokális $U(1)$ transzformáció során a Lagrange-sűrűség megváltozása:

$$\mathcal{L} \rightarrow \mathcal{L} + \bar{\psi}(\not{\partial}\alpha)\psi. \quad (4.4)$$

Az $\alpha(x)$ -re vonatkozó Euler-Lagrange-egyenlet:

$$\partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \alpha)} = \partial_\mu (\bar{\psi} \gamma^\mu \psi) = 0, \quad (4.5)$$

mivel $\partial \mathcal{L} / \partial \alpha = 0$. Innen a megmaradó áramra

$$j^\mu = \bar{\psi} \gamma^\mu \psi \quad (4.6)$$

adódik, ami $\alpha = \text{áll.}$ helyettesítés után sem változik. A megmaradó töltés innen:

$$Q = \int d^3x j^0 = \int d^3x \psi^+ \psi. \quad (4.7)$$

A ψ és ψ^+ komplex térmennyiségek független dinamikai változókként kezelendők a Hamilton-formalizmusban, hiszen a ψ -hez kanonikusan konjugált impulzus

$$\Pi = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_t \psi)} = i\psi^+. \quad (4.8)$$

A Hamilton-sűrűség

$$\begin{aligned}
\mathcal{H} &= \Pi \partial_t \psi - \mathcal{L} \\
&= i\psi^+ \partial_t \psi - \psi^+ (i\partial_t \psi) - \bar{\psi} (i\vec{\gamma} \vec{\nabla} - m) \psi \\
&= \bar{\psi} (-i\vec{\gamma} \vec{\nabla} + m) \psi
\end{aligned} \tag{4.9}$$

alakot ölt. Ennek ismeretében teljesen hasonlóan, mint a bozonok esetén, megkaphatjuk a partíciós függvény útintegrál alakjában történő előállítását:

$$\begin{aligned}
Z &= \text{Tr} \exp\{-\beta(H - \mu Q)\} \\
&= \int [i d\psi^+] [d\psi] \exp \left\{ \int_0^\beta d\tau \int d^3x (i\Pi \partial_\tau \psi - \mathcal{H} + \mu j^0) \right\} \\
&= \int [i d\psi^+] [d\psi] \exp \left\{ \int_0^\beta d\tau \int d^3x (-\psi^+ \partial_\tau \psi \right. \\
&\quad \left. + i\bar{\psi} \vec{\gamma} \vec{\nabla} \psi - m\bar{\psi} \psi + \mu \psi^+ \psi) \right\} \\
&= \int [i d\psi^+] [d\psi] \exp \left\{ \int_0^\beta d\tau \int d^3x \bar{\psi} \left(-\gamma^0 \partial_\tau + i\vec{\gamma} \vec{\nabla} - m + \mu \gamma^0 \right) \psi \right\}. \tag{4.10}
\end{aligned}$$

Az állapotösszeg most is az e^{-S_E} „Boltzmann-faktor” pályaintegrálja, ahol az euklideszi hatásra fennáll, hogy

$$-S_E = \int_0^\beta d\tau \int d^3x \bar{\psi} \left(-\gamma^0 \partial_\tau + i\vec{\gamma} \vec{\nabla} - m + \mu \gamma^0 \right) \psi. \tag{4.11}$$

Ezt szokásosabb az euklideszi koordináták szerinti deriváltakkal és az euklideszi gamma-mátrixokkal kifejezni:

$$\begin{aligned}
-\gamma^0 \partial_\tau + i\vec{\gamma} \vec{\nabla} - m + \mu \gamma^0 &= i(i\gamma^0) \partial_\tau + i\vec{\gamma} \vec{\nabla} - i(i\mu) \gamma^0 \\
&= i\gamma_E^\mu \partial_E^\mu - i\mu \gamma_E^0 = i\gamma_E^0 (\partial_E^0 - \mu) + i\gamma_E^j \partial_E^j, \tag{4.12}
\end{aligned}$$

ahol $\gamma_E^0 = i\gamma^0$, $\gamma_E^j = \gamma^j$, $\partial_E^j = \nabla^j$.

A formai hasonlóság ellenére két nagyon lényeges különbség van a bozonok esetéhez képest. Az egyik az, hogy a fentiekben szereplő ψ és ψ^+ klasszikus térmennyiségek nem közönséges számok, hanem az ún. Grassmann-algebra elemei között veszik fel értékeiket. A másik pedig az, hogy a fermionterek a képzetes időváltozóban nem periodikusak hanem antiperiodikusak.

Mint azzal már térelméleti bevezető tanulmányaink során megismerkedtünk, a klasszikus fermiontereket a Grassmann-algebra elemeivel kell ábrázolni. A jelen fejezetben adott előző levezetéseink során a változók sorrendjére gondosan ügyeltünk, azért azok Grassmann-értékű térváltozókra is helyesek. Hadd álljon itt még egy, a

továbbiak során felhasználásra kerülő, Grassmann-változókra vonatkozó eredmény. Ha η_α és η_α^+ ($\alpha = 1, 2, \dots, N$) Grassmann-változók, akkor a Gauss-integrál értéke:

$$\int d\eta_1^+ d\eta_1 \dots d\eta_N^+ d\eta_N \exp(\eta^+ D \eta) = \det D, \quad (4.13)$$

ahol $D_{\alpha\beta}$ $N \times N$ -es szimmetrikus mátrix.

Térjünk most rá a fermionterek és bozonterek termodinamikai leírása közötti másik különbségre. A fermionteret is Fourier-sorba fejtjük:

$$\psi_\alpha(\vec{x}, \tau) = V^{-1/2} \sum_n \sum_{\vec{p}} \exp\{i(\vec{p}\vec{x} + \omega_n \tau)\} \psi_{\alpha,n}(\vec{p}), \quad (4.14)$$

ahol $0 \leq \tau \leq \beta$ és ω_n (n tetszőleges egész) egyelőre meghatározatlan frekvenciák. Mielőtt meghatározásukra rátérünk, vegyük észre, hogy a $V^{-1/2}$ szorzó leválasztása biztosítja, hogy a $\psi_{\alpha,n}(\vec{p})$ Fourier-amplitudók dimenziótlanok legyenek, $[\psi_{\alpha,n}(\vec{p})] = 0$, hiszen a hatásból látjuk, hogy $[\psi_\alpha(\vec{x}, \tau)] = [a^{-3/2}] = [V^{-1/2}]$.

Vizsgáljuk most a diszkrét frekvenciák lehetséges értékeit. A bozonokra és fermionokra ω_n lehetséges értékei különböznek. Az előző fejezetekben láttuk, hogy ha a bozontereket periodikusnak tekintjük,

$$(B) \quad \Phi(\vec{y}, 0) = \Phi(\vec{y}, \beta), \quad (4.15)$$

akkor helyesen kapjuk vissza az ideális bozon-gáz állapotegyenletét, ahogyan azt kvantummechanikából megtanultuk. A periodikusságnak az a következménye, hogy a bozontér Fourier-sorában csak a páros egész számoknak megfelelő $\omega_n = 2n\pi T$ (n tetszőleges egész) frekvenciák lépnek fel. Ugyanakkor az ideális Fermi-gáz kvantummechanikából megtanult állapotegyenletét akkor kapjuk csak helyesen vissza, ha feltételezzük, hogy a fermiontér antiperiodikus:

$$(F) \quad \psi(\vec{y}, 0) = -\psi(\vec{y}, \beta). \quad (4.16)$$

Ebből az következik, hogy a fermiontér Fourier-sorában csak a páratlan egész számoknak megfelelő $\omega_n = (2n + 1)\pi T$ frekvenciák szerepelnek. A fermiontér (4.10) partíciós függvényében tehát az összes klasszikus (Grassmann-értékű), a képzetes időben antiperiodikus függvénnyel leírt térkonfigurációra integrálunk.

5 Az ideális Fermi-gáz állapotegyenlete

Helyettesítsük be az előző fejezetben definiált (4.10) partíciós függvénybe a ψ térmennyiség Fourier-sorát. Az eredmény tömör alakban így írható:

$$Z = \left(\prod_n \prod_{\vec{p}} \prod_\alpha \int id\psi_{\alpha,n}^+(\vec{p}) d\psi_{\alpha,n}(\vec{p}) \right) e^{-S_E}, \quad (5.1)$$

ahol az euklideszi hatás

$$S_E = - \sum_n \sum_{\vec{p}} i\psi_{\alpha,n}^+(\vec{p}) \beta \mathcal{D}_0^{-1}{}_{\alpha\rho} \psi_{\rho,n}(\vec{p}) \quad (5.2)$$

és

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_0^{-1} &= -i \left[(-i\omega_n + \mu) - \gamma^0 \vec{\gamma} \vec{p} - m\gamma^0 \right] \\ &= - \left[(\omega_n + i\mu) - i\gamma^0 \vec{\gamma} \vec{p} - im\gamma^0 \right]. \end{aligned} \quad (5.3)$$

Az állapotösszeg Gauss-integrál, úgyhogy az értéke:

$$Z_0 = \det(\beta \mathcal{D}_0^{-1}). \quad (5.4)$$

A $\mathcal{D}_0^{-1}$ mátrix a $\vec{p}$ és az n indexekben diagonális. A 4×4 -es aldeterminánsok értéke elemi számolással adódik:

$$\begin{aligned} \det_4 D_n(\vec{p}) &= \beta^4 \left[(-i\omega_n + \mu)^2 - m^2 - \vec{p}^2 \right]^2 \\ &= \beta^4 \left[(\omega_n + i\mu)^2 + \omega^2 \right]^2 \end{aligned} \quad (5.5)$$

Az állapotösszeg logaritmusá ezek szerint:

$$\begin{aligned} \ln Z_0 &= \ln \det(\beta \mathcal{D}_0^{-1}) = \sum_n \sum_{\vec{p}} \ln \det_4 D_n(\vec{p}) \\ &= 2 \sum_n \sum_{\vec{p}} \ln \left\{ \beta^2 \left[(\omega_n + i\mu)^2 + \omega^2 \right] \right\}. \end{aligned} \quad (5.6)$$

Tekintve, hogy a diszkrét frekvenciákra, azaz az n -re vonatkozó úgynevezett Matsubara-összeg egyaránt végigfut a negatív és a pozitív egész számokon, írhatjuk, hogy

$$\begin{aligned} \ln Z_0 &= \sum_n \sum_{\vec{p}} \ln \left\{ \beta^2 \left[(\omega_n + i\mu)^2 + \omega^2 \right] \right\} \\ &\quad + \sum_n \sum_{\vec{p}} \ln \left\{ \beta^2 \left[(-\omega_n + i\mu)^2 + \omega^2 \right] \right\}. \end{aligned} \quad (5.7)$$

Használjuk fel, hogy

$$\begin{aligned} &\left[(\omega_n + i\mu)^2 + \omega^2 \right] \left[(-\omega_n + i\mu)^2 + \omega^2 \right] \\ &= \left[\omega_n^2 + (\omega - \mu)^2 \right] \left[\omega_n^2 + (\omega + \mu)^2 \right], \end{aligned} \quad (5.8)$$

ekkor

$$\begin{aligned} \ln Z_0 &= \sum_n \sum_{\vec{p}} \left\{ \ln \left(\beta^2 \left[\omega_n^2 + (\omega - \mu)^2 \right] \right) \right. \\ &\quad \left. + \ln \left(\beta^2 \left[\omega_n^2 + (\omega + \mu)^2 \right] \right) \right\}. \end{aligned} \quad (5.9)$$

A frekvenciák szerinti összegzés megint hasonlóan végezhető el, mint szabad bozonterek esetén. Később, a Yukawa-elmélet tárgyalása során meg fogunk adni egy általános eljárást fermionikus Matsubara-összeg kiszámítására. Most az összegzéshez felhasználjuk az

$$\ln \left[(2n+1)^2 \pi^2 + \beta^2 (\omega \pm \mu)^2 \right] = \int_1^{\beta^2 (\omega \pm \mu)^2} \frac{d\theta^2}{\theta^2 + (2n+1)^2 \pi^2} + \ln \left[1 + (2n+1)^2 \pi^2 \right] \quad (5.10)$$

azonosságot, valamint a

$$\sum_n \frac{1}{\theta^2 + (2n+1)^2 \pi^2} = \frac{1}{\theta} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{e^\theta + 1} \right) \quad (5.11)$$

nevezetes összeget. Elvégezzük a θ szerinti integrálást és ismét elhagyjuk a hőmérséklettől és a kémiai potenciáltól független tagokat. A partíciós függvény az alábbi alakot ölti:

$$\ln Z_0 = 2V \sum_{\vec{p}} \left[\beta \omega + \ln \left(1 + e^{-\beta(\omega - \mu)} \right) + \ln \left(1 + e^{-\beta(\omega + \mu)} \right) \right]. \quad (5.12)$$

Termodinamikai határesetben a diszkrét impulzusokra történő összegzést az impulzustérre vett integrállal helyettesíthetjük, $\sum_{\vec{p}} \dots = V \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \dots$

Az ideális Fermi-gáz állapotegyenletét ezek után a jól ismert statisztikus fizikai összefüggések alapján számoljuk ki. A rendszer energiája $E = E_{0v} + E_0$, ahol

$$E = -\frac{\partial \ln Z_0}{\partial \beta} + \frac{\mu}{\beta} \frac{\partial \ln Z_0}{\partial \mu} \quad (5.13)$$

felbontható $E = E_{0v} + E_0$ alakban a szabad fermiontér vákuuma

$$E_{0v} = 2V \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \omega \quad (5.14)$$

energiájának és az ideális fermion-gáz

$$E_0 = 2V \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \omega [n_-(\omega) + n_+(\omega)] \quad (5.15)$$

energiájának összegére. Itt bevezettük a részecske- és az antirészecske állapotok átlagos betöltési számát:

$$n_{\pm} = \{ \exp(\beta(\omega \pm \mu)) \}^{-1}, \quad (5.16)$$

a jól ismert Fermi-Dirac-eloszlásokat. Az ideális Fermi-gáz

$$P = \frac{1}{\beta} \frac{\partial \ln Z_0}{\partial V} \quad (5.17)$$

nyomása ugyancsak felbontható a kölcsönhatásmentes fermion-vákuum

$$P_{0v} = 2 \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \omega \quad (5.18)$$

nyomásának és az ideális fermi-gáz

$$P_0 = -\frac{2}{\beta} \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} [\ln(1 - n_-(\omega)) + \ln(1 - n_+(\omega))] \quad (5.19)$$

nyomásának összegére. Parciális integrálás után a következő eredményt kapjuk:

$$\begin{aligned} P_0 &= \frac{1}{\beta\pi^2} \int_0^\infty dp p^2 [\ln(1 + e^{-\beta(\omega-\mu)}) + \ln(1 + e^{-\beta(\omega+\mu)})] \\ &= \frac{1}{3\pi^2} \int_0^\infty dp \frac{p^4}{\omega} [n_+(\omega) + n_-(\omega)]. \end{aligned} \quad (5.20)$$

Végezetül a szabad fermiongáz töltése:

$$Q = \frac{1}{\beta} \frac{\partial \ln Z_0}{\partial \mu} = 2V \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} [n_-(\omega) - n_+(\omega)]. \quad (5.21)$$

Az eddigi fejezetek eredményeit úgy összegezzük, hogy sikerült a statisztikus fizikai tárgyalást szabad bozon- és fermionterekre általánosítani az útintegrálok módszerével. Meg tudtuk adni a partíciós függvény olyan definícióját, amely bozonok és fermionok esetén is reprodukálja az egyensúlyi ideális Fermi- és Bose-gázok termodinamikai viselkedését. Láttuk, hogy a szóban forgó partíciós függvény szoros kapcsolatban van a zérus hőmérsékletű térre vonatkozó vákuum-vákuum átmeneti amplitúdóval. A továbbiakban a partíciós függvény útintegrálos definícióját általánosan el fogjuk fogadni kölcsönható terek esetében is.

II. KÖLCSÖNHATÓ RENDSZEREK

6 A partíciós függvény perturbációs sora

A hőfürdőbe helyezett kölcsönhatásmentes terek vizsgálata után foglalkozzunk a kölcsönható terekkel leírt véges hőmérsékletű rendszerek viselkedésének tárgyalásával. Bontsuk fel az S_E euklideszi hatást egy kölcsönhatásmentes S_0 és a kölcsönhatást leíró S_I tag összegére: $S_E = S_0 + S_I$. Fejtsük a partíciósfüggvényt a kölcsönhatás szerint hatványsorba:

$$\begin{aligned} Z &= N' \int [d\Phi] e^{-S_E} \\ &= N' \int [d\Phi] e^{-S_0} \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{(-1)^\ell}{\ell!} S_I^\ell. \end{aligned} \quad (6.1)$$

A partíciós függvény logaritmusában is különválasztjuk a szabad terek járulékát és a kölcsönhatásból származó részt:

$$\begin{aligned} \ln Z &= \ln \left(N' \int [d\Phi] e^{-S_0} \right) + \ln \left(1 + \sum_{\ell=1}^{\infty} \frac{(-1)^\ell}{\ell!} \langle S_I^\ell \rangle_0 \right) \\ &= \ln Z_0 + \ln Z_I, \end{aligned} \quad (6.2)$$

ahol

$$\langle S_I^\ell \rangle_0 = \frac{\int [d\Phi] e^{-S_0} S_I^\ell}{\int [d\Phi] e^{-S_0}}. \quad (6.3)$$

Itt $\ln Z_0$ a szabad terek partíciós függvénye, ami a kölcsönhatásmentes vákuumtól és a terek elemi gerjesztéseinek ideális gázától származó járulékot tartalmazza. Erre az előző fejezetekben láttunk példákat. Felhasználva, hogy

$$\begin{aligned} \ln \langle e^x \rangle &= \ln \left(1 + \sum_{\ell=1}^{\infty} \frac{\langle x^\ell \rangle}{\ell!} \right) \\ &= - \left[- \langle x \rangle - \frac{\langle x^2 \rangle}{2!} - \frac{\langle x^3 \rangle}{3!} - \dots \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} \left(\langle x \rangle + \frac{\langle x^2 \rangle}{2!} + \dots \right)^2 \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{3} \langle x \rangle^3 + \dots \right] \\ &= \langle x \rangle + \frac{\langle x^2 \rangle}{2!} - \frac{\langle x \rangle^2}{2} \\ &\quad + \frac{\langle x^3 \rangle}{3!} + \frac{\langle x^2 \rangle}{2!} \langle x \rangle - \frac{\langle x \rangle^3}{3} + \dots, \end{aligned} \quad (6.4)$$

a partíciós függvény perturbációs sora a kölcsönhatásban harmadik renddel bezárólag az alábbi alakot ölti:

$$\ln Z_I = - \langle S_I \rangle_0$$

$$\begin{aligned}
& +\frac{1}{2!} \langle S_I^2 \rangle_0 - \frac{1}{2} \langle S_I \rangle_0^2 \\
& -\frac{1}{3!} \langle S_I^3 \rangle_0 + \frac{1}{2!} \langle S_I^2 \rangle_0 \langle S_I \rangle_0 + \frac{1}{3} \langle S_I \rangle_0^3 + \dots
\end{aligned} \tag{6.5}$$

A következő fejezetekben megmutatjuk az önkölcsönható skalártér példáján, hogy hogyan írhatjuk le a kölcsönható terek termodinamikai viselkedését a perturbációs számítás módszerével. Később hasonlóan fogunk eljárni a kvantumelektrodinamikában és a kvantumszíndinamikában is.

Végül megemlítjük, hogy a fenti perturbációs sor konvergenciája, az integrálok és a sorfejtések felcserélhetősége nem triviális kérdések. Ezek vizsgálatával dönthető el az is, hogy alkalmazható-e egyáltalán a perturbációs számítás valamely konkrét esetben. E kérdések vizsgálata azonban messze túl megy egy bevezető jegyzet keretein.

7 Az önkölcsönható skalártér

A kölcsönhatási tag a Lagrange-sűrűségben

$$\mathcal{L}_I = \lambda \Phi^4 \tag{7.1}$$

Az eljárásunk az lesz, hogy a perturbációs számítás első néhány rendjében kiszámolva a partíciós függvényt, megtaláljuk azokat a szabályokat, amelyek segítségével a képleteknek diagrammokat feleltethetünk meg. Ezek a $T = 0$ térelméletben megszokott Feynman-diagrammok általánosításai. Ezek után $\ln Z_I$ -t a kölcsönhatás tetszőleges rendjében úgy kapjuk meg, hogy megszerkesztjük az összes lehetséges, a szabályoknak megfelelő diagrammot. A perturbációs számítás első rendjében a partíciós függvény kölcsönhatási része:

$$\ln Z_1 = -\langle S_I \rangle_0 \tag{7.2}$$

$$= \frac{-\lambda \int_0^\beta d\tau \int d^3x \int [d\Phi] e^{-S_0} \Phi^4(\vec{x}, \tau)}{\int [d\Phi] e^{-S_0}} \tag{7.3}$$

Helyettesítsük be ide a skalártér Fourier-sorát:

$$\Phi(\vec{x}, \tau) = \left(\frac{\beta}{V} \right)^{1/2} \sum_n \sum_{\vec{p}} \exp\{i(\vec{p}\vec{x} + \omega_n \tau)\} \Phi_n(\vec{p}). \tag{7.4}$$

Ekkor az alábbi kifejezést kapjuk:

$$\ln Z_1 =$$

$$\begin{aligned}
& -\lambda \int_0^\beta d\tau \int d^3x \frac{\beta^2}{V^2} \sum_{n_1 n_2 n_3 n_4} \sum_{p_1 p_2 p_3 p_4} \exp\{i(\vec{p}_1 + \dots + \vec{p}_4)\vec{x} + i(\omega_{n_1} + \dots + \omega_{n_4})\tau\} \\
& \cdot \prod_{\ell} \int d\vec{q} \Phi_\ell(\vec{q}) \exp\left\{-\frac{1}{2}\beta^2(\omega_\ell^2 + \vec{q}^2 + m^2)\Phi_\ell(\vec{q})\Phi_{-\ell}(-\vec{q})\right\} \\
& \cdot \frac{\Phi_{n_1}(\vec{p}_1) \dots \Phi_{n_4}(\vec{p}_4)}{\prod_{\ell} \int d\vec{q} \Phi_\ell(\vec{q}) \exp\left\{-\frac{1}{2}\beta^2(\omega_\ell^2 + \vec{q}^2 + m^2)\Phi_\ell(\vec{q})\Phi_{-\ell}(-\vec{q})\right\}} \quad (7.5)
\end{aligned}$$

Ennek kiszámolásakor vegyük észre a következőket:

1. A képzetes idő és a térfogat szerinti integrálás közvetlenül elvégezhető és a

$$V \delta_{\vec{p}_1 + \dots + \vec{p}_4, 0} \beta \delta_{n_1 + \dots + n_4, 0}$$

eredményt adja.

2. A Fourier-amplitúdók szerinti integrálás a számlálóban zérust ad, hacsak nem az teljesül, hogy

$$\begin{aligned}
n_4 &= -n_2, & \vec{p}_4 &= -\vec{p}_2, \\
n_3 &= -n_1, & \vec{p}_3 &= -\vec{p}_1,
\end{aligned}$$

avagy ezek két másik permutációja. Az ok az, hogy ellenkező esetben a komplex Fourier-amplitúdók fázisa szerinti integrálok az $\ell = n_1, \dots, n_4$ esetekben zérust adnak. A 3 különböző permutáció azonban azonos eredményt ad.

3. Az előző pontban leírt esetben az integrál szorzat alakot ölt. A nevezőben és a számlálóban szereplő tényezők kölcsönösen kiejtik egymást, kivéve az $\ell = n_1$, $\vec{q} = \vec{p}_1$ és az $\ell = n_2$, $\vec{q} = \vec{p}_2$ tényezőket. A szóbanforgó tényezők

$$\frac{\int_0^\infty dx x^2 \exp\left\{-\frac{1}{2}ax^2\right\}}{\int_0^\infty dx \exp\left\{-\frac{1}{2}ax^2\right\}} = \frac{1}{a}$$

alakúak. (A Fourier-amplitúdók fázisa szerinti integrálás triviális, marad az abszolútértékük szerinti integrálás.)

Mindezeket figyelembe véve az alábbi eredményt kapjuk:

$$\begin{aligned}
\ln Z_1 &= -3\lambda\beta V \left[\frac{\beta^2}{V^2} \sum_{n_1 n_2} V^2 \int \frac{d^3p_1}{(2\pi)^3} \frac{d^3p_2}{(2\pi)^3} \frac{1}{\beta^2(\omega_{n_1}^2 + \vec{p}_1^2 + m^2)} \frac{1}{\beta^2(\omega_{n_2}^2 + \vec{p}_2^2 + m^2)} \right] \\
&= -3\lambda\beta V \left[\frac{1}{\beta} \sum_n \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \mathcal{D}_0(\omega_n, \vec{p}) \right]^2, \quad (7.6)
\end{aligned}$$

ahol

$$\mathcal{D}_0(\omega_n, \vec{p}) = (\omega_n^2 + \vec{p}^2 + m^2)^{-1} \quad (7.7)$$

a szabad bozontér propagátora (a β^2 tényezőt leválasztottuk a definícióból). Ezek után a következő szabály szerint járunk el, amikor a fenti képletnek diagrammot feleltetünk meg:

1. Bevezetünk egy négylábú vertexet:

$$\begin{aligned} \times & \rightarrow -\lambda\beta\delta_{\omega_{be},\omega_{ki}} V\delta_{\vec{p}_{be},\vec{p}_{ki}} \\ & \rightarrow -\lambda\beta\delta_{\omega_{be},\omega_{ki}} (2\pi)^3 \delta(\vec{p}_{be} - \vec{p}_{ki}). \end{aligned} \quad (7.8)$$

2. Belső részecskevonalakkal kötjük össze a vertexeket.

Ezekre:

$$\text{—————} \rightarrow T \sum_n \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \mathcal{D}_0(\omega_n, \vec{p}). \quad (7.9)$$

Az 1. szabály következtében minden zárt diagramm esetén egy impulzus szerinti integrálás és a megfelelő frekvenciák szerinti összegzés elvégezhető és egy βV szorzót eredményez.

A fenti megfeleltetés alapján az elsőrendű korrekció diagrammja:

$$\ln Z_1 = 3 \bigcirc \bigcirc \quad (7.10)$$

A másodrendű korrekció két tagot tartalmaz:

$$\ln Z_2 = \frac{1}{2} \langle S_I^2 \rangle_0 - \frac{1}{2} \langle S_I \rangle_0^2. \quad (7.11)$$

A második tag diagrammja:

$$-\frac{1}{2} (3 \bigcirc \bigcirc)^2 \quad (7.12)$$

Az első tagnak megfelelő diagrammok két vertexet tartalmaznak. Ha az összes lehetséges módon összekötjük őket belső részecskevonalakkal, akkor az alábbi diagrammok adódnak:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \langle S_I^2 \rangle_0 = \frac{1}{2} \left[(3 \bigcirc \bigcirc)^2 + \frac{4 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 3}{2!} \bigcirc \bigcirc \right. \\ \left. + \frac{4 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2}{4!} \bigcirc \bigcirc \right]. \end{aligned} \quad (7.13)$$

$$(7.14)$$

Itt mindjárt feltüntettük, hogy a lehetséges permutációk miatt milyen kombinatorikai faktorral szerepel egy-egy diagramm. A második diagramm esetén az egyik vertex egy lábát 4-féleképpen választva, azt a másik vertex négy lábával köthetjük össze. Minden esetben az első vertex egy további szabad lábát 3-féleképpen választhatjuk ki, s azt a másik vertex 3 szabad lába közül bármelyikkel összeköthetjük. Ezek után a végeken levő szabad lábak összekötése egyértelmű. A középső két vonal $2!$ lehetséges permutációja miatt azonban a diagrammokat duplán számoltuk. A harmadik diagramm esetén ugyanúgy kezdjük el a vertexeket összekötni mint az előbb, azonban a baloldali két szabad láb közül bármely 2-t összeköthetjük a végén a jobboldali két szabad láb bármelyikével. Most mind a 4 részecskevonallal tetszőlegesen permutálható, így minden diagrammot $4!$ -szorosan vettünk figyelembe.

A kombinatorikai faktorok az alábbi egyszerű szabályszerűséget mutatják:

1. Vertexenként megjelenik egy $4!$ szorzó (a négy vertexláb lehetséges permutációinak a száma).
2. További $(n!)^{-1}$ szorzók jelennek meg, ha két rögzített vertex között n darab részecskevonallal teremt összeköttetést. (Az azonos két vertexet összekötő részecskevonalak permutációi nem jelentenek új diagrammokat.)

Az első szabály a $\lambda\Phi^4$ elméletre nézve specifikus, míg a második szabály általános érvényű. Így a kvantumelektrodinamikában és a kvantumszíndinamikában is alkalmazható a topológiailag különböző vázdiagrammok kombinatorikai faktorainak megállapítására.

Vegyük észre, hogy ha az összes másodrendű járulékot figyelembe vesszük, akkor a nem összefüggő diagrammok a partíciós függvényből kiesnek. Ez a perturbációs számítás tetszőleges rendjében bizonyíthatóan így van. A nem összefüggő diagrammok járulékai $\ln Z_I$ -ben zérusra összegződnek. A partíciós függvény adott rendű korrekciójának kiszámolásához elegendő tehát az összes összefüggő gráfot megszerkeszteni az adott rendben. A kölcsönhatás második rendjében az eredmény tehát:

$$\begin{aligned}
\ln Z_2 &= 36 \text{ } \bigcirc \bigcirc \bigcirc + 12 \text{ } \bigcirc \bigcirc \\
&= 36(-\lambda)^2 \beta V T \sum_{n_1} \int \frac{d^3 p_1}{(2\pi)^3} \dots T \sum_{n_4} \int \frac{d^3 p_4}{(2\pi)^3} \\
&\quad \cdot \mathcal{D}_0(\omega_{n_1}, \vec{p}_1) \mathcal{D}_0(\omega_{n_2}, \vec{p}_2) \mathcal{D}_0(\omega_{n_3}, \vec{p}_3) \mathcal{D}_0(\omega_{n_4}, \vec{p}_4) \\
&\quad \cdot (2\pi)^3 \delta(\vec{p}_1 + \vec{p}_2) \beta \delta_{n_1+n_2,0} \\
&\quad + 12(-\lambda)^2 \beta V T \sum_{n_1} \int \frac{d^3 p_1}{(2\pi)^3} \dots T \sum_{n_4} \int \frac{d^3 p_4}{(2\pi)^3} \\
&\quad \cdot \mathcal{D}_0(\omega_{n_1}, \vec{p}_1) \mathcal{D}_0(\omega_{n_2}, \vec{p}_2) \mathcal{D}_0(\omega_{n_3}, \vec{p}_3) \mathcal{D}_0(\omega_{n_4}, \vec{p}_4) \\
&\quad \cdot (2\pi)^3 \delta(\vec{p}_1 + \vec{p}_2 + \vec{p}_3 + \vec{p}_4) \beta \delta_{n_1+n_2+n_3+n_4,0}. \tag{7.15}
\end{aligned}$$

8 Skalárrészecske propagátora és sajátenergiája

8.1 A propagátor és a partíciós függvény kapcsolata

Definiáljuk a véges hőmérsékletű skalártér propagátorát:

$$\mathcal{D}(\vec{x}_1, \tau_1; \vec{x}_2, \tau_2) = \langle \Phi(\vec{x}_1, \tau_1) \Phi(\vec{x}_2, \tau_2) \rangle = \frac{\int [d\Phi] \Phi(\vec{x}_1, \tau_1) \Phi(\vec{x}_2, \tau_2) e^{-S_E}}{\int [d\Phi] e^{-S_E}}. \tag{8.1}$$

A térbeli irányokban és a képzetes időirányban kirótt periódikus határfeltételek miatt ez csak az $\vec{x} = \vec{x}_1 - \vec{x}_2$ és $\tau = \tau_1 - \tau_2$ változóktól függ. Automatikusan értelmezve van $0 \leq \tau \leq \beta$ esetén és kiterjeszthető a $-\beta \leq \tau < 0$ intervallumra a $\mathcal{D}(\tau < 0) = \mathcal{D}(\tau + \beta)$ definícióval. Élünk az $\vec{x}_1 = \vec{x}$, $\vec{x}_2 = 0$, $\tau_1 = \tau$ és $\tau_2 = 0$ választással és képezzük a propagátor Fourier-transzformáltját. A térmennyiség Fourier-sorát felhasználva kapjuk az alábbiakat:

$$\begin{aligned}
\mathcal{D}(\omega_n, \vec{p}) &= \int_0^\beta d\tau \int d^3 x \exp\{-i(\vec{p}\vec{x} + \omega_n \tau)\} \mathcal{D}(\vec{x}, \tau) \\
&= \sum_{n_1 n_2} \sum_{p_1 p_2} \frac{\beta}{V} \langle \Phi_{n_1}(\vec{p}_1) \Phi_{n_2}(\vec{p}_2) \rangle \\
&\quad \cdot \int_0^\beta d\tau \int d^3 x \exp\{i(\vec{p}_1 - \vec{p})\vec{x} + i(\omega_{n_1} - \omega_n)\tau\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{n_1 n_2} \sum_{p_1 p_2} \frac{\beta}{V} \langle \Phi_{n_1}(\vec{p}_1) \Phi_{n_2}(\vec{p}_2) \rangle V \delta_{\vec{p}_1 \vec{p}_2} \beta \delta_{n_1 n_2} \\
&= \beta^2 \langle \Phi_n(\vec{p}) \Phi_{-n}(-\vec{p}) \rangle.
\end{aligned} \tag{8.2}$$

A harmadik egyenlőség felírásakor felhasználtuk, hogy a $\langle \Phi_{n_1}(\vec{p}_1) \Phi_{n_2}(\vec{p}_2) \rangle$ várható érték akkor és csak akkor nem nulla, ha $n_1 = -n_2$ és $\vec{p}_1 = -\vec{p}_2$. Ha a várható értéket kiírjuk pályaintegrál alakjában, akkor a kölcsönható skalártér propagátora impulzusreprezentációban:

$$\mathcal{D}(\omega_n, \vec{p}) = \beta^2 \frac{\int [d\Phi] e^{-S_E} \Phi_n(\vec{p}) \Phi_{-n}(-\vec{p})}{\int [d\Phi] e^{-S_E}} \tag{8.3}$$

Következő lépésként a propagátort kifejezzük a partíciós függvény segítségével. A kölcsön nem ható skalártér $\mathcal{D}_0$ propagátorának inverze:

$$\mathcal{D}_0^{-1} = (\omega_n^2 + \omega^2). \tag{8.4}$$

Ennek segítségével a kölcsön nem ható tér euklideszi hatása:

$$S_0 = \frac{1}{2} \beta^2 \sum_n \sum_p \mathcal{D}_0^{-1}(\omega_n, \vec{p}) |\Phi_n(\vec{p})|^2. \tag{8.5}$$

Irjuk fel a partíciós függvényt a kölcsönhatás szerinti perturbációs sor alakjában:

$$\begin{aligned}
Z &= N' \int [d\Phi] e^{-S_E} \\
&= N' \int [d\Phi] e^{-S_0} \sum_{\ell} \frac{(-1)^{\ell}}{\ell!} S_I^{\ell}.
\end{aligned} \tag{8.6}$$

Képezzük ezután $\ln Z$ -nek a perturbálatlan inverz propagátor szerinti deriváltját¹:

$$\begin{aligned}
\frac{\delta \ln Z}{\delta \mathcal{D}_0^{-1}} &= -\frac{\beta^2}{2Z} \int [d\Phi] |\Phi_n(\vec{p})|^2 e^{-S_E} \\
&= -\frac{1}{2} \mathcal{D}.
\end{aligned} \tag{8.7}$$

Irhatjuk tehát, hogy

$$\mathcal{D}(\omega_n, \vec{p}) = -2 \frac{\delta \ln Z}{\delta \mathcal{D}_0^{-1}(\omega_n, \vec{p})} = 2 \mathcal{D}_0^2(\omega_n, \vec{p}) \frac{\delta \ln Z}{\delta \mathcal{D}_0(\omega_n, \vec{p})}. \tag{8.8}$$

Kifejeztük tehát a propagátort a partíciós függvénnyel.

¹Az impulzusreprezentációban adott tetszőleges $F[\alpha(\omega_n, \vec{p})]$ funkcionál funkcionálderiváltját a $\delta F = F[\alpha(\omega_n, \vec{p}) + \delta \alpha(\omega_n, \vec{p})] - F[\alpha(\omega_n, \vec{p})] = \sum_{np} \frac{\delta F}{\delta \alpha(\omega_n, \vec{p})} \delta \alpha(\omega_n, \vec{p})$ összefüggéssel definiáljuk.

Ahhoz, hogy ezt a képletet számolásaink során helyesen tudjuk alkalmazni, szükségünk van a $\mathcal{D}_0$ szerinti derivált pontos kifejezésére. Amíg a térfogat véges és az impulzusok ugyanúgy diszkréték, mint ahogy a frekvenciák is azok, a szabad propagátor propagátor szerinti funkcionál deriváltja lényegében parciális derivált:

$$\frac{\delta \mathcal{D}_0(\omega_n, \vec{p})}{\delta \mathcal{D}_0(\omega_{n'}, \vec{p}')} = \delta_{n,n'} \delta_{\vec{p}, \vec{p}'}, \quad (8.9)$$

és ha $(\omega_n, \vec{p})$ hurokhoz tartozó belső vonal változója, akkor a „hurokintegrálban” deriválás után

$$T \sum_{n'} \sum_{\vec{p}'} \frac{\delta \mathcal{D}_0(\omega_n, \vec{p})}{\delta \mathcal{D}_0(\omega_{n'}, \vec{p}')} F(\omega_{n'}, \vec{p}') = TF(\omega_n, \vec{p}) \quad (8.10)$$

fog szerepelni. A végtelen térfogat határesetében, azaz termodinamikai határesetben az impulzus folytonos, az impulzusállapotokra történő összegzést integrálás váltja fel a

$$\sum_{\vec{p}'} \rightarrow V \int \frac{d^3 p'}{(2\pi)^3} \quad (8.11)$$

szabály szerint, hogy a megfelelő számú mikroállapotra történjen a felösszegzés. A folytonos impulzusok esetén a $\frac{\delta \mathcal{D}_0(\omega_n, \vec{p})}{\delta \mathcal{D}_0(\omega_{n'}, \vec{p}')}$ funkcionálderiváltat úgy kell értelmezni, hogy

$$T \sum_n V \int \frac{d^3 p'}{(2\pi)^3} \frac{\delta \mathcal{D}_0(\omega_n, \vec{p})}{\delta \mathcal{D}_0(\omega_{n'}, \vec{p}')} F(\omega_{n'}, \vec{p}') = TF(\omega_n, \vec{p}) \quad (8.12)$$

maradjon. Ez akkor teljesül, ha folytonos impulzusok esetén

$$\frac{\delta \mathcal{D}_0(\omega_n, \vec{p})}{\delta \mathcal{D}_0(\omega_{n'}, \vec{p}')} = \frac{(2\pi)^3}{V} \delta(\vec{p} - \vec{p}') \quad (8.13)$$

teljesül. Az 1PI buborékdiagramok $\mathcal{D}_0$ szerinti deriválása tehát együttjár azzal, hogy eltűnik a buborékdiagram βV szorzója és grafikailag felszakad az egyik belső vonal anélkül, hogy annak „maradék”, mint külső vonal (propagátor) megjelenne, vagyis amputált 2-pont diagramot kapunk.

8.2 A skalár részecske sajátenergiájának meghatározása

A skalár részecske $\Pi(\omega_n, \vec{p})$ sajátenergiáját a

$$\mathcal{D}(\omega_n, \vec{p}) = \left[\omega_n^2 + \vec{p}^2 + m^2 + \Pi(\omega_n, \vec{p}) \right]^{-1} \quad (8.14)$$

összefüggéssel definiáljuk. Azonos átalakítás után:

$$\mathcal{D} = (\mathcal{D}_0^{-1} + \Pi)^{-1} = (1 + \mathcal{D}_0 \Pi)^{-1} \mathcal{D}_0, \quad (8.15)$$

ahonnan

$$2\mathcal{D}_0 \frac{\delta \ln Z}{\delta \mathcal{D}_0} = (1 + \mathcal{D}_0 \Pi)^{-1}. \quad (8.16)$$

Felhasználjuk, hogy

$$\ln Z_0 = \frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{\vec{p}} \ln \{\beta^{-2} \mathcal{D}_0\}, \quad (8.17)$$

ahonnan

$$\frac{\delta \ln Z_0}{\delta \mathcal{D}_0} = \frac{1}{2} \mathcal{D}_0^{-1}. \quad (8.18)$$

Mivel $\ln Z = \ln Z_0 + \ln Z_I$, a $\Pi(\omega_n, \vec{p})$ sajátenergia az

$$(1 + \mathcal{D}_0 \Pi)^{-1} = 1 + 2\mathcal{D}_0 \frac{\delta \ln Z_I}{\delta \mathcal{D}_0} \quad (8.19)$$

egyenletnek tesz eleget. Fejtsük sorba a sajátenergiát a λ csatolási állandó hatványai szerint:

$$\Pi = \sum_{\ell=1}^{\infty} \Pi_{\ell}, \quad (8.20)$$

ahol $\Pi_{\ell} \sim \mathcal{O}(\lambda^{\ell})$ a sajátenergia ℓ -edrendű korrekciója.

Elsőrendben írhatjuk, hogy

$$\begin{aligned} (1 + \mathcal{D}_0 \Pi_1)^{-1} &\approx 1 - \mathcal{D}_0 \Pi_1 \\ &= 1 + 2\mathcal{D}_0 \frac{\delta \ln Z_1}{\delta \mathcal{D}_0} \\ &= 1 + 2\mathcal{D}_0 \frac{\delta}{\delta \mathcal{D}_0} (3 \text{ } \bigcirc \text{ }) \\ &= 1 + 12\mathcal{D}_0 \text{ } \underline{\bigcirc} \end{aligned} \quad (8.21)$$

Innen a sajátenergia elsőrendű korrekciója

$$\Pi_1 = 12 \text{ } \underline{\bigcirc} \quad (8.22)$$

A $\mathcal{D}_0$ szerinti funkcionál deriválás a diagrammok nyelvén egy részecskevonal felvágását jelenti.

Tanulságos kiszámolni a sajátenergia másodrendű korrekcióját is. Ennek meghatározásához írjuk fel a sajátenergia egyenletét a másodrendű tagokkal bezárólag:

$$\begin{aligned} (1 + \mathcal{D}_0\Pi_1 + \mathcal{D}_0\Pi_2)^{-1} &\approx 1 - (\mathcal{D}_0\Pi_1 + \mathcal{D}_0\Pi_2) + \mathcal{D}_0\Pi_1\mathcal{D}_0\Pi_1 + \mathcal{O}(\lambda^3) \\ &= 1 + 2\mathcal{D}_0\left(\frac{\delta \ln Z_1}{\delta \mathcal{D}_0} + \frac{\delta \ln Z_2}{\delta \mathcal{D}_0}\right). \end{aligned} \quad (8.23)$$

Az elsőrendű korrekcióra vonatkozó egyenletet felhasználva ebből a másodrendű korrekcióra az alábbiakat kapjuk:

$$\Pi_2 = \Pi_1\mathcal{D}_0\Pi_1 - 2\frac{\delta}{\delta \mathcal{D}_0}\left(36 \text{ } \bigcirc\bigcirc\bigcirc + 12 \text{ } \bigcirc\bigcirc\bigcirc\right). \quad (8.24)$$

A deriválás elvégzése után a kerekzárójeles kifejezés:

$$72 \text{ } \bigcirc\bigcirc + 72 \text{ } \bigcirc\bigcirc + 48 \text{ } \bigcirc. \quad (8.25)$$

A $\Pi_1\mathcal{D}_0\Pi_1$ tagok éppen kiejtik egymást Π_2 -ben. Így végezetül az alábbi eredményt kapjuk:

$$\Pi_2 = -144 \text{ } \bigcirc\bigcirc - 96 \text{ } \bigcirc. \quad (8.26)$$

Általában is igaz, hogy a sajátenergiában azok a diagrammok, amelyek egy részecskevonal felvágásával szétesővé válnak, zérussá összegződnek. A sajátenergiához tehát csak azok a diagrammok adnak járulékot, amelyek egyetlen részecskevonal felvágásával nem tehetők szétesővé. Az ilyen diagrammokat egyrészecske irreducibiliseknek (1PI) nevezik. Általában a sajátenergia:

$$\Pi = -2\left(\frac{\delta}{\delta \mathcal{D}_0} \ln Z_I\right)_{1PI}. \quad (8.27)$$

A megfelelő diagrammokat a következő eljárással kapjuk meg:

1. Megszerkesztjük az adott rendben az összes összefüggő diagrammot.
2. Differenciáljuk őket $\mathcal{D}_0$ szerint, vis. egy részecskevonal felvágásával előállítjuk belőlük az összes topológiailag különböző diagrammot.

3. Elhagyjuk a nem egyrészecke irreducibilis diagrammokat.
4. Meghatározzuk a kombinatorikai faktorokat a 7. fejezetben megadott szabályok alapján. (Vigyázat! Az így nyert kombinatorikai faktorok a (8.27) képlet 2-es faktorát már tartalmazzák.)

9 A $\lambda\Phi^4$ elmélet a perturbációszámítás első rendjében

Ebben a fejezetben a perturbációszámítás első rendjében, a $\lambda\Phi^4$ elmélet példája révén ismerkedünk meg azokkal a technikai nehézségekkel, amelyekkel lépten-nyomon találkozunk, ha valamit ténylegesen ki akarunk számolni.

A sajátenergia elsőrendű korrekciója, mint azt az előző fejezetben láttuk,

$$\begin{aligned}\Pi_1 &= -12 \text{ (diagram)} \\ &= 12\lambda(\mathcal{F}^v + \mathcal{F}^m)\end{aligned}\tag{9.1}$$

ahol a hurokban szereplő vertex is hordoz egy mínusz előjelet és ahol

$$\begin{aligned}\mathcal{F}^v + \mathcal{F}^m &= T \sum_n \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \mathcal{D}_0(\omega_n, \vec{p}) \\ &= T \sum_n \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\omega_n^2 + \omega^2}.\end{aligned}\tag{9.2}$$

Vegyük észre, hogy az $\ln Z_1$ -hez járulakot adó buborékdiagramnak $(\beta V)T^2$ szorzói vannak, utóbbi T szorzók a belső vonalakhoz tartoznak. Amikor a sajátenergiát szabad propagátor szerinti deriválással származtatjuk, akkor megjelenik $1/V$ faktor, ami V -vel szorozva 1-et ad; a felbontott hurokintegrálból visszamaradó T tényező (T^2 egyik tényezője) pedig a β -szorzóval ad 1-et. A visszamaradó $\mathcal{F}^v + \mathcal{F}^m$ kifejezés tehát egyetlen T szorzót tartalmaz. A másik észrevételünk, hogy az egyhurok sajátenergiában szereplő vertex $-\lambda$ szorzót hordoz, aminek negatív előjelét kompenzálja, hogy Π_1 a diagram mínusz 12-szerese. Így az $\mathcal{F}^v + \mathcal{F}^m$ kifejezés előjele pozitív.

Az első technikai nehézség a bozonikus Matsubara-összeg kiszámítása, azaz a diszkrét bozonikus frekvenciákra történő összegzés elvégzése. Erre a komplex függvénytan segítségével kínálkozik lehetőség. (A korábban, a kölcsönhatásmentes bozontér esetében használt összeg-képletet is ezzel az általános módszerrel lehet levezetni.)

Áttérünk a $p_0 = i\omega_n$ Minkowski-változóra és egy ügyes fogással az összeget a p_0 komplex síkon vett vonalintegrállá írjuk át. Ehhez felhasználjuk, hogy a $\coth(\frac{1}{2}\beta p_0)$

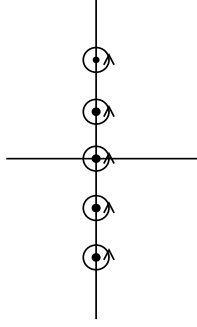


Figure 2: A bozonikus Matsubara-felösszegzéshez használt görbe a komplex p_0 síkon, amely körbejárja a $\coth(\beta p_0/2)$ függvény össze pólusait.

függvénynek a $p_0 = i2\pi nT$ (n egész) helyeken egyszeres pólusai vannak. Ezért tetszőleges $f(p_0)$ függvény esetén:

$$\begin{aligned} T \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(p_0 = i\omega_n = i2\pi nT) \\ = \frac{T}{2\pi i} \int_C dp_0 f(p_0) \frac{1}{2} \beta \coth\left(\frac{1}{2}\beta p_0\right), \end{aligned} \quad (9.3)$$

ahol az integrálás a p_0 komplex síkon az 2. ábra szerinti C görbére történik, amely körbefutja egyszer az összes pólust.

Az integrandus pólusszerkezete a következőképpen tanulmányozható. Írjuk a p_0 változót a pólusok közelében $p_0 = i2\pi nT + \epsilon$ alakba, ahol ϵ infinitezimális, ekkor

$$\begin{aligned} \frac{\beta}{2} \coth \frac{\beta p_0}{2} &\approx \frac{\beta}{2} \frac{e^{\frac{\beta p_0}{2}} + e^{-\frac{\beta p_0}{2}}}{e^{\frac{\beta p_0}{2}} - e^{-\frac{\beta p_0}{2}}} \approx \frac{\beta}{2} \frac{e^{i\pi n + \frac{1}{2}\beta\epsilon} + e^{-i\pi n - \frac{1}{2}\beta\epsilon}}{e^{i\pi n + \frac{1}{2}\beta\epsilon} - e^{-i\pi n - \frac{1}{2}\beta\epsilon}} \\ &\approx \frac{\beta}{2} \frac{2(-1)^n}{(-1)^n \beta\epsilon} \approx \frac{1}{\epsilon} \end{aligned} \quad (9.4)$$

ami mutatja, hogy az integrandusban szereplő eme tényezőnek egyszerű pólusai vannak 1 reziduummal a $p_0 = i2\pi nT$ pontokban.

Ha $f(p_0)$ egy olyan függvény, amelynek nincsenek pólusai a képzetes p_0 tengelyen, akkor a C görbe két, a képzetes tengellyel párhuzamos egyenesbe deformálható át, mint azt a 3. ábra mutatja. Felhasználva, hogy

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \coth u &= \frac{1}{2} \left(1 + \frac{2}{e^{2u} - 1} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(-1 - \frac{2}{e^{-2u} - 1} \right), \end{aligned} \quad (9.5)$$

a következőképpen írhatjuk a (9.3) egyenlőséget:

$$T \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(p_0 = i\omega_n)$$

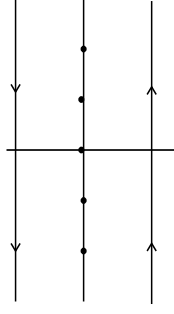


Figure 3: A bozonikus Matsubara-felösszegzéshez használt görbe a komplex p_0 síkon, deformáció után.

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty+\epsilon}^{i\infty+\epsilon} dp_0 f(p_0) \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{e^{\beta p_0} - 1} \right) \\
&\quad + \frac{1}{2\pi i} \int_{i\infty-\epsilon}^{-i\infty-\epsilon} dp_0 f(p_0) \left(-\frac{1}{2} - \frac{1}{e^{-\beta p_0} - 1} \right) \\
&= \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{i\infty} dp_0 \frac{1}{2} (f(p_0) + f(-p_0)) \\
&\quad + \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty+\epsilon}^{i\infty+\epsilon} dp_0 (f(p_0) + f(-p_0)) \frac{1}{e^{\beta p_0} - 1} \\
&= \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{i\infty} dp_0 f(p_0) \\
&\quad + \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty+\epsilon}^{i\infty+\epsilon} dp_0 (f(p_0) + f(-p_0)) \frac{1}{e^{\beta p_0} - 1}. \tag{9.6}
\end{aligned}$$

Az utolsó egyenlőség első tagja a vákuum járuléka, míg a második tag az anyagtér járuléka, amit az integrandusban megjelenő betöltési szám mutat.

A (9.6) képletet felhasználjuk a sajátenergia első rendű korrekciójának kiszámolására; most $f(p_0) = -(p_0^2 - \omega^2)^{-1}$. A sajátenergia elsőrendű korrekciójához a vákuum járuléka:

$$\begin{aligned}
\Pi_1^v &= 12\lambda \mathcal{F}^v = 12\lambda \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{i\infty} dp_0 \frac{-1}{p_0^2 - \omega^2} \\
&= 12\lambda \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{1}{p_4^2 + \omega^2}. \tag{9.7}
\end{aligned}$$

Itt bevezettük a $p_4 = -ip_0$ euklideszi impulzus komponenst és az integrált átírtuk négy-dimenziós euklideszi tér feletti integrállá.

Az anyagtér járuléka a sajátenergiához $\mathcal{O}(\lambda)$ rendben:

$$\Pi_1^m = 12\lambda \mathcal{F}^m = 12\lambda \frac{1}{2\pi i} \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \int_{-i\infty+\epsilon}^{i\infty+\epsilon} dp_0 \left[-\frac{2}{p_0^2 - \omega^2} \right] \frac{1}{e^{\beta p_0} - 1}. \tag{9.8}$$

A bozonikus betöltési számnak köszönhetően az integrálás útját bezárhatjuk a komplex p_0 sík jobboldalán egy végtelen sugarú félkörrel, ld. 4. ábra.

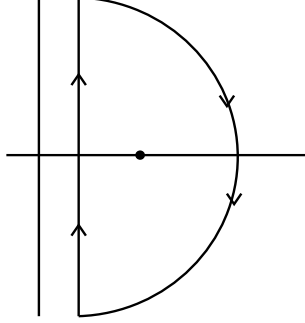


Figure 4: A sajátenergia részecskegázról származó járulékanak kiszámolásához használt görbe a komplex p_0 síkon, amely körbefutja a $p_0 = \omega$ pólust.

Ekkor az integrandusnak a $p_0 = \omega$ helyen lévő egyszerű pólusa ad az integrálhoz járulékot a reziduum-tétel értelmében:

$$\Pi_1^m = 12\lambda \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\omega} \frac{1}{e^{\beta\omega} - 1}. \quad (9.9)$$

Ha az $m = 0$ esetet vizsgáljuk, akkor az anyagtér járulékában az integrálás elvégezhető:

$$\mathcal{F}^m = \frac{1}{2\pi^2} \int_0^\infty \frac{dp}{e^{\beta p} - 1} p = \frac{1}{2\pi^2 \beta^2} \Gamma(2) \zeta(2) = \frac{T^2}{12} \quad (9.10)$$

és

$$\Pi_1^m = 12\lambda \mathcal{F}^m = \lambda T^2. \quad (9.11)$$

Nehezebb a helyzet amikor a kölcsönható vákuum járulékat akarjuk meghatározni. Ez uis. nem véges. Regularizáljuk pl. úgy Π_1^V -ot, hogy a nagy impulzusokat egy Λ_c értéknél levágjuk. Használjuk fel, hogy az integrandus nem függ a négyes impulzus irányától, s ezért a térszög szerinti integrál az $\Omega_d = 2\pi^{d/2}/\Gamma(d/2)$ eredményt adja, ahol a dimenzió $d = 4$. Ekkor

$$\begin{aligned} \mathcal{F}^V &= \frac{1}{16\pi^4} \frac{2\pi^2}{\Gamma(2)} \int_0^{\Lambda_c} \frac{p^3 dp}{p^2 + m^2} \\ &= \frac{1}{16\pi^2} \int_0^{\Lambda_c^2} \frac{u du}{u + m^2} \\ &= \frac{1}{16\pi^2} \left[\Lambda_c^2 - m^2 \ln \frac{\Lambda_c^2 + m^2}{m^2} \right] \\ &\rightarrow \frac{1}{16\pi^2} \left[\Lambda_c^2 - m^2 \ln \frac{\Lambda_c^2}{m^2} \right], \quad \text{ha } (\Lambda_c \rightarrow \infty) \end{aligned} \quad (9.12)$$

és

$$\Pi_1^V = 12\lambda\mathcal{F}^V \quad (9.13)$$

a keresett járulék. Ez pontosan ugyanaz mint a sajátenergia elsőrendű korrekciója a $T = 0$ térelméletben.

Az elmélet renormálását a partíciós függvény renormálásával végezzük el. A perturbációs számítás első rendjében:

$$\ln Z = 3 \bigcirc, \quad (9.14)$$

ami az előzőek értelmében nyilvánvalóan nem véges, ha $\Lambda_c \rightarrow \infty$. Adjunk hozzá a Lagrange-sűrűséghez egy ún. ellentagot:

$$\mathcal{L} \rightarrow \mathcal{L} - \frac{1}{2}\delta m_1^2 \Phi^2. \quad (9.15)$$

Ennek δm_1^2 együtthatója megválasztható úgy, hogy a partíciós függvény elsőrendben végesnek adódjon. Az új kölcsönhatásnak egy további vertexet kell bevezetnünk:

$$\text{---}\overset{1}{\times}\text{---} \rightarrow \delta m_1^2. \quad (9.16)$$

A partíciós függvényhez további járulékot ad az egy darab ilyen vertexet tartalmazó bozonhurok:

$$\begin{aligned} \ln Z_1 &= 3 \bigcirc - \frac{1}{2} \bigcirc \overset{1}{\times} \bigcirc \\ &= -3\lambda\beta V(\mathcal{F}^V + \mathcal{F}^M)^2 - \frac{1}{2}\delta m_1^2\beta V(\mathcal{F}^V + \mathcal{F}^M) \\ &= \beta V \left\{ \left[-3\lambda(\mathcal{F}^V)^2 - \frac{1}{2}\delta m_1^2\mathcal{F}^V \right] \right. \\ &\quad \left. + \left[-6\lambda\mathcal{F}^M\mathcal{F}^V - \frac{1}{2}\delta m_1^2\mathcal{F}^M \right] \right. \\ &\quad \left. - 3\lambda(\mathcal{F}^M)^2 \right\} \end{aligned} \quad (9.17)$$

Kísérreljünk meg úgy renormálni, hogy az ellentag ne függjön a hőmérséklettől és a kémiai potenciáltól. Ezt elérjük, ha az utolsó egyenlőség második sorát zérussá tesszük:

$$-6\lambda\mathcal{F}^V - \frac{1}{2}\delta m_1^2 = 0, \quad (9.18)$$

azaz

$$\delta m_1^2 = -12\lambda\mathcal{F}^V \sim \mathcal{O}(\lambda). \quad (9.19)$$

Ekkor a partíciós függvény

$$\ln Z_1 = \beta V \left\{ 3\lambda(\mathcal{F}^V)^2 - 3\lambda(\mathcal{F}^M)^2 \right\}. \quad (9.20)$$

Mivel az első tagból az energiához egy T -től és μ -tól független járulék adódik, azért ez a tag a $T = 0$ vákuum módosulását írja le a kölcsönhatás első rendjében. Mivel a vákuum energiáját már nulladik közelítésben is elhagytuk, ugyanezt tesszük a perturbáció számítás magasabb rendjeiben is. Így a kiszámolt energia, nyomás, stb. mindig a perturbációszámítás adott rendjében a kölcsönható vákuumhoz képesti értékek lesznek. A renormált partíciós függvény elsőrendben tehát:

$$\begin{aligned} \ln Z_1^R &= -3\lambda(\mathcal{F}^M)^2\beta V \\ &= -3\lambda\beta V \left(\int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{n(\omega)}{\omega} \right)^2, \end{aligned} \quad (9.21)$$

ahol $\omega = \sqrt{m^2 + \vec{p}^2}$ és $n(\omega) = (e^{\beta\omega} - 1)^{-1}$ a betöltési szám.

Ugyanehhez az eredményhez úgy is eljuthatunk, ha $\ln Z_1$ -ből kivonjuk azt a gráfot, amelyben a sajátenergiás betétrészt $T = 0$ ($\beta \rightarrow \infty$) és $\mu = 0$ mellett számoljuk:

$$\begin{aligned} \ln Z_1 &= 3 \left[\text{diagram of two circles connected by a line} - 2 \text{diagram of two circles connected by a line with a box labeled 0 above it} \right] \\ &= -3\lambda\beta V \left[(\mathcal{F}^V + \mathcal{F}^M)^2 \right. \\ &\quad \left. - 2T \sum_n \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \mathcal{D}_0(\omega_n, \vec{p}) \lim_{T, \mu \rightarrow 0} T \sum_{n'} \int \frac{d^3p'}{(2\pi)^3} \mathcal{D}_0(\omega_{n'}, \vec{p}') \right] \\ &= -3\lambda\beta V \left[(\mathcal{F}^V + \mathcal{F}^M)^2 - 2(\mathcal{F}^V + \mathcal{F}^M)\mathcal{F}^V \right] \\ &= -3\lambda\beta V \left[(\mathcal{F}^M)^2 - (\mathcal{F}^V)^2 \right]. \end{aligned} \quad (9.22)$$

A diagrammon téglalap (a beleírt nullával) foglalja magába a diagramm azon részét, amelyet $T = 0$, $\mu = 0$ mellett kell kiszámítani. A levonandó 2-es faktora nyilvánvaló kombinatorikai okból lép fel.

A partíciós függvény elsőrendű korrekciójából deriválással kapjuk meg az energia és a nyomás elsőrendű korrekcióját. Írjuk a partíciós függvény logaritmusát $\ln Z_1^R = -3\lambda\beta V(\mathcal{F}^M)^2$ alakba, és ha ezt a kifejezést deriváljuk,

$$E_1 = -\frac{\partial \ln Z_1}{\partial \beta} = 3\lambda V \mathcal{F}^M \left(\mathcal{F}^M + 2\beta \frac{\partial \mathcal{F}^M}{\partial \beta} \right), \quad (9.23)$$

ahol

$$\mathcal{F}^M = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{n(\omega)}{\omega}, \quad (9.24)$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \mathcal{F}^m}{\partial \beta} &= \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\omega} \frac{\partial n(\omega)}{\partial \beta} = - \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} e^{\beta \omega} n^2(\omega) \\
&= - \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} [e^{\beta \omega} - 1 + 1] n^2(\omega) = - \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} [n(\omega) + n^2(\omega)], \quad (9.25)
\end{aligned}$$

akkor az alábbi eredményt kapjuk:

$$\begin{aligned}
E_1 &= - \frac{\partial \ln Z_1^R}{\partial \beta} \\
&= 3\lambda V \left(\int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{n(\omega)}{\omega} \right) \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} n(\omega) \left(\frac{1}{\omega} - 2\beta - 2\beta n(\omega) \right), \quad (9.26)
\end{aligned}$$

$$P_1 = T \frac{\partial \ln Z_1^R}{\partial V} = -3\lambda \left(\int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{n(\omega)}{\omega} \right)^2. \quad (9.27)$$

Példaként vegyük azt az esetet, amikor a részecskék nyugalmi tömege zérus, $m = 0$. Ekkor $\omega = |\vec{p}| = p$ és

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}^m &= \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{1}{p} \frac{1}{e^{\beta p} - 1} \\
&= \frac{1}{2\pi^2} \int_0^\infty \frac{p \, dp}{e^{\beta p} - 1} = \frac{T^2}{12}, \\
2\beta \frac{\partial \mathcal{F}^m}{\partial \beta} &= -\frac{T^2}{3}, \quad (9.28)
\end{aligned}$$

amit felhasználva az alábbiak adódnak:

$$E_1 = -\frac{\lambda}{16} V T^4, \quad (9.29)$$

$$P_1 = -\frac{\lambda}{48} T^4. \quad (9.30)$$

A kölcsönható bozongáz energiája és nyomása a kölcsönhatás csatolási állandójában elsőrendű korrekcióval bezárólag, rendre:

$$E_{m=0} = V T^4 \left(\frac{\pi^2}{30} - \frac{\lambda}{16} + \mathcal{O}(?) \right), \quad (9.31)$$

$$P_{m=0} = T^4 \left(\frac{\pi^2}{90} - \frac{\lambda}{48} + \mathcal{O}(?) \right). \quad (9.32)$$

A következő korrekciót második rendben várnánk, azonban majd látni fogjuk, hogy ez nem egészen így lesz. Erre utal a kérdőjel.

Eljárásunk természetesen egyúttal az egyrészecske irreducibilis sajátenergiát is renormálta:

$$\begin{aligned}
\Pi_1^R &= -12 \text{ (diagram: a circle with a horizontal line through it) } - 2 \left(-\frac{1}{2} \right) \text{ (diagram: a cross) } \\
&= 12\lambda\mathcal{F}^V + \delta m_1^2 + 12\lambda\mathcal{F}^M \\
&= 12\lambda\mathcal{F}^M = \Pi_1^M.
\end{aligned} \tag{9.33}$$

Mint az a korábbiakból következik,

$$\Pi_1^R = \lambda T^2, \quad \text{ha } m = 0. \tag{9.34}$$

Ennek jelentését megkaphatjuk, ha megvizsgáljuk a propagátort:

$$\begin{aligned}
\mathcal{D} &= \mathcal{D}_0 \frac{1}{1 + \mathcal{D}_0 \Pi_1} = \frac{1}{\omega^2 + \omega_n^2} \frac{1}{1 + \Pi_1(\omega^2 + \omega_n^2)^{-1}} \\
&= \frac{1}{\omega_n^2 + \omega^2 + \Pi_1}.
\end{aligned} \tag{9.35}$$

A renormált propagátor

$$\mathcal{D}^R = \frac{1}{\omega_n^2 + \omega^2 + \Pi_1^R}. \tag{9.36}$$

Innen látjuk, hogy az $m = 0$ tömegű bozonok a véges hőmérsékletű környezetben

$$m_{\text{eff}}^2 = \Pi_1^M = \lambda T^2 \tag{9.37}$$

effektív tömeget nyernek. Ilyen jelenséggel, a Debye-árnyékolással már találkoztunk a klasszikus elektrodinamikában. A modern nagyenergiás magfizika egyik vizsgált kérdése, hogy hogyan változnak a részecskék (az adott esetben a hadronok) tömegei, ha azokat forró hadronikus anyag veszi körül, ami pl. nagyenergiás nehézion-ütközések során fordul elő.

10 Zérus tömegű skalártér és infravörös divergen- cia

Amíg $m \neq 0$ esetén az elsőrendű korrekciót valóban másodrendű követi, addig $m = 0$ esetén a partíciós függvény a λ csatolási állandóban nem analitikus viselkedést mutat és a soron következő korrekció rendje $\mathcal{O}(\lambda^{3/2})$. Ennek az az oka, hogy bizonyos diagramokban a részecskéket az $n = 0$ módusban véve az impulzus szerinti integrálok a $p \rightarrow 0$ limeszben divergálnak. A 7. fejezet végén megadtuk a partíciós függvény

másodrendű korrekcióját, amely két tagot tartalmaz. A második tag integrandusa $n_1 = n_2 = n_3 = n_4 = 0$ esetén

$$\sim \frac{dp_1 p_1^2 dp_2 p_2^2 dp_3 p_3^2}{p_1^2 p_2^2 p_3^2 (\vec{p}_1 + \vec{p}_2 + \vec{p}_3)^2}, \quad (10.1)$$

ami integrálható a $p_i \rightarrow 0$ határon. Ezzel szemben az első tag az $n_1 = n_2 = 0$ esetben

$$\sim \beta V \Pi_1^2 T \frac{dp p^2}{p^4} \quad (10.2)$$

integrandust tartalmaz, ami nem integrálható $p \rightarrow 0$ alsó határral. Ez az ún. infravörös divergencia, amelyet a zérus energiájú módusok létezése okoz. Ne felejtjük el, hogy ilyen módusok $m \neq 0$ esetén nincsenek, mert a legalacsonyabb energiájú módusra $\omega_0 = m \neq 0$.

A partíciós függvény másodrendű korrekciójának első tagját ábrázoló diagrammot átrajzolhatjuk a sajátenergia segítségével ún. gyűrű-diagrammá:

$$\text{Diagram: A circle with two external lines, each labeled } \Pi_1. \quad (10.3)$$

Az összes ehhez hasonló gyűrű-diagramm, amely általában N darab sajátenergiás betétrészt tartalmaz egy gyűrűre felfűzve, divergens a $p \rightarrow 0$ határon:

$$\underbrace{(2 \cdot 3!)^N}_{12} \underbrace{\frac{(N-1)!}{2} \frac{1}{N!}}_{1/(2N)} \text{Diagram: A circle with two external lines, each labeled } \Pi_1. \quad \Big|_{n=0} \sim \frac{1}{2} \beta V \int \frac{(-\Pi_1)^N}{N} T \frac{dp}{2\pi^2} p^{-2(N-1)}. \quad (10.4)$$

A feltüntetett faktorok az alábbi megfontolással adódnak: Mind az N vertexnél két láb összekötése 3!-féleképpen lehetséges és mindegyik vertex a szomszédjaival kétféleképp köthető össze. Innen a baloldali első tényező. A második tényező a vertexek lehetséges sorrendjeinek számát adja meg a körön, tekintetbe véve, hogy a balról jobbra és a jobbról balra haladás ekvivalens. Végül az $\ln Z_I$ 6. fejezetben felírt hatványsorának $< S_I >^N / N!$ tagjából származó $1/N!$ tényező szerepel harmadikként. A jobb oldal felírásakor felhasználtuk a (9.1) összefüggést.

Bár egyenként valamennyi gyűrű-diagramm infravörös divergenciát mutat, a perturbációs számítás összes rendjére felösszegezve őket véges eredményt kapunk:

$$\ln Z_I^{\text{gy}} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} \text{Diagram: A circle with two external lines, each labeled } \Pi_1. - \frac{1}{3} \text{Diagram: A circle with two external lines, each labeled } \Pi_1, \text{ and a third line labeled } \Pi_1. + \dots \right)$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2}\beta VT \sum_n \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \sum_{N=2}^{\infty} \frac{1}{N} [-\Pi_1(\omega_n, \vec{p}) \mathcal{D}_0(\omega_n, \vec{p})]^N \\
&= -\frac{1}{2}\beta VT \sum_n \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} [\ln(1 + \Pi_1 \mathcal{D}_0) - \Pi_1 \mathcal{D}_0]. \tag{10.5}
\end{aligned}$$

A renormálás természetesen azt jelenti, hogy itt a sajátenergiás betétrészt a renormált Π_1^R -re kell cserélni, vagyis az 1-hurok Π_1 -gyel felrajzolt diagramokhoz hozzá kell adni azokat a további diagramokat, amelyekben 1, 2, ..., stb. számú Π_1 betétrészt lecserélünk a megfelelő 1-hurok ellentag-vertexszel. Ha az így renormált gyűrűdiagramokat felösszegezzük, akkor nem jelenik meg további ultraibolya divergencia:

$$\begin{aligned}
\ln Z_I^{\text{gy}} &= -\frac{1}{2}\beta VT \sum_n \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \left[\ln \left(1 + \frac{\lambda T^2}{\omega_n^2 + \vec{p}^2} \right) - \frac{\lambda T^2}{\omega_n^2 + \vec{p}^2} \right] \\
&= -\frac{1}{2}\beta VT \frac{T^3 \lambda^{3/2}}{2\pi^2} \int \frac{dp p^2}{\lambda^{3/2} T^3} \left[\ln \left(1 + \frac{1}{p^2/(\lambda T^2)} \right) - \frac{1}{p^2/(\lambda T^2)} \right] \\
&\quad - \frac{1}{2}\beta VT \sum_{n \neq 0} \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \left[\ln \left(1 + \frac{\lambda T^2}{\omega_n^2 + \vec{p}^2} \right) - \frac{\lambda T^2}{\omega_n^2 + \vec{p}^2} \right] \\
&= -\frac{\beta V}{4\pi^2} T^4 \lambda^{3/2} \int_0^\infty du u^2 (\ln(1 + u^{-2}) - u^{-2}) + \mathcal{O}(\lambda^2) \\
&= \frac{\beta V}{12\pi} T^4 \lambda^{3/2} + \mathcal{O}(\lambda^2). \tag{10.6}
\end{aligned}$$

Itt az infravörösben divergens tagok (az $n = 0$ módusok) adják az $\mathcal{O}(\lambda^{3/2})$ tagot, míg az $n \neq 0$ módusok $\mathcal{O}(\lambda^2)$ és magasabb rendű járulékokat tartalmaznak. (Felhasználtuk, hogy

$$\begin{aligned}
&\int_0^{U_c} du u^2 [\ln(u^2 + 1) - \ln u^2 - u^{-2}] = \\
&\quad \left\{ \frac{1}{3} \left[u^3 \ln(u^2 + 1) - \frac{2}{3} u^3 + 2u - 2 \arctan u \right] \right. \\
&\quad \left. - 2 \left[\frac{u^3}{3} \ln u - \frac{u^3}{9} \right] - u \right\}_0^{U_c} \\
&\rightarrow -\frac{\pi}{3} + \frac{U_c^3}{3} \ln(1 + U_c^{-2}) - \frac{1}{3} U_c \\
&\rightarrow -\frac{\pi}{3},
\end{aligned}$$

ahol $u = p\lambda^{-1/2}T^{-1}$ és $U_c = u(p = \Lambda_c)$.

Az $m = 0$ esetben a skalártér energiája és nyomása az infravörös divergenciákat is figyelembe véve:

$$E_{m=0} = VT^4 \frac{\pi^2}{30} \left[1 - \frac{15}{8} \left(\frac{\lambda}{\pi^2} \right) + \frac{15}{2} \left(\frac{\lambda}{\pi^2} \right)^{3/2} + \dots \right], \tag{10.7}$$

$$P_{m=0} = T^4 \frac{\pi^2}{90} \left[1 - \frac{15}{8} \left(\frac{\lambda}{\pi^2} \right) + \frac{15}{2} \left(\frac{\lambda}{\pi^2} \right)^{3/2} + \dots \right]. \quad (10.8)$$

Az infravörös divergenciák járulékát pontosíthatjuk azáltal, hogy $\ln Z_I^{\text{gy}}$ kifejezésében Π_1 helyett a sajátenergia magasabb rendű korrekciókat is tartalmazó kifejezést használjuk. Pl. a sajátenergia is tartalmaz az infravörös divergenciáktól származó $\mathcal{O}(\lambda^{3/2})$ rendű korrekciót. Ezt nevezik az irodalom „daisy”-felösszegzésnek, az úgy nevezett margaréta-diagrammok felösszegzésének. Ehhez az infravörös járulékok felösszegzésével kapott sajátenergia-járulékra is szükség van, amit a korábbiakhoz hasonlóan határozhatunk meg. Induljunk ki az előzőekben meghatározott $\ln Z_I^{\text{gy}}$ kifejezésből (és a megfelelő diagramok végtelen sorából), amit $(-2\delta/\delta\mathcal{D}_0)_{1PI}$ funkcionálderiválásnak alávetve kapjuk a sajátenergia „daisy”-korrekcióját:

$$\begin{aligned} - \sum_{N=1}^{\infty} (2 \cdot 3!)^N \cdot N \cdot (N-1)! \cdot \text{diagram} &= 12\lambda T \sum_n \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \sum_{N=1}^{\infty} (-\Pi_1)^{N-1} \mathcal{D}_0^N \\ &= 12\lambda T \sum_n \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{\mathcal{D}_0}{1 + \Pi_1 \mathcal{D}_0} \\ &= 12\lambda T \sum_n \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\omega_n^2 + \vec{p}^2 + \Pi_1^{\text{R}}}. \end{aligned} \quad (10.9)$$

Itt az N tényező azért jelent meg, mert $\ln Z_I^{\text{gy}}$ diagramjain N darab hurkot lehet felvágni úgy, hogy még mindig 1PI diagramot kapjunk. Felhasználva, hogy a renormált sajátenergia első rendben $\Pi_1^{\text{R}} = \lambda T^2$, a fenti kifejezésből az $n = 0$ tag a következő eredményt adja a sajátenergia $\mathcal{O}(\lambda^{3/2})$ rendű korrekciójára:

$$\begin{aligned} \Pi_{3/2} &= 12\lambda T \int_0^{\Lambda_c} \frac{dp}{2\pi^2} \frac{p^2}{p^2 + \lambda T^2} \\ &= \frac{6}{\pi^2} \lambda^{3/2} T^2 \int_0^{U_c} du \frac{u^2}{1 + u^2} \\ &= \frac{6}{\pi^2} \lambda^{3/2} T^2 (U_c - \arctan U_c) \end{aligned} \quad (10.10)$$

Mint látjuk, most újabb ultraibolya divergencia lépett fel. Ennek kezelése azonban bonyolultabb, mert a fenti kifejezés renormálásakor a perturbációs számítás különböző rendjeiből származó ellentagok keveredhetnek.

11 Yukawa elmélete. A fermionpropagátor és fermion-sajátenergia

Az előző fejezetekben láttuk, hogy milyen tipikus kapcsolat van a bozonterek esetén a partíciós függvény, a sajátenergia és a propagátor között. Most a Yukawa-elmélet példáján megnézzük ugyanezt fermiontér esetén. Egyúttal megtanuljuk, hogyan lehet a frekvencia szerinti összegzést fermionok esetén elvégezni.

Yukawa elmélete a nukleonok és a pionok kölcsönhatását írja le. Ha az izospintól eltekintünk, akkor a nukleonokat a $\psi(x)$ Dirac-tér, a pionokat pedig a $\Phi(x)$ skalártér írja le. A kölcsönhatás

$$\mathcal{L}_I = g\bar{\psi}\psi\Phi \quad (11.1)$$

alakú.

Mivel páratlan ℓ esetén S_I^ℓ páratlan számú Φ tényezőt tartalmaz az integrandusában, ezért $\langle S_I^\ell \rangle = 0$, ha ℓ páratlan. Következésképpen $\ln Z_I$ -hez csak ℓ páros hatványai adnak járulékot a 6. fejezet szerinti perturbációs sorban. $\ln Z_I$ perturbációs sora tehát g^2 hatványai szerint halad.

Határozzuk meg a partíciós függvény korrekcióját a legalacsonyabb el nem tűnő rendben. A hatás $\mathcal{L}_I$ -vel definiált S_I kölcsönhatási részébe behelyettesítjük a skalártér (2.12) és a fermiontér (4.15) Fourier-sorát. Az $\mathcal{O}(g^2)$ rendben kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} \ln Z_2 &= \frac{1}{2} \langle S_I^2 \rangle_0 \\ &= \frac{1}{2} g^2 \int_0^\beta d\tau_1 d\tau_2 \int d^3x_1 d^3x_2 \sum_{n_1 n_2 n_3 n_4} \sum_{\ell_1 \ell_2} \sum_{p_1 p_2 p_3 p_4} \sum_{q_1 q_2} \\ &\quad \cdot \frac{\beta}{V^3} e^{i(\vec{q}_1 + \vec{p}_3 - \vec{p}_1)\vec{x}_1 + i(\omega_{\ell_1} + \omega_{n_3} - \omega_{n_4})\tau_1} \\ &\quad \cdot e^{i(\vec{q}_2 + \vec{p}_4 - \vec{p}_2)\vec{x}_2 + i(\omega_{\ell_2} + \omega_{n_4} - \omega_{n_2})\tau_2} \\ &\quad \cdot \prod_{\alpha} \prod_{np} \prod_{\ell q} \int d\bar{\psi}_{\alpha n}(\vec{p}) d\psi_{\alpha n}(\vec{p}) d\Phi_{\ell}(\vec{q}) \\ &\quad \cdot \frac{\bar{\psi}_{\rho n_1}(\vec{p}_1) \psi_{\rho n_3}(\vec{p}_3) \Phi_{\ell_1}(\vec{q}_1) \bar{\psi}_{\gamma n_2}(\vec{p}_2) \psi_{\gamma n_4}(\vec{p}_4) \Phi_{\ell_2}(\vec{q}_2) e^{-S_0}}{\prod_{\alpha} \prod_{np} \prod_{\ell q} \int d\bar{\psi}_{\alpha n}(\vec{p}) d\psi_{\alpha n}(\vec{p}) d\Phi_{\ell}(\vec{q}) e^{-S_0}}. \end{aligned} \quad (11.2)$$

Itt S_0 az euklideszi hatás szabad terek esetén:

$$\begin{aligned} S_0 &= \frac{1}{2} \beta^2 \sum_n \sum_p \Phi_n(\vec{p}) \mathcal{D}_0^{-1}(\omega_n, \vec{p}) \Phi_{-n}(-\vec{p}) \\ &\quad - \beta \sum_n \sum_{\vec{p}} \bar{\psi}_{\alpha n}(\vec{p}) (\mathcal{G}_0^{-1})_{\alpha\rho}(\omega_n, \vec{p}) \psi_{\rho n}(\vec{p}), \end{aligned} \quad (11.3)$$

ahol bevezettük a szabad fermiontér propagátorát:

$$\begin{aligned}\mathcal{G}_0^{-1}(\omega_n, \vec{p}) &= \gamma^0(-i\omega_n + \mu) - \vec{\gamma}\vec{p} - M \\ &= \not{p} - M,\end{aligned}\quad (11.4)$$

ahol $p_0 = -i\omega_n + \mu$ a Minkowski-térben az impulzus nulladik komponense, M pedig a fermion tömeg. Mindjárt itt jegyezzük meg, hogy az egzakt fermion propagátor és a partíciós függvény között hasonló összefüggés van mint a bozonpropagátor és a megfelelő partíciós függvény között:

$$\mathcal{G}(\omega_n, \vec{p}) = \langle \bar{\psi}\psi \rangle = \frac{1}{\beta} \frac{\delta \ln Z_I}{\delta \mathcal{G}_0^{-1}(\omega_n, \vec{p})}. \quad (11.5)$$

Térjünk most rá $\ln Z_2$ kiértékelésére. Ehhez a következőket kell figyelembe vennünk:

1. A $\int d\tau_1 d\tau_2 \int d^3x_1 d^3x_2$ integrálás

$$\beta^2 V^2 \delta(\vec{q}_1 + \vec{p}_3 - \vec{p}_1) \delta(\vec{q}_2 + \vec{p}_4 - \vec{p}_2) \delta_{\ell_1+n_3-n_1} \delta_{\ell_2+n_4-n_2}$$

szorzót eredményez.

2. A $d\Phi_\ell$ integrálok eltűnnek kivéve, ha $\ell_1 = -\ell_2$ és $\vec{q}_1 = -\vec{q}_2$.
3. Figyelembe véve, hogy ψ és $\bar{\psi}$ Grassmann-változók, az alábbiak érvényesek:

$$\int d\bar{\psi} \int d\psi \psi = 0; \quad \int d\bar{\psi} \int d\psi \bar{\psi}\psi = 1.$$

Ezek következtében a fermiontér Fourier-komponenseire vett integrálok akkor és csak akkor nem egyenlők nullával, ha

$$(a) \quad n_1 = n_3, \quad n_2 = n_4, \quad \vec{p}_1 = \vec{p}_3, \quad \vec{p}_2 = \vec{p}_4; \quad (11.6)$$

$$(b) \quad n_1 = n_4, \quad n_2 = n_3, \quad \vec{p}_1 = \vec{p}_4, \quad \vec{p}_2 = \vec{p}_3. \quad (11.7)$$

Az (a) és (b) típusú tagoknak két különböző diagramm feleltethető meg. (Eltekintünk a Yukawa-elmélet Feynman-szabályainak részletes ismertetésétől.) Az (a) típusú tagok járuléka:

$$\begin{aligned}\ln Z_{2(a)} &= \frac{1}{2} g^2 \beta^2 V^2 \frac{\beta}{V^3} \sum_{n_1 p_1 n_2 p_2} \langle \bar{\psi}_{\rho n_1}(\vec{p}_1) \psi_{\rho n_1}(\vec{p}_1) \Phi_0(0) \bar{\psi}_{\gamma n_2}(\vec{p}_2) \psi_{\gamma n_2}(\vec{p}_2) \Phi_0(0) \rangle_0 \\ &= \frac{1}{2} \beta V g^2 \frac{1}{m^2} \left[T \sum_n \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \text{Tr} \mathcal{G}_0(\omega_n, \vec{p}) \right]^2 \\ &= \frac{1}{2} \quad \bigcirc \text{----} \bigcirc \quad .\end{aligned}\quad (11.8)$$

Itt m a bozontér tömegparamétere. Az átlagolás a szabad tereknek megfelelő e^{-S_0} súllyal történik. A (b) típusú tagok járuléka:

$$\begin{aligned} \ln Z_{2(b)} &= -\frac{1}{2}g^2\beta VT^2 \sum_{n_1 n_2} \int \frac{d^3 p_1 d^3 p_2}{(2\pi)^6} \\ &\quad \cdot \text{Tr} \mathcal{G}_0(\omega_{n_1}, \vec{p}_1) \mathcal{D}_0(\omega_{n_2} - \omega_{n_1}, \vec{p}_2 - \vec{p}_1) \mathcal{G}_0(\omega_{n_2}, \vec{p}_2) \\ &= -\frac{1}{2} \quad \text{---}\bigcirc\text{---} \quad . \end{aligned} \quad (11.9)$$

A negatív előjel annak köszönhető, hogy a fermion amplitúdókat fel kellett cserélni ahhoz, hogy előálljanak a propagátorok kifejezései.

A bozon sajátenergia vátozatlanul úgy van definiálva, mint ahogy skalártér esetén. A legalacsonyabb rendű el nem tűnő járulék hozzá:

$$\Pi_2 = \quad \text{---}\bigcirc\text{---} \quad . \quad (11.10)$$

A fermion sajátenergiát az

$$\mathcal{G}^{-1}(\omega_n, \vec{p}) = \mathcal{G}_0^{-1}(\omega_n, \vec{p}) + \Sigma(\omega_n, \vec{p}) \quad (11.11)$$

összefüggéssel definiáljuk. Meg lehet mutatni, hogy

$$\Sigma = \left(\frac{\delta \ln Z_I}{\delta \mathcal{G}_0} \right)_{1\text{PI}} \quad (11.12)$$

ahol a fermionvonal szempontjából irreducibilis diagrammokat kell figyelembe venni. Pl. $\mathcal{O}(g^2)$ rendben:

$$\Sigma_2(\omega_n, \vec{p}) = \text{---}\overset{\circ}{\underset{|}{\text{---}}} \quad - \quad \text{---}\text{---}\text{---} \quad (11.13)$$

Érdemes megjegyezni, hogy a partíciós függvényhez a bozontér szempontjából nem egyrészeske irreducibilis diagrammok, mint az (a) típusúak is adnak zérustól különböző járulékot. Ez annak a következménye, hogy $\langle \Phi \rangle$ zérustól különböző a T hőmérsékletű környezetben. (Vigyázat, itt a kölcsönható rendszer egyensúlyi sokasága szerinti várható érték áll, nem pedig $\langle \dots \rangle_0$.)

Végezetül megadunk még egy fontos összefüggést, amelynek segítségével a fermion-frekvenciák szerinti összegek kiszámolhatók. Ehhez áttérünk a $p_0 = i\omega_n + \mu$ változóra, ahol $\omega_n = (2n+1)\pi T$. Legyen $f(p_0)$ egy tetszőleges függvény, amelynek nincsenek pólusai a képzetes tengelyen. Ekkor az alábbi azonosság érvényes:

$$\begin{aligned} T \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(p_0 = i\omega_n + \mu) &= -\frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty+\mu+\epsilon}^{i\infty+\mu+\epsilon} dp_0 f(p_0) \frac{1}{e^{\beta(p_0-\mu)} + 1} \\ &\quad - \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty+\mu-\epsilon}^{i\infty+\mu-\epsilon} dp_0 f(p_0) \frac{1}{e^{\beta(\mu-p_0)} + 1} \\ &\quad + \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty+\mu-\epsilon}^{i\infty+\mu-\epsilon} dp_0 f(p_0). \end{aligned} \quad (11.14)$$

Az első két tag a részecske- és az antirészecske-járulék, amelyek $T = 0$ esetén eltűnnek. A harmadik tag független a hőmérséklettől és a vákuum valamint a véges sűrűségű, zérus hőmérsékletű anyag járuléka.

III. KVANTUMELEKTRODINAMIKA VÉGES HŐMÉRSÉKLETEN

12 Az elektromágneses tér

Az elektromágneses tér egyenletei, a Maxwell-egyenletek az

$$\begin{aligned} S &= \int d^4x \frac{1}{2}(\vec{E}^2 - \vec{B}^2) \\ &= \int d^4x \left[-\vec{E}(\vec{\nabla} A^0 + \dot{\vec{A}}) - \vec{B} \text{rot} \vec{A} + \frac{1}{2}(\vec{B}^2 - \vec{E}^2) \right]. \end{aligned} \quad (12.1)$$

hatásból $\vec{E}$, $\vec{B}$, $\vec{A}$ és A^0 szerinti variálással kaphatók meg:

$$\frac{\delta S}{\delta \vec{E}} = -\vec{E} - \vec{\nabla} A^0 - \dot{\vec{A}} = 0, \quad (12.2)$$

$$\frac{\delta S}{\delta \vec{B}} = \vec{B} - \text{rot} \vec{A} = 0, \quad (12.3)$$

$$\frac{\delta S}{\delta \vec{A}} + \partial_t \frac{\delta S}{\delta \dot{\vec{A}}} - \vec{\nabla} \frac{\delta S}{\delta(\vec{\nabla} \vec{A})} = \text{rot} \vec{B} - \dot{\vec{E}} = 0, \quad (12.4)$$

$$\frac{\delta S}{\delta A^0} + \partial_t \frac{\delta S}{\delta \dot{A}^0} - \vec{\nabla} \frac{\delta S}{\delta(\vec{\nabla} A^0)} = \vec{\nabla} \vec{E} = 0. \quad (12.5)$$

Az első két egyenletből közvetlenül adódik, hogy

$$\text{rot} \vec{E} = -\dot{\vec{B}}, \quad (12.6)$$

$$\text{div} \vec{B} = 0. \quad (12.7)$$

A hatásban a $\vec{B} = \text{rot} \vec{A}$ összefüggés közvetlenül figyelembe vehető, s akkor megszabadulunk a mágneses indukciótól, mint független dinamikai változótól. Parciális integrálás után kapjuk, hogy

$$S = \int d^4x \left[-\vec{E} \dot{\vec{A}} - \frac{1}{2}(\vec{E}^2 + (\text{rot} \vec{A})^2) + A^0 \vec{\nabla} \vec{E} \right]. \quad (12.8)$$

Látjuk, hogy A^0 nem dinamikai változó, mert a hozzá kanonikusan konjugált impulzus azonosan eltűnik. A^0 Langrange-multiplikátor szerepét játssza, amellyel a hatásban a Gauss-törvény biztosítható. A dinamikai változók $\vec{A}$ és a hozzá kanonikusan konjugált impulzus, az elektromos térerősség:

$$\vec{\pi} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\vec{A}}} = -\vec{E}. \quad (12.9)$$

A $T = 0$ tér generáló funkcionálját naívan

$$\int [d\pi^i] \int [dA^i] [dA^0] e^{iS} \quad (12.10)$$

alakban íránk fel. Ez azonban azért nem helyes, mert a hatásba belefoglalmazott kényszer, amely megköveteli, hogy a dinamikai változók elégítsék ki a Gauss-törvényt, még megenged végtelen sok fizikailag ekvivalens térkonfigurációt. A hatás invariáns a lokális $U(1)$ mértéktranszformációkkal szemben:

$$\vec{A}' = \vec{A} - \vec{\nabla} f, \quad A'^0 = A^0 + \partial_t f, \quad (12.11)$$

ahol $f(x)$ tetszőleges függvény. Azt, hogy a fizikailag ekvivalens térkonfigurációkat a generáló funkcionálban csak egyetlen térkonfiguráció reprezentálja, úgy lehet elérni, hogy mértékfeltételt rovjunk ki. Ez a vektorpotentiál és deriváltjainak egy függvénye, amelynek megköveteljük az eltűnését:

$$F(A^\mu, \partial_\mu A^\mu) = 0. \quad (12.12)$$

Erre tipikus példa az ún. kovariáns mérték használata:

$$\partial_\mu A^\mu - c(x) = 0, \quad (12.13)$$

ahol $c(x)$ tetszőleges függvény. A mértékfeltételt is figyelembe véve, a generáló funkcionál:

$$\int [d\pi^i] \int [dA^\mu] \delta[F] e^{iS}. \quad (12.14)$$

A generáló funkcionálban elvégezhetjük a kanonikus impulzusok szerinti integrálást, mert az Gauss-típusú integrálok kiszámítását, ill. azok analitikus elfolytatását igényli:

$$\begin{aligned} \int [d\pi^i] \exp \left\{ i \int d^4x \left(-\vec{E}(\dot{\vec{A}} + \vec{\nabla} A^0) - \frac{1}{2} \vec{E}^2 \right) \right\} = \\ \exp \left\{ -i \int d^4x \frac{1}{2} (\dot{\vec{A}} + \vec{\nabla} A^0)^2 \right\}. \end{aligned} \quad (12.15)$$

Ezt felhasználva, a generáló funkcionál az alábbi alakot ölti:

$$\int [dA^\mu] \delta[F] \exp \left\{ -i \int d^4x \left[\frac{1}{2} (\dot{\vec{A}} + \vec{\nabla} A^0)^2 + \frac{1}{2} (\text{rot} \vec{A})^2 \right] \right\}. \quad (12.16)$$

Ebből a kifejezésből fogunk kiindulni, amikor az elektromágneses tér partíciós függvényét definiáljuk. Eljárásunk hasonló lesz mint skálárterek esetén volt. Az eredmény helyességét azzal támasztjuk alá, hogy az a fekete test sugárzását helyesen írja le.

A partíciós függvény definíciójára az alábbi munkahipotézist tesszük:

$$Z' = \int_{\text{per}} [dA_\mu] \delta[F] e^{-S_E}, \quad (12.17)$$

ahol az euklideszi hatás:

$$\begin{aligned} S_E &= - \int_0^\beta d\tau \int d^3x \left[\frac{1}{2} \left(-i\partial_\tau \vec{A} + i\vec{\nabla} A_0 \right)^2 - \frac{1}{2} (\text{rot} \vec{A})^2 \right] \\ &= \int_0^\beta \int d^3x \left[\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F_{\mu\nu} \right]. \end{aligned} \quad (12.18)$$

Itt megint áttértünk a négy-dimenziós euklideszi tér vektoraira a $t \rightarrow -i\tau$ és $A_0 \rightarrow iA_0$ változócserével. Kikötjük továbbá, hogy csak olyan A_μ térkonfigurációkra integrálunk, amelyek a τ képzetes időben β szerint periodikusak. Ezt az indokolja, hogy a kvantált a vektorpotenciál-mező egy-részecskés gerjesztései 1 spinű bozonok, ezeket a gerjesztéseket nevezzük fotonoknak.

A partíciós függvényt most úgy alakítjuk át, hogy az új alak explicit módon mértékinvariáns legyen. Először vegyük észre, hogy a partíciós függvény a vektorpotenciál periodikussága miatt csak a τ változóban periodikus mértéktranszformációkkal szemben lehet invariáns. Jelölje a továbbiakban az ω index azokat a mennyiségeket, amelyek egy tetszőleges vektorpotenciálból kiindulva az

$$A_i^\omega = A_i - \nabla_i \omega, \quad A_0^\omega = A_0 - \partial_\tau \omega \quad (12.19)$$

azaz a

$$A_\mu^\omega = A_\mu - \partial_\mu \omega \quad (12.20)$$

infinitezimális mértéktranszformációval állnak elő. Legyen továbbá a mértéktranszformáció periodikus: $\omega(\tau = 0, \vec{x}) = \omega(\tau = \beta, \vec{x})$. A partíciós függvény mostani alakjában nem mértékinvariáns. Mértékinvariáns azonban a hatás és a használt integrálási mérték, ha az utóbbit mint a vektorpotenciál Fourier-amplitúdói szerinti integrálok szorzatát definiáljuk:

$$S_E = S_E^\omega, \quad [dA_\mu] = [dA_\mu^\omega]. \quad (12.21)$$

A partíciós függvény mértékinvarianciáját a mértékrögzítő delta-funkcionál rontja el. Helyettesítsük ezért Z' -ben a delta-funkcionált az alábbi módon felírt egységnyi szorzóval:

$$1 = \Delta[A_\mu] \int [d\omega] \delta[F^\omega], \quad (12.22)$$

ahol $[d\omega]$ az $U(1)$ csoport fölött értelmezett invariáns mérték. Ekkor a fenti egyenlet által definiált $\Delta[A_\mu]$ funkcionál mértékinvariáns. Írjunk tehát Z' -ben a delta-funkcionál helyére 1-et a fenti szofisztikált alakban. Ezzel elérjük, hogy a mértékfeltétel továbbra is ki van róva. Egyúttal integrálunk valamennyi olyan térkonfigurációra, amely egy kezdeti, a mértékfeltételnek elegettevő térkonfigurációból mértéktranszformációval nyerhető. Osszuk be ezért a kapott kifejezést a "mértéktranszformációk (az ekvivalens térkonfigurációk) számával", azaz a csoport $\int [d\omega]$ invariáns térfogatával.

Ekkor a következő definíciót nyerjük:

$$Z = \frac{\int [d\omega] \int_{\text{per}} [dA_\mu] \Delta[A_\mu] \delta[F^\omega] \exp\{-S_E\}}{\int [d\omega]}. \quad (12.23)$$

A mértékinvariancia felhasználásával a számláló:

$$\int [d\omega] \int_{\text{per}} [dA_\mu^\omega] \Delta[A_\mu^\omega] \delta[F^\omega] \exp\{-S_E^\omega\}. \quad (12.24)$$

Itt természetesen átjelölhetjük az integrálási változót A_μ^ω -ról A_μ -re:

$$\left(\int [d\omega] \right) \int_{\text{per}} [dA_\mu] \Delta[A_\mu] \delta[F] \exp\{-S_E\}. \quad (12.25)$$

Ekkor látjuk, hogy a számláló arányos a csoport térfogatával, és ezért az utóbbival lehet Z -ben egyszerűsíteni. Az elektromágneses tér partíciós függvényére így a következő kifejezést nyerjük:

$$Z = \int_{\text{per}} [dA_\mu] \Delta[A_\mu] \delta[F] e^{-S_E}. \quad (12.26)$$

Az így definiált partíciós függvény valóban mértékinvariáns.

A következő lépés a $\Delta[A_\mu]$ funkcionál meghatározása. Ehhez írjuk át az öt definiáló egyenletet a következő alakba:

$$\Delta^{-1}[A_\mu] = \int [d\omega] \delta[F[A_\mu^\omega]]. \quad (12.27)$$

Rögzített A_μ esetén F az ω funkcionálja. Térjünk át az ω integrálási változóról az F integrálási változóra. Feltéve, hogy egyetlen olyan $\omega = \omega[F]$ funkcionál létezik, amely adott A_μ esetén megoldja az $F[\omega] = 0$ mértékfeltételt, írhatjuk, hogy

$$\begin{aligned} \Delta^{-1}[A_\mu] &= \int [dF] \delta[F] \left(\det \frac{\delta F^\omega}{\delta \omega} \right)^{-1} \\ &= \left(\det \frac{\delta F^\omega}{\delta \omega} \right)^{-1} \Big|_{F[A_\mu^\omega]=0}. \end{aligned} \quad (12.28)$$

A determináns nem más mint a végrehajtott transzformáció Jacobi-determinánsa. Mielőtt tovább lépnénk, emlékezzünk vissza, hogy a partíciós függvényben a Δ funkcionál meg van szorozva $\delta[F]$ -fel. Ez azt jelenti, hogy Δ -t olyan rögzített A_μ mellett kell meghatározni, amelyre $F[A] = 0$. Ha azonban A_μ ilyen, akkor az $F[A_\mu^\omega] = 0$ megoldása $\omega = 0$. Ezért a determinánst az $\omega = 0$ helyen kell kiszámolni, vagyis

$$\Delta[A_\mu] = \det \frac{\delta F^\omega(x)}{\delta \omega(y)} \Big|_{\omega=0}. \quad (12.29)$$

A gyakorlatban elegendő F^ω -t infinitezimális mértéktranszformációk esetére meghatározni. Az F^ω ω szerinti sorfejtésében a lineáris tag együttthatója a keresett funkcionálderivált, amelynek determinánsát kell kiszámolni. Az elektromágneses tér (a tiszta U(1) mértékelmélet) partíciós függvényét így az alábbi alakban állítottuk elő:

$$Z = \int_{\text{per}} [dA_\mu] \delta[F] \det \left(\frac{\delta F^\omega(x)}{\delta \omega(y)} \right) \Big|_{\omega=0} e^{-S_E}. \quad (12.30)$$

Faggyejev és Popov módszerét követve, a fentiekben előállt determinánst fel foghatjuk, mint valamilyen Grassmann-értékű $\bar{C}(x)$ és $C(x)$ szellemterek szerinti Gauss-típusú integrált:

$$\det \left(\frac{\delta F^\omega(x)}{\delta \omega(y)} \right) = \int_{\text{per}} [d\bar{C}] [dC] \exp \left\{ - \int_0^\beta d\tau \int d^3x \bar{C}(x) \frac{\partial F^\omega}{\partial \omega} C(x) \right\}. \quad (12.31)$$

A bevezetett szellemtér nem valódi fizikai szabadsági fokokat képvisel, hanem csak egy technikai segédeszköz, amelynek segítségével a determináns könnyebben kezelhető. Fontos azt is megjegyezni, hogy a megengedett mértéktranszformációk periodikussága miatt a szellemtereket is periodikusaknak kell választani:

$$\bar{C}(0, \vec{x}) = \bar{C}(\beta, \vec{x}), \quad C(0, \vec{x}) = C(\beta, \vec{x}). \quad (12.32)$$

Ebben is különböznek a valódi fermionterektől, amelyekre antiperiodikus a határfeltétel.

Barátkozás céljából írjuk ki a szellemtagot kovariáns mérték használata esetén:

$$F = \partial_\mu A_\mu - c(x) = 0. \quad (12.33)$$

Ekkor a mértékfeltétel infinitezimális mértéktranszformáció után:

$$\begin{aligned} F^\omega &= \partial_\mu A_\mu^\omega - c(x) \\ &= \partial_\mu A_\mu - c(x) - \partial_\mu \partial_\mu \omega, \end{aligned} \quad (12.34)$$

amiből funkcionálderiválással

$$\frac{\delta F^\omega(x)}{\delta \omega(y)} = -\partial_\mu \partial_\mu \delta(x - y) \quad (12.35)$$

adódik. A hatást tehát az

$$- \int_0^\beta d\tau \int d^3x \bar{C} \partial_\mu \partial_\mu C = \int_0^\beta d\tau \int d^3x (\partial_\mu \bar{C})(\partial_\mu C) \quad (12.36)$$

alakú szellemtaggal kell kiegészíteni. A továbbiakban kovariáns mértéket fogunk használni.

Mivel a partíciós függvény által leírt fizikai tartalom független a $c(x)$ függvény önkényes megválasztásától, szabad a

$$\exp \left\{ -\frac{1}{2\rho} \int_0^\beta d\tau \int d^3x c^2(x) \right\} \quad (12.37)$$

tényezővel szorozni és az összes periodikus $c(x)$ függvényre integrálni. (Itt $0 < \rho \leq 1$ valós állandó. Különböző értékei a kovariáns mérték különböző eseteinek felelnek meg.) Ez eltünteti a Dirac-delta funkcionált a partíciós függvényből, azonban megjelenik az exponensben egy további tag:

$$\int [dc] \exp \left\{ -\frac{1}{2} \int_0^\beta d\tau \int d^3x c^2 \right\} \delta[\partial_\mu A_\mu - c] = \quad (12.38)$$

$$\exp \left\{ -\int_0^\beta d\tau \int d^3x \frac{1}{2\rho} (\partial_\mu A_\mu)^2 \right\}. \quad (12.39)$$

Mindezeket összefoglalva, a partíciós függvény az

$$Z = \int_{\text{per}} [d\bar{C}][dC] \int_{\text{per}} [dA_\mu] \exp(-S_{\text{eff}}) \quad (12.40)$$

alakba írható, ahol bevezettük az S_{eff} effektív euklideszi hatást:

$$S_{\text{eff}} = -\int_0^\beta d\tau \int d^3x \left[-\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F_{\mu\nu} - \frac{1}{2\rho} (\partial_\mu A_\mu)^2 + (\partial_\mu \bar{C})(\partial_\mu C) \right]. \quad (12.41)$$

A $\rho = 1$ választást Feynman-mértéknek nevezik. Bár a szellemterek nem csatolódnak $U(1)$ lokális mértékelméletben a vektorpotenciál-mezőhöz, járuláruk a hatásból nem hagyható el, mert a partíciós függvénynek megváltoztatják a hőmérséklet-függését, mint ezt alább látni fogjuk. Ez különbség a zérus-hőmérsékleti kvantumelektrodinamikához képest, amikor a szellemterek lecsatolódnak a fizikai folyamatok átmeneti amplitúdóiról.

13 A feketetest sugárzás

Megmutatjuk, hogy az elektromágneses térnek az előző fejezetben bevezetett partíciós függvénye helyesen írja le a feketetest sugárzást. Annak illusztrálására, hogy Z és a fizikai következtetések invariánsak a mérték rögzítésének módjával szemben, a feketetest sugárzás képleteit levezetjük **A**) axiális és **B**) Feynman-féle mértékben.

A) Axiális mértékről akkor beszélünk, ha az $A_3 = 0$ mértékfeltételt használjuk. Ekkor a partíciós függvény:

$$Z = \int_{\text{per}} [dA_\mu] \delta[A_3] \det \left(\frac{\delta A_3^\omega(x)}{\delta \omega(y)} \right) |_{\omega=0} e^{-S_E}$$

$$= \int_{\text{per}} [dA_0][dA_1][dA_2] \det(-\partial_3) e^{-S_E}, \quad (13.1)$$

ahol felhasználtuk, hogy

$$A_3^\omega = A_3 - \partial_3 \omega, \quad (13.2)$$

és ebből következően

$$\frac{\delta A_3^\omega(x)}{\delta \omega(y)} = -\partial_3 \delta(x - y). \quad (13.3)$$

Az euklideszi hatás negatívja axiális mértékben:

$$\begin{aligned} -S_0 &= -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F_{\mu\nu} |_{A_3=0} \\ &= -\frac{1}{2} (\partial_1 A_0 - \partial_\tau A_1)^2 - \frac{1}{2} (\partial_2 A_0 - \partial_\tau A_2)^2 - \frac{1}{2} (\partial_3 A_0)^2 \\ &\quad - \frac{1}{2} (\partial_3 A_2)^2 - \frac{1}{2} (\partial_3 A_1)^2 - \frac{1}{2} (\partial_1 A_2 - \partial_2 A_1)^2 \\ &= \frac{1}{2} (A_0, A_1, A_2) \mathcal{D}_0^{-1} \begin{pmatrix} A_0 \\ A_1 \\ A_2 \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (13.4)$$

ahol bevezettük a

$$\mathcal{D}_0^{-1} = \begin{pmatrix} \nabla^2 & -\partial_1 \partial_2 & -\partial_2 \partial_\tau \\ -\partial_1 \partial_\tau & \partial_2^2 + \partial_3^2 + \partial_\tau^2 & -\partial_1 \partial_2 \\ -\partial_2 \partial_\tau & -\partial_1 \partial_2 & \partial_1^2 + \partial_3^2 + \partial_\tau^2 \end{pmatrix} \quad (13.5)$$

mátrixot.

A vektorpotenciált Fourier-sor alakjában állítjuk elő:

$$A_\mu = \left(\frac{\beta}{V} \right)^{1/2} \sum_{np} A_{n\mu}(\vec{p}) \exp\{i(\vec{p}\vec{x} + \omega_n \tau)\}. \quad (13.6)$$

A partíciós függvényben fellépő determináns most is szellemterek Gauss-integráljaként fejezzük ki. A szellemtereket is Fourier-sorral állítjuk elő:

$$C = \left(\frac{\beta}{V} \right)^{1/2} \sum_{mq} C_m(\vec{q}) \exp\{i(\vec{q}\vec{x} + \omega_m \tau)\}. \quad (13.7)$$

A vektorpotenciál és a szellemterek Fourier-frekvenciái bozonikus Matsubara-frekvenciák, $\omega_n = 2\pi nT$ és $\omega_m = 2\pi mT$, ahol n és m tetszőleges egész. Helyettesítsük be a

Fourier-sorokat a partíciós függvény képletébe:

$$\begin{aligned}
Z &= \int \prod_{np} dA_{0n}(\vec{p}) dA_{1n}(\vec{p}) dA_{2n}(\vec{p}) \prod_{mq} d\bar{C}_m(\vec{q}) dC_m(\vec{q}) \\
&\quad \cdot \exp \left\{ \frac{1}{2} \sum_{np} (A_{0n}(\vec{p}), A_{1n}(\vec{p}), A_{2n}(\vec{p})) \beta^2 \mathcal{D}_0^{-1}(\omega_n, \vec{p}) \begin{pmatrix} A_{0n}(\vec{p}) \\ A_{1n}(\vec{p}) \\ A_{2n}(\vec{p}) \end{pmatrix} \right. \\
&\quad \left. - \sum_{mq} \bar{C}_m(\vec{q}) \beta q_3 C_m(\vec{q}) \right\} \\
&= [\det \beta^2 \mathcal{D}_0^{-1}(\omega_n, \vec{p})]^{-1/2} \det(-\beta q_3). \tag{13.8}
\end{aligned}$$

Képezzük a partíciós függvény logaritmusát:

$$\begin{aligned}
\ln Z &= \ln \det(\beta q_3) - \frac{1}{2} \ln \det \beta^2 \mathcal{D}_0^{-1}(\omega_n, \vec{p}) \\
&= \frac{1}{2} \text{Tr}_q \ln(\beta q_3)^2 - \frac{1}{2} \text{Tr}_p \ln(\det_4 D(\omega_n, \vec{p})). \tag{13.9}
\end{aligned}$$

Elemi algebrai átalakítással adódik, hogy a 4×4 -es blokkmátrixok determinánsai

$$\det_4 D(\omega_n, \vec{p}) = \tag{13.10}$$

$$\begin{aligned}
&\det \left\{ \beta^2 \begin{pmatrix} \vec{p}^2 & -p_1 \omega_n & -p_2 \omega_n \\ -p_1 \omega_n & p_2^2 + p_3^2 + \omega_n^2 & -p_1 p_2 \\ -p_2 \omega_n & -p_1 p_2 & p_1^2 + p_3^2 + \omega_n^2 \end{pmatrix} \right\} \\
&= \beta^6 p_3^2 (\omega_n^2 + \vec{p}^2)^2. \tag{13.11}
\end{aligned}$$

Ezt felhasználva,

$$-\frac{1}{2} \text{Tr}_p \ln \det_4 D(\omega_n, \vec{p}) = \ln \left(\prod_{np} \beta^{-3} p_3^{-1} (\omega_n^2 + \vec{p}^2)^{-1} \right), \tag{13.12}$$

és a partíciós függvény logaritmusára a következő kifejezést kapjuk:

$$\begin{aligned}
\ln Z &= \ln \prod_{np} \frac{\beta p_3}{\beta^3 p_3 (\omega_n^2 + \vec{p}^2)} \\
&= \ln \prod_{np} (\beta^{-2} (\omega_n^2 + \vec{p}^2)^{-1}) \\
&= 2V \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \left[-\frac{1}{2} \beta \omega - \ln(1 - e^{-\beta \omega}) \right] + \text{const.}, \tag{13.13}
\end{aligned}$$

ahol $\omega = |\vec{p}|$, mert a fotonok nyugalmi tömege zérus. A harmadik egyenlőség felírásakor felhasználtuk a (??) és a (2.43) képleteket.

B) Most megmutatjuk, hogy ugyanezt az eredményt kapjuk, ha a Feynman-mértéket használjuk, amely a kovariáns mérték $\rho = 1$ esete. Az effektív Lagrange-sűrűség negatívja kovariáns mértékben:

$$\begin{aligned} -\mathcal{L}_{\text{eff}} &= \frac{1}{2}A_i\partial_\tau^2 A_i + \frac{1}{2\rho}A_0\partial_\tau^2 A_0 + \frac{1}{2}A_\mu\nabla^2 A_\mu \\ &\quad + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\rho} - 1\right)\left[A_0\partial_\tau\vec{\nabla}\vec{A} + \vec{A}\partial_\tau\vec{\nabla}A_0 + (\vec{A}\vec{\nabla})(\vec{\nabla}\vec{A})\right] \\ &\quad + \bar{C}(\partial_\tau^2 + \nabla^2)C \end{aligned} \quad (13.14)$$

Az effektív hatás negatívja a térmennyiségek Fourier-sorának behelyettesítése után:

$$\begin{aligned} -S_{\text{eff}} &= -\int_0^\beta d\tau \int d^3x \mathcal{L}_{\text{eff}} \\ &= \beta^2 \sum_{np} \left\{ -\frac{1}{2}A_{in}(\vec{p})\omega_n^2 A_{in}(\vec{p}) - \frac{1}{2\rho}A_{0n}(\vec{p})\omega_n^2 A_{0n}(\vec{p}) - \frac{1}{2\rho}A_{\mu n}(\vec{p})\vec{p}^2 A_{\mu n}(\vec{p}) \right. \\ &\quad - \frac{1-\rho}{\rho}A_{0n}(\vec{p})\omega_n p_i A_{in}(\vec{p}) - \frac{1-\rho}{2\rho}A_{in}(\vec{p})p_i p_j A_{jn}(\vec{p}) \\ &\quad \left. + \bar{C}_{np}(\omega_n^2 + p^2)C_{np} \right\} \end{aligned} \quad (13.15)$$

Ez a Feynman-mértékben

$$-S_{\text{eff}} = \sum_{np} \left\{ -\frac{1}{2}\beta^2(\omega_n^2 + \omega^2)A_{\mu n}^2(\vec{p}) + \beta^2(\omega_n^2 + \omega^2)\bar{C}_n(\vec{p})C_n(\vec{p}) \right\} \quad (13.16)$$

alakot ölt. A partíciós függvény így Feynman-mértékben:

$$\begin{aligned} Z &= \prod_{np\mu} \int dA_{n\mu}(\vec{p}) \exp \left\{ -\frac{1}{2}\beta^2(\omega_n^2 + \omega^2)A_{n\mu}^2(\vec{p}) \right\} \\ &\quad \cdot \prod_{np} \int d\bar{C}_n(\vec{p}) dC_n(\vec{p}) \exp \left\{ \beta^2(\omega_n^2 + \omega^2)\bar{C}_n(\vec{p})C_n(\vec{p}) \right\}. \end{aligned} \quad (13.17)$$

A 2. és az 5. fejezet eredményeit felhasználva kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} \ln Z &= 4 \sum_{np} \ln \left[\beta^2(\omega_n^2 + \vec{p}^2) \right]^{-1/2} + 2 \sum_{np} \ln \left[\beta^2(\omega_n^2 + \vec{p}^2) \right]^{1/2} \\ &= - \sum_{np} \ln \left[\beta^2(\omega_n^2 + \vec{p}^2) \right]. \end{aligned} \quad (13.18)$$

Ez ugyanaz az eredmény, mint amit axiális mértékben kaptunk. Most jól látszik a szellemterek szerepe. Azok éppen kiejtik a vektorpotenciáltér két szabadsági fokát a partíciós függvényben. Ez megfelel annak, hogy az elektromágneses tér transzverzális. Abból, hogy a foton (renormálatlan) nyugalmi tömege zérus, következik, hogy a hatás mértékinvariáns és ebből, hogy csak a transzverzális szabadsági fokok

fizikaiak. Mértéktranszformáció során $A_{n\mu}(\vec{k}) \rightarrow A_{n\mu}(\vec{k}) + k_\mu f_n(\vec{k})$, s így csak a vektorpotenciál transzverzális ($\vec{k}$ -ra merőleges) komponensei maradnak változatlanok, vis. csak ezek fizikaiak. Másrészt a szellemterek is a mértékinvariancia miatt vezethetők be, és – mint látjuk – szerepük éppen az, hogy a partíciós függvényből kiejtsék a nem fizikai szabadsági fokok járulékát. A második fejezet eredményeit felhasználva rögtön írhatjuk, hogy

$$\ln Z = 2V\beta \frac{\pi^2}{90} T^4, \quad (13.19)$$

ahonnan deriválással kapjuk a sugárzási tér energiáját

$$E = V \frac{\pi^2}{15} T^4 \quad (13.20)$$

és nyomását

$$P = \frac{\pi^2}{45} T^4. \quad (13.21)$$

Ezek az elektromágneses sugárzási tér kvantummechanikából és statisztikus fizikából jól ismert képletei. A bevezetett partíciós függvény tehát a kölcsönhatás mentes elektromágneses teret helyesen írja le. Ezért azt fogjuk tovább általánosítani a kvantumelektrodinamika és a nem-ábeli mértékelméletek esetére.

14 Kvantumelektrodinamika

A kvantumelektrodinamika partíciós függvényéhez úgy jutunk, hogy az elektromágneses teret leíró hatást kiegészítjük a szabad elektronteret és az elektromágneses tér és az elektronter közötti kölcsönhatást leíró hatástagokkal:

$$S = S_0 + S_I, \quad (14.1)$$

ahol

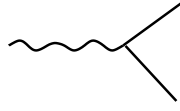
$$S_0 = S_{\text{eff}} + \int_0^\beta d\tau \int d^3x \bar{\psi} (-\gamma^0 \partial_\tau + i\vec{\gamma} \vec{\nabla} - m + \mu\gamma^0) \psi, \quad (14.2)$$

a hatás szabad terektől származó tagja és

$$S_I = \int_0^\beta d\tau \int d^3x (-e\bar{\psi} \not{A} \psi) \quad (14.3)$$

írja le a kölcsönhatást;

$$\not{A} = \gamma^0 iA_0 - \vec{\gamma} \vec{A}. \quad (14.4)$$



3. Vertex:

$$\rightarrow -e\gamma^\mu. \quad (14.12)$$

4. Zárt fermionhurok mentén a spinorindexekre a haladás sorrendjében spurképzés van.

5. A vertex és a befutó fotonpropagátor egyik Lorentz-indexét kontraháljuk.

6. Minden diagrammnak megfelelő képletben fellép egy βV tényező.

7. Minden zárt fermionhurok egy (-1) tényezőt hoz be.

8. Az egyes diagrammokhoz tartozó kombinatorikai faktorok azon $1/2$ szorzókból adódnak ki, amelyek minden olyan esetben fellépnek, ha két rögzített vertex között legalább két fermionvonal teremt összeköttetést (lehet még egy harmadik fotonvonal is). Ugyancsak $1/2$ faktor jelenik meg minden egy adott vertexből kiinduló és oda visszatérő fermionvonallal kapcsolatban. Az elmondottakban csak olyan eseteket kell nézni, amikor a fermionvonalak mentén nincsenek az említetteken kívül más vertexek. A továbbiakban a diagramok mellett explicit módon kiírjuk a 7. és 8. pontban említett faktorokat, úgyhogy azokat nem kell még egyszer figyelembe venni, amikor képleteket feleltetünk meg a diagramoknak.

A partíciós függvény legalacsonyabb rendű el nem tűnő járuléka:

$$\ln Z_2 = -\frac{1}{2} \text{ (diagram: circle with wavy line) } + \frac{1}{4} \text{ (diagram: two circles connected by wavy line) } \quad (14.13)$$

A következő járulék negyedrendű:

$$\begin{aligned} \ln Z_4 = & - \text{ (diagram: circle with wavy line and fermion loop) } - \text{ (diagram: circle with wavy line and fermion loop) } + \frac{1}{4} \text{ (diagram: two circles connected by wavy line) } \\ & + \frac{1}{2} \text{ (diagram: circle with wavy line and fermion loop) } - \frac{1}{8} \text{ (diagram: two circles connected by wavy line) } \end{aligned} \quad (14.14)$$

Könnyen beláthatjuk Furry tételét, hogy a "békalencsét" tartalmazó diagrammok járuléka zérus:

$$= 0$$

(14.15)

A spúrképzés során csak a gamma-mátrixokban kvadratikusan tag nem tűnik el. Ez azonban az impulzusban lineáris, s így az impulzustérre történő integráláskor ad zérust.

A szabad fermion-propagátor inverze

$$\mathcal{G}_0 = (\not{k} - m)^{-1} = C(\not{k} + m) = -\frac{\not{k} + m}{k^2 + m^2}, \quad (14.16)$$

ahol a C kifejezést a

$$1 = C(\not{k} + m)(\not{k} - m) = k_0^2 - \vec{k}^2 = -(\omega_n + i\mu)^2 - \vec{k}^2 - m^2 = -(k^2 + m^2) \quad (14.17)$$

egyenlet alapján határoztuk meg. A „békalencse” képlete:

$$-e\beta V \sum_n \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \text{tr}_{4 \times 4} \left(\gamma^\mu \frac{\not{k} + m}{k^2 + m^2} \right). \quad (14.18)$$

Itt $\text{tr} \gamma^\mu = 0$ és $\text{tr}(\gamma^\mu \gamma^\nu) = 4g^{\mu\nu}$, úgyhogy a számláló tömegtagja nem ad járulékot. Ugyanakkor a számláló másik tagja lineáris a k^ν impulzusban, s ezért $\sum_n \int d^3k k^\mu f(k_0^2 - \vec{k}^2) = 0$.

A tétel valójában általánosabban is igaz: minden olyan zárt fermionhurok járuléka zérus, amely mentén páratlan számú vertex helyezkedik el. Furry tétele miatt $\ln Z_2$ -höz csak az első diagram, $\ln Z_4$ -hez csak az első három diagram ad zérustól különböző járulékot.

15 A fotonpropagátor és a polarizációs tenzor

A szabad fotonpropagátor inverzét a

$$\mathcal{D}_0^{-1}{}_{\mu\nu} = -p^2 \left(\delta_{\mu\nu} + \frac{1-\rho}{\rho} \frac{p_\mu p_\nu}{p^2} \right) \quad (15.1)$$

összefüggéssel definiáltuk euklideszi változóiban: $p^2 = p_4^2 + \vec{p}^2$, $p_4 = \omega_n = 2\pi nT$. A fotonpropagátort ezek után

$$\mathcal{D}_0{}_{\mu\nu} = A \left(\delta_{\mu\nu} + B \frac{p_\mu p_\nu}{p^2} \right) \quad (15.2)$$

alakban keressük. Felhasználva, hogy tetszőleges p_μ euklideszi impulzus esetén:

$$\mathcal{D}_0^{-1}{}_{\mu\nu} \mathcal{D}_0{}_{\nu\kappa} = \delta_{\mu\kappa}, \quad (15.3)$$

adódik, hogy $A = -1/p^2$, $B = -(1 - \rho)$ és

$$\mathcal{D}_{0\mu\nu} = -\frac{1}{p^2} \left(\delta_{\mu\nu} - (1 - \rho) \frac{p_\mu p_\nu}{p^2} \right). \quad (15.4)$$

Minkowski-vátozókban a megfelelő összefüggést a $p_0 = i\omega_n$ bevezetésével kapjuk:

$$\mathcal{D}_{0\mu\nu} = \frac{1}{p^2} \left(g_{\mu\nu} + (1 - \rho) \frac{p_\mu p_\nu}{p^2} \right), \quad (15.5)$$

ahol most $p^2 = p_0^2 - \vec{p}^2 = -(\omega_n^2 + \vec{p}^2)$.

A teljes fotonpropagátort a következőképpen definiáljuk:

$$\mathcal{D}_{\mu\nu}(\vec{x}_1, \tau_1; \vec{x}_2, \tau_2) = \langle A_\mu(\vec{x}_1, \tau_1) A_\nu(\vec{x}_2, \tau_2) \rangle, \quad (15.6)$$

ahol az átlagot a kölcsönható rendszer makrokanonikus sokasága szerint képezzük. Ennek Fourier-transzformáltja

$$\mathcal{D}_{\mu\nu}(\omega_n, \vec{p}) = \beta^2 \langle A_{\mu n}(\vec{p}) A_{\nu -n}(-\vec{p}) \rangle, \quad (15.7)$$

ahol felhasználtuk, hogy a fotonpropagátor csak $\tau_1 - \tau_2$ és $\vec{x}_1 - \vec{x}_2$ függvénye (eltolási invariancia), valamint behelyettesítettük a vektorpotenciál Fourier-sorát.

Hasonló kapcsolat áll fenn a fotonpropagátor és a kvantumelektrodinamika partíciós függvénye között, mint skalártér esetén a propagátor és a partíciós függvény között. Ezt megkaphatjuk, ha észrevevessük, hogy a partíciós függvénynek a szabad fotonpropagátort tartalmazó részében az exponens (ld. 14. fejezet)

$$-\frac{1}{2} \beta^2 \sum_{np} (\mathcal{D}_0^{-1})_{\mu\nu}(\omega_n, \vec{p}) A_{\mu n}(\vec{p}) A_{\nu n}^*(\vec{p}). \quad (15.8)$$

Ebből következik, hogy

$$\begin{aligned} \frac{\delta \ln Z}{\delta \mathcal{D}_{0\mu\nu}^{-1}} &= -\frac{1}{2Z} \beta^2 \int [dA] A_{\mu n}(\vec{p}) A_{\nu n}^*(\vec{p}) e^S \\ &= -\frac{1}{2} \mathcal{D}_{\mu\nu}. \end{aligned} \quad (15.9)$$

A szabad propagátor és az inverze közötti kapcsolatot variálva

$$\delta \mathcal{D}_{0\mu\kappa} (\mathcal{D}_0^{-1})_{\kappa\nu} = -\mathcal{D}_{0\mu\kappa} \delta (\mathcal{D}_0^{-1})_{\kappa\nu} \quad (15.10)$$

adódik, ahonnan

$$\delta (\mathcal{D}_0^{-1})_{\lambda\nu} = -(\mathcal{D}_0^{-1})_{\lambda\mu} \delta \mathcal{D}_{0\mu\kappa} (\mathcal{D}_0^{-1})_{\kappa\nu}. \quad (15.11)$$

Ezt felhasználva,

$$\delta \ln Z = \frac{1}{2} \sum_{np} (\mathcal{D}_0^{-1})_{\lambda\mu} \delta \mathcal{D}_{0\mu\kappa} (\mathcal{D}_0^{-1})_{\kappa\nu} \mathcal{D}_{\lambda\nu}, \quad (15.12)$$

ahonnan

$$\frac{\delta \ln Z}{\delta \mathcal{D}_{0\mu\kappa}} = \frac{1}{2} \mathcal{D}_{0\lambda\mu}^{-1} \mathcal{D}_{0\kappa\nu}^{-1} \mathcal{D}_{\lambda\nu} = -\mathcal{D}_{0\lambda\mu}^{-1} \mathcal{D}_{0\kappa\nu}^{-1} \frac{\delta \ln Z}{\delta \mathcal{D}_{0\lambda\nu}}, \quad (15.13)$$

és a teljes fotonpropagátor:

$$\begin{aligned} \frac{\delta \ln Z}{\delta \mathcal{D}_{0\lambda\nu}^{-1}} &= -\mathcal{D}_{0\lambda\mu} \frac{\delta \ln Z}{\delta \mathcal{D}_{0\mu\kappa}} \mathcal{D}_{0\kappa\nu}, \\ \mathcal{D}_{\mu\nu} &= -2 \frac{\delta \ln Z}{\delta \mathcal{D}_{0\mu\nu}^{-1}} = 2 \mathcal{D}_{0\mu\kappa} \frac{\delta \ln Z}{\delta \mathcal{D}_{0\kappa\lambda}} \mathcal{D}_{0\lambda\nu}. \end{aligned} \quad (15.14)$$

Ez a 8.fejezetben skalártérre levezetett összefüggés analogonja.

Ugyancsak a skalártér esetéhez analóg módon a ftonsajátenergiát az

$$\Pi_{\mu\nu} = (\mathcal{D}^{-1})_{\mu\nu} - (\mathcal{D}_0^{-1})_{\mu\nu} \quad (15.15)$$

összefüggéssel definiáljuk. Ezt szokás polarizációnak is nevezni tekintve, hogy a vákuumpolarizációval kapcsolatos; elektron-pozitron pár virtuális keletkezését és szétsugárzását írja le. A lényeges különbség a skalártér sajátenergiájával szemben az, hogy a foton sajátenergiája Lorentz-tenzor. Ráadásul nem is mértékinvariáns. Tekintve, hogy a partíciós függvény perturbációs sora e^2 szerint halad, a polarizáció is e^2 szerinti perturbációs sorral állítható elő:

$$\Pi = \sum_{\ell=1}^{\infty} \Pi_{2\ell}, \quad (15.16)$$

ahol $\Pi_{2\ell} \sim e^{2\ell}$ rendű. (Elhagytuk a tenzorindexeket.) Így a kölcsönhatásban negyedrendű tagokkal bezárólag:

$$\begin{aligned} \mathcal{D} &= (\mathcal{D}_0^{-1} + \Pi)^{-1} \\ &= (1 + \mathcal{D}_0 \Pi)^{-1} \mathcal{D}_0 \\ &= \mathcal{D}_0 - \mathcal{D}_0 \Pi_2 \mathcal{D}_0 - \mathcal{D}_0 \Pi_4 \mathcal{D}_0 - \dots + \mathcal{D}_0 \Pi_2 \mathcal{D}_0 \Pi_2 \mathcal{D}_0 + \dots \end{aligned} \quad (15.17)$$

Másrészt a partíciós függvény segítségével írhatjuk, hogy

$$\mathcal{D} = \mathcal{D}_0 + 2\mathcal{D}_0 \sum_{\ell=1}^{\infty} \frac{\delta \ln Z_{2\ell}}{\delta \mathcal{D}_0} \mathcal{D}_0. \quad (15.18)$$

Ezt összehasonlítva az előző sorral, kapjuk a polarizáció különböző rendű tagjait:

$$\Pi_2 = -2 \frac{\delta \ln Z_2}{\delta \mathcal{D}_0} \quad (15.19)$$

$$\Pi_4 = -2 \frac{\delta \ln Z_4}{\delta \mathcal{D}_0} + \Pi_2 \mathcal{D}_0 \Pi_2 \quad (15.20)$$

$$\begin{aligned}
&= \text{diagram with a circle and two wavy lines} \\
&= 4 \text{diagram with a circle, a wavy line, and a loop} + 4 \text{diagram with a circle, a wavy line, and a loop} \\
&- \text{diagram with two circles and two wavy lines} \\
&+ \text{diagram with two circles and two wavy lines}
\end{aligned}$$

Itt felhasználtuk, hogy a funkcionálderivált kétszerese a zárt diagramm egy fotonvonalának megszakításával ábrázolható (hasonlóan mint skalártér esetén) és az utolsó egyenlőségben a 2-es faktorok azért lépnek fel, mert két fotonvonal is megszakítható. Látjuk, hogy a nem egy foton irreducibilis diagrammok Π_4 -ben kiejtik egymást. Ez hasonlóan megtörténik a magasabb rendekben is. Végül tehát a polarizációs tenzor és a partíciós függvény közötti összefüggés:

$$\Pi_{\mu\nu} = - \left(2 \frac{\delta \ln Z_I}{\delta \mathcal{D}_{0\mu\nu}} \right)_{\text{1PI}}. \quad (15.21)$$

16 A Ward-Takahashi azonosság

A fotonpropagátor tulajdonságait fogjuk először vizsgálni. A szabad fotonpropagátor kielégíti az alábbi azonosságot, ami a definíció alapján közvetlenül belátható:

$$k_\mu \mathcal{D}_{0\mu\nu}(\omega_n, \vec{k}) = -\rho k_\nu / k^2. \quad (16.1)$$

A teljes fotonpropagátor is kielégíti ezt az azonosságot, ami az alábbi Ward-Takahashi azonosság következménye:

$$k_\mu \mathcal{D}_{0\mu\nu}(\omega_n, \vec{k}) = k_\mu \mathcal{D}_{\mu\nu}(\omega_n, \vec{k}). \quad (16.2)$$

Ez az azonosság a következőképpen látható be. Egészítsük ki a partíciós függvényben szereplő hatást külső forrástagokkal:

$$\begin{aligned}
Z[\bar{\eta}, \eta, J] &= \int [d\bar{\psi}][d\psi][dA][d\bar{C}][dC] \\
&\exp \left\{ -S + \int_0^\beta d\tau \int d^3x (\bar{\eta}\psi + \bar{\psi}\eta + J_\mu A_\mu) \right\}
\end{aligned} \quad (16.3)$$

Tekintsünk egy $\omega(x)$ paraméterű infinitezimális mértéktranszformációt:

$$\begin{aligned}\psi &\rightarrow \psi e^{i\omega}, & \bar{\psi} &\rightarrow \bar{\psi} e^{-i\omega}, \\ A_\mu &\rightarrow A_\mu + \partial_\mu \omega, & C &\rightarrow C, & \bar{C} &\rightarrow \bar{C}.\end{aligned}\quad (16.4)$$

Az útintegrálban használt integrálási mérték mértékinvariáns. Ezért a partíciós függvény megváltozása infinitezimális mértéktranszformáció során a hatás

$$\begin{aligned}\int_0^\beta d\tau \int d^3x &\quad \left[-\frac{1}{2\rho} \delta(\partial_\mu A_\mu)^2 + \bar{\eta} \delta\psi + \delta\bar{\psi} \eta + J_\mu \delta A_\mu \right] \\ &= \int_0^\beta \int d^3x \left[-\frac{1}{\rho} (\partial_\mu A_\mu) (\partial_\nu \partial_\nu \omega) + i\omega \bar{\eta} \psi - i\omega \bar{\psi} \eta + J_\mu \partial_\mu \omega \right] \\ &= \int_0^\beta \int d^3x \left[\frac{1}{\rho} (\partial_\nu \partial_\nu) (\partial_\mu A_\mu) + i\bar{\eta} \psi - i\bar{\psi} \eta - \partial_\mu J_\mu \right] \omega\end{aligned}\quad (16.5)$$

megváltozásából származik. Másrészt viszont a partíciós függvény mértékinvariáns, úgyhogy

$$\begin{aligned}0 &= \frac{\delta Z}{\delta \omega(x)} = \int [d\bar{\psi}][d\psi][dA][d\bar{C}][dC] \\ &\quad \exp \left\{ -S + \int_0^\beta d\tau \int d^3x (\bar{\eta} \psi + \bar{\psi} \eta + J_\mu A_\mu) \right\} \\ &\quad \left[\frac{1}{\rho} (\partial_\nu \partial_\nu) (\partial_\mu A_\mu) + i\bar{\eta} \psi - i\bar{\psi} \eta - \partial_\mu J_\mu \right].\end{aligned}\quad (16.6)$$

Ez az egyenlőség generálja a Ward-Takahashi-azonosságokat. Utóbbiak közül csak egyet fogunk most belátni, amelyet a fejezet elején emlegettünk. Ebből a célból deriváljuk a generáló azonosságot $J_\kappa(y)$ szerint, majd tegyük zérussá a külső forrásokat:

$$\begin{aligned}0 &= \int [d\bar{\psi}][d\psi][dA][d\bar{C}][dC] \\ &\quad \exp \{ -S \} \left[\frac{1}{\rho} (\partial_\nu \partial_\nu)_x (\partial_\mu A_\mu(x)) A_\kappa(y) - (\partial_\kappa)_x \delta(x-y) \right].\end{aligned}\quad (16.7)$$

Innen

$$0 = -(\partial_\nu \partial_\nu)_x (\partial_\mu)_x \langle A_\mu(x) A_\kappa(y) \rangle + \rho (\partial_\kappa)_x \delta(x-y) \quad (16.8)$$

adódik, amit Fourier-transzformálva kapjuk a kívánt azonosságot:

$$k^2 k_\mu \mathcal{D}_{\mu\kappa}(\omega_n, \vec{k}) + \rho p_\kappa = 0, \quad (16.9)$$

azaz

$$k_\mu \mathcal{D}_{\mu\kappa}(\omega_n, \vec{k}) = -\frac{\rho k_\kappa}{k^2} = k_\mu \mathcal{D}_{0\mu\kappa}. \quad (16.10)$$

Csak megjegyezzük, hogy magasabb rendű parciális deriváltakat képezve, valamint a fermionterek forrásai szerint deriválva a generáló azonosságot, további azonosságokat nyerhetünk a Green-függvényekre.

A fenti azonosság következménye, hogy

$$k_\mu k_\nu \mathcal{D}_{\mu\nu} = -\rho. \quad (16.11)$$

A fentieket felhasználva belátjuk, hogy a polarizáció transzverzális:

$$k_\mu \Pi_{\mu\nu} = 0. \quad (16.12)$$

Tekintsük a fotonpropagátorra vonatkozó

$$\mathcal{D}_{\mu\nu} = \mathcal{D}_{0\mu\nu} + \mathcal{D}_{0\mu\kappa} \Pi_{\kappa\lambda} \mathcal{D}_{\lambda\nu} \quad (16.13)$$

egyenletet és szorozzuk meg k_μ -vel. A Ward-Takahashi azonosságot figyelembe véve

$$k_\mu \mathcal{D}_{0\mu\kappa} \Pi_{\kappa\lambda} \mathcal{D}_{\lambda\nu} = 0, \quad (16.14)$$

azaz

$$\rho \frac{k_\kappa}{k^2} \Pi_{\kappa\lambda} \mathcal{D}_{\lambda\nu} = 0, \quad (16.15)$$

adódik, ahonnan kapjuk a bizonyítani kívánt azonosságot.

A továbbiakban meghatározzuk a propagátor és a polarizáció tenzorszerkezetét. Vezessük be a k_μ -re négydimenziós értelemben ortogonális altér

$$\delta^{\mu\nu} - \frac{k^\mu k^\nu}{k^2} \quad (16.16)$$

projektorát, valamint ebben a háromdimenziós altérben a $\vec{k}$ -ra merőleges altér $P_{T\mu\nu}$ projektorát és a $\vec{k}$ irányú egy-dimenziós altér $P_{L\mu\nu}$ projektorát:

$$P_{T00} = P_{T0i} = P_{T i0} = 0, \quad P_{Tij} = \delta_{ij} - \frac{k_i k_j}{\vec{k}^2}, \quad (16.17)$$

$$P_{L\mu\nu} = \delta_{\mu\nu} - \frac{k_\mu k_\nu}{k^2} - P_{T\mu\nu}. \quad (16.18)$$

Elemi számolással láthatók be a következő tulajdonságok:

$$P_{L\mu\kappa} P_{L\kappa\nu} = P_{L\mu\nu}, \quad P_{T\mu\kappa} P_{T\kappa\nu} = P_{T\mu\nu}, \quad (16.19)$$

$$P_{Tik} P_{Tkj} = P_{Tij}, \quad P_{L\mu\nu} P_{T\mu\nu} = 0, \quad (16.20)$$

$$k_\mu P_{T\mu\nu} = k_\mu P_{L\mu\nu} = 0, \quad k_i P_{Tij} = 0, \quad (16.21)$$

$$P_{T\mu\mu} = P_{Tii} = 3 - 1 = 2 \quad P_{L\mu\mu} = 4 - 1 - P_{T\mu\mu} = 1. \quad (16.22)$$

Mivel $\Pi_{\mu\nu}$ ortogonális a k_μ euklideszi vektorra, azért teljesen általánosan

$$\Pi_{\mu\nu} = G P_{T\mu\nu} + F P_{L\mu\nu} \quad (16.23)$$

írható. A $T = 0$ hőmérsékletű vákuum esetén a rendszer Lorentz-invariáns, azaz

$$\Pi_{\mu\nu} \sim \delta_{\mu\nu} - \frac{k_\mu k_\nu}{k^2} \quad (16.24)$$

ami azt jelenti, hogy ekkor $F(k^2) = G(k^2)$. Véges hőmérsékletű és kémiai potenciálú közegben a Lorentz-invariancia megsérül. Ha $u = (1, 0, 0, 0)$ jelöli a közeg négyessebességét a közeg nyugalmi rendszerében, akkor a nyugalmi rendszerben F és G függhet $ku = k_0$ -tól és $|\vec{k}|$ -től és két független függvény. Megmutatjuk, hogy ilyenkor a polarizációnak két független komponense van, Π_{00} és Π_{ii} . Egyrészt

$$\Pi_{00} = GP_{T\ 00} + FP_{L\ 00} = F \frac{\vec{k}^2}{k^2}, \quad (16.25)$$

ahonnan

$$F = \frac{k^2}{\vec{k}^2} \Pi_{00}, \quad (16.26)$$

másrészt

$$\Pi_{ii} = GP_{T\ ii} + FP_{L\ ii} = 2G + \frac{\omega_n^2}{\vec{k}^2} \Pi_{00}, \quad (16.27)$$

ahonnan

$$G = \frac{1}{2} \left(\Pi_{ii} - \frac{\omega_n^2}{\vec{k}^2} \Pi_{00} \right). \quad (16.28)$$

Végezetül kifejezzük a fotonpropagátort a transzverzális és longitudinális projekció tenzoraival:

$$(\mathcal{D}^{-1})_{\mu\nu} = AP_{T\ \mu\nu} + BP_{L\ \mu\nu} + C \frac{k_\mu k_\nu}{k^2}. \quad (16.29)$$

A szabad fotonpropagátort az

$$A = B = -k^2, \quad C = \frac{-k^2}{\rho} \quad (16.30)$$

választással kapjuk. A polarizációs tenzor definícióját és tenzorszerkezetét felhasználva a

$$\begin{aligned} (\mathcal{D}^{-1})_{\mu\nu} - (\mathcal{D}_0^{-1})_{\mu\nu} &= (A + k^2)P_{T\ \mu\nu} + (B + k^2)P_{L\ \mu\nu} + \left(C + \frac{k^2}{\rho} \right) \frac{k_\mu k_\nu}{k^2} \\ &= GP_{T\ \mu\nu} + FP_{L\ \mu\nu} \end{aligned} \quad (16.31)$$

azonosságra jutunk. Innen:

$$A = G - k^2, \quad B = F - k^2, \quad C = \frac{k^2}{\rho}. \quad (16.32)$$

A fotonpropagátor inverze tehát:

$$(\mathcal{D}^{-1})_{\mu\nu} = (G - k^2)P_{T\ \mu\nu} + (F - k^2)P_{L\ \mu\nu} - \frac{k_\mu k_\nu}{\rho}, \quad (16.33)$$

amelyet invertálva megkapjuk a fotonpropagátort:

$$\mathcal{D}_{\mu\nu} = \frac{1}{G - k^2} P_{T\ \mu\nu} + \frac{1}{F - k^2} P_{L\ \mu\nu} - \frac{\rho}{k^2} \frac{k_\mu k_\nu}{k^2}. \quad (16.34)$$

(A fenti eredmények egyensúlyi rendszerre vonatkoznak. Ha nincsen egyensúly a rendszerben és emiatt konvektív részecskeáramlás van, akkor a tenzorszerkezetben az anyag lokális nyugalmi rendszerének négyes-sebessége is fellép.)

17 A kvantumelektrodinamika partíciós függvényének kicserélődési korrekciója

A kvantumelektrodinamikában a partíciós függvény legalacsonyabb, másodrendű korrekciója:

$$\begin{aligned} \ln Z_2 &= -\frac{1}{2} \text{ (diagram: a circle with a wavy line inside) } \\ &= -\frac{1}{2} \beta V e^2 \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{d^3 q}{(2\pi)^3} \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} (2\pi)^3 \delta(\vec{p} - \vec{q} - \vec{k}) \\ &\quad \cdot T^3 \sum_{n_p n_q n_k} \beta \delta_{n_p, n_q + n_k} \text{Tr} \left[\gamma^\mu \frac{\not{p} + m}{p^2 - m^2} \frac{1}{k^2} g_{\mu\nu} \gamma^\nu \frac{\not{q} + m}{q^2 - m^2} \right]. \end{aligned} \quad (17.1)$$

Itt Feynman-mértéket ($\rho = 1$) és Minkowski-változókat használtunk: $p_0 = i(2n_p + 1)\pi T + \mu$, $q_0 = i(2n_q + 1)\pi T + \mu$ és $k_0 = i2n_k \pi T$. Az (17.1) kifejezést szokás kicserélődési korrekciónak nevezni, mert $T = 0$ esetén abból származik, hogy két, Fermi-tengerben levő részecske impulzust cserél.

A fenti korrekció kiszámításának főbb lépései a következők:

1. A spúr kiszámítása.
2. A Kronecker-deltát átírjuk integrálalakba és az integrálást elvégezve exponenciális függvényekkel fejezzük ki.
3. Egymástól függetlenül elvégezzük a frekvenciák szerinti összegzéseket a korábban megismert vonalintegrálok módszerével.
4. A kapott eredményben különválasztjuk a betöltési számokban kvadratikuss, lineáris és az azoktól független tagokat.

Mint majd látni fogjuk, az eredmény ultraibolya divergenciákat tartalmaz. A renormálást most is annak mintájára végezzük, ahogy a $\lambda\Phi^4$ elméletben tettük. Egyrészt a (17.1) kifejezésből elhagyjuk azokat a tagokat, amelyek a rendszer energiájához T -től és μ -tól független járulékot adnak, mert ezek a vákuum energiáját módosítják. Másrészt kivonjuk a kicserélődési diagrammból azokat a diagrammokat, amelyeket úgy kapunk belőle, hogy az egyes részecskevonalakon megjelenő sajátenergiás betétrészeket a $T \rightarrow 0$, $\mu \rightarrow 0$ limeszben vesszük:

$$\begin{aligned}
\ln Z_{2R} &= -\frac{1}{2} \left(\text{diagram 1} - 2 \text{diagram 2} - \text{diagram 3} \right) \\
&= \ln Z_2 + \ln Z_{2b} + \ln Z_{2c}.
\end{aligned} \tag{17.2}$$

Lássunk hát neki a fent leírt módon $\ln Z_2$ kiszámolásának.

1. Az

$$\text{Tr} \gamma^\mu \gamma^\nu = 4g^{\mu\nu} \tag{17.3}$$

$$\text{Tr} \gamma^\mu \gamma^\rho \gamma^\nu \gamma^\sigma = 4(g^{\mu\rho} g^{\nu\sigma} + g^{\mu\sigma} g^{\rho\nu} - g^{\mu\nu} g^{\rho\sigma}). \tag{17.4}$$

azonosságokat felhasználva kapjuk, hogy

$$\text{Tr} [\gamma^\mu (\not{p} + m) \gamma^\nu (\not{q} + m)] = 8(2m^2 - p \cdot q). \tag{17.5}$$

A $\vec{k}$ szerinti integrálás könnyen elvégezhető a hármas-impulzusokra vonatkozó delta-függvénynek köszönhetően:

$$\begin{aligned}
\ln Z_2 &= -\frac{1}{2} \beta V e^2 \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{d^3 q}{(2\pi)^3} \\
&\quad \cdot T^3 \sum_{n_p n_q n_k} \beta \delta_{n_p, n_q + n_k} \frac{8(2m^2 - p \cdot q)}{k^2 (p^2 - m^2)(q^2 - m^2)},
\end{aligned} \tag{17.6}$$

ahol $k^2 = k_0^2 - (\vec{p} - \vec{q})^2$.

2. Figyelembe véve, hogy p^0 , q^0 és k^0 diszkrét frekvenciák, s így

$$-\exp\{\beta(k^0 + q^0 - \mu)\} = 1, \tag{17.7}$$

a következő azonos átalakítást végezhetjük:

$$\begin{aligned}
\beta \delta_{n_p, n_q + n_k} &= -\exp\{\beta(k^0 + q^0 - \mu)\} \int_0^\beta d\theta \exp\{\theta(p^0 - q^0 - k^0)\} \\
&= \frac{\exp\{\beta(k^0 + q^0 - \mu)\} - \exp\{\beta(p^0 - \mu)\}}{p^0 - q^0 - k^0}.
\end{aligned} \tag{17.8}$$

Vezessük be az

$$I(p^0, q^0, k^0) = \frac{2m^2 - p \cdot q}{p^0 - q^0 - k^0} \left[\exp\{\beta(k^0 + q^0 - \mu)\} - \exp\{\beta(p^0 - \mu)\} \right] \tag{17.9}$$

jelölést. Segítségével $\ln Z_2$ az alábbi alakba írható:

$$\begin{aligned} \ln Z_2 = & -\frac{1}{2}\beta V e^2 \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{d^3 q}{(2\pi)^3} \\ & \cdot (8 T^3) \sum_{n_p n_q n_k} \frac{I(p^0, q^0, k^0)}{k^2(p^2 - m^2)(q^2 - m^2)}. \end{aligned} \quad (17.10)$$

3. A frekvenciákra történő kontúrintegrálos összegzés előnye, hogy az egyes összegek egymástól függetlenül elvégezhetők. Kezdjük az n_p szerinti összeggel. A (11.14) szabályt alkalmazzuk az

$$f(p^0) \rightarrow I(p^0)(p^2 - m^2)^{-1} \quad (17.11)$$

helyettesítéssel (egyszerűség kedvéért I -ben csak az összegzés szempontjából érdekes változót tüntettük fel):

$$\begin{aligned} T \sum_{n_p} \frac{I(p^0)}{p^2 - m^2} = & -\frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty+\mu+\epsilon}^{i\infty+\mu+\epsilon} dp^0 \frac{I(p^0)}{p^2 - m^2} \frac{1}{\exp\{\beta(p^0 - \mu)\} + 1} \\ & -\frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty+\mu-\epsilon}^{i\infty+\mu-\epsilon} dp^0 \frac{I(p^0)}{p^2 - m^2} \frac{1}{\exp\{\beta(\mu - p^0)\} + 1} \\ & +\frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty+\mu-\epsilon}^{i\infty+\mu-\epsilon} dp^0 \frac{I(p^0)}{p^2 - m^2}. \end{aligned} \quad (17.12)$$

Az első tagban az integrálás útját bezárhatjuk a jobboldali félsíkon futó végtelen sugarú körívvel, míg a második és a harmadik tagban ugyanezt a bal oldalon tehetjük meg. Ezután a reziduum-tételt alkalmazzuk figyelembe véve, hogy $f(p^0)$ -nak egyszerű pólusai vannak a $p^0 = \pm E_p = \pm\sqrt{m^2 + \vec{p}^2}$ helyeken. Ügyeljünk rá, hogy $0 \leq \mu < E_p$ és $E_p < \mu$ egyaránt előfordulhat.

$$\begin{aligned} T \sum_{n_p} \frac{I(p^0)}{p^2 - m^2} = & -\frac{1}{2\pi i} (-2\pi i) \frac{I(E_p)}{2E_p} \frac{1}{\exp\{\beta(E_p - \mu)\} + 1} \Theta(E_p - \mu) \\ & -\frac{1}{2\pi i} (2\pi i) \left[\frac{I(-E_p)}{-2E_p} \frac{1}{\exp\{\beta(\mu + E_p)\} + 1} \right. \\ & \left. + \frac{I(E_p)}{2E_p} \frac{1}{\exp\{\beta(\mu - E_p)\} + 1} \Theta(\mu - E_p) \right] \\ & +\frac{1}{2\pi i} (2\pi i) \left[\frac{I(-E_p)}{-2E_p} + \frac{I(E_p)}{2E_p} \Theta(\mu - E_p) \right] \\ = & \frac{I(E_p)}{2E_p} n^-(p) + \frac{I(-E_p)}{-2E_p} [n^+(p) - 1]. \end{aligned} \quad (17.13)$$

Itt bevezettük az elektron és pozitron betöltési számokat:

$$n^\pm(p) = \frac{1}{\exp\{\beta(E_p \pm \mu)\} + 1}. \quad (17.14)$$

Természetesen az n_q -ra való összegzés teljesen hasonlóan végezhető el:

$$\begin{aligned} T \sum_{n_q} \frac{I(q^0)}{q^2 - m^2} &= \\ &= \frac{I(E_q)}{2E_q} n^-(q) + \frac{I(-E_q)}{-2E_q} [n^+(q) - 1], \end{aligned} \quad (17.15)$$

ahol $E_q = \sqrt{m^2 + \vec{q}^2}$.

A fotonfrekvenciákra a (9.6) szabály segítségével összegezzük az $f(k^0) \rightarrow I(k^0)/k^2$ helyettesítést használva:

$$\begin{aligned} T \sum_{n_k} \frac{I(k^0)}{k^2} &= \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{i\infty} dk^0 \frac{I(k^0)}{k^2} \\ &+ \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty+\epsilon}^{i\infty+\epsilon} dk^0 \frac{I(k^0) + I(-k^0)}{k^2} \frac{1}{\exp(\beta k^0) - 1}. \end{aligned} \quad (17.16)$$

Az első tagban az integrálási kontúrt a komplex sík bal oldalán végtelen sugarú félkörrel zárjuk, a második tagban ugyanezt a jobb oldalon tesszük. A reziduumszámítás felhasználása után az alábbi eredményt kapjuk:

$$\begin{aligned} T \sum_{n_k} \frac{I(k^0)}{k^2} &= \\ &= -\frac{I(\omega)}{2\omega} N(\omega) - \frac{I(-\omega)}{2\omega} [N(\omega) + 1], \end{aligned} \quad (17.17)$$

ahol $\omega = |\vec{k}| = |\vec{p} - \vec{q}|$, és $N(\omega)$ a fotonokra a betöltési szám.

A (17.13), (17.15) és (17.17) eredmények segítségével a partíciós függvényben szereplő összeg a

$$\begin{aligned} ' \Sigma' &= -8T^3 \sum_{n_p n_q n_k} \frac{I(p^0, q^0, k^0)}{k^2(p^2 - m^2)(q^2 - m^2)} \\ &= \frac{1}{E_p E_q \omega} \sum_{\pm \pm \pm} \left\{ \begin{array}{l} n^-(p) \\ n^+(p) - 1 \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} n^-(q) \\ n^+(q) - 1 \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} N(\omega) \\ N(\omega) + 1 \end{array} \right\} I(\pm E_p, \pm E_q, \pm \omega) \end{aligned} \quad (17.18)$$

alakot ölti.

4. Most már "csak" az van hátra, hogy a kapott eredményt egyszerűbb alakra hozzuk. Ehhez sorra vesszük ' Σ ' egyes tagjait:

$\sim n^-(p)n^-(q)$ tag:

$$\begin{aligned} N(\omega)I(E_p, E_q, \omega) + (N(\omega) + 1)I(E_p, E_q, -\omega) = \\ \frac{2m^2 - E_p E_q + \vec{p}\vec{q}}{E_p - E_q - \omega} \left\{ e^{\beta(\omega + E_q - \mu)} - e^{\beta(E_p - \mu)} \right\} \frac{1}{e^{\beta\omega} - 1} \\ + \frac{2m^2 - E_p E_q + \vec{p}\vec{q}}{E_p - E_q + \omega} \left\{ e^{\beta(-\omega + E_q - \mu)} - e^{\beta(E_p - \mu)} \right\} \frac{e^{\beta\omega}}{e^{\beta\omega} - 1}. \end{aligned} \quad (17.19)$$

Arra fogunk törekedni, hogy a jobboldalt kifejezzük $1/n^-(p)$ és $1/n^-(q)$ segítségével. Hozzunk közös nevezőre. Felhasználva, hogy

$$\begin{aligned} 2m^2 - E_p E_q + \vec{p}\vec{q} &= 2m^2 - E_p E_q - \frac{1}{2}(\vec{p} - \vec{q})^2 + \frac{1}{2}\vec{p}^2 + \frac{1}{2}\vec{q}^2 \\ &= 2m^2 - E_p E_q - \frac{1}{2}\omega^2 + \frac{1}{2}E_p^2 + \frac{1}{2}E_q^2 - m^2 \\ &= m^2 + \frac{1}{2}(E_p - E_q)^2 - \frac{1}{2}\omega^2, \end{aligned} \quad (17.20)$$

kiemelhetjük a

$$\frac{2m^2 - E_p E_q + \vec{p}\vec{q}}{(E_p - E_q)^2 - \omega^2} = \frac{1}{2} \left[\frac{2m^2}{(E_p - E_q)^2 - \omega^2} + 1 \right] \quad (17.21)$$

tényezőt. A másik tényező számlálójában különválasztjuk az $(E_p - E_q)$ -val és az ω -val arányos tagokat és úgy egészítjük ki őket, hogy a számlálóban E_p és E_q csak az $\exp\{\beta(E - \mu)\} + 1 = 1/n^-$ alakú kifejezésekben forduljon elő. Ekkor kapjuk, hogy:

$$\begin{aligned} N(\omega)I(E_p, E_q, \omega) + (N(\omega) + 1)I(E_p, E_q, -\omega) = \\ \frac{1}{2} \left[\frac{2m^2}{(E_p - E_q)^2 - \omega^2} + 1 \right] \left\{ (E_p - E_q) \frac{e^{\beta\omega} + 1}{e^{\beta\omega} - 1} \left(\frac{1}{n^-(q)} - \frac{1}{n^-(p)} \right) \right. \\ \left. + \omega \left(\frac{1}{n^-(q)} + \frac{1}{n^-(p)} - 2 \right) \right\}. \end{aligned} \quad (17.22)$$

Ennek a tagnak a járuléka tehát ' Σ '-hoz:

$$\begin{aligned} \left[\frac{2m^2}{(E_p - E_q)^2 - \omega^2} + 1 \right] \left\{ n^-(p)n^-(q) \frac{1}{E_p E_q} \right. \\ \left. - n^-(p) \frac{1}{2E_p E_q \omega} \left[\omega + (E_p - E_q) \frac{e^{\beta\omega} + 1}{e^{\beta\omega} - 1} \right] \right. \\ \left. - n^-(q) \frac{1}{2E_p E_q \omega} \left[\omega - (E_p - E_q) \frac{e^{\beta\omega} + 1}{e^{\beta\omega} - 1} \right] \right\}. \end{aligned} \quad (17.23)$$

Hasonlóan járunk el a többi tag esetében is. Az $(n^+(p) - 1)(n^+(q) - 1)$ -gyel arányos tag együttthatóját kifejezzük $(n^+(p) - 1)^{-1}$ és $(n^+(q) - 1)^{-1}$ segítségével, az $(n^+(p) -$

1) $n^-(q)$ -val arányos tagét $(n^+(p) - 1)^{-1}$ -vel és $1/n^-(q)$ -val, stb. Az egyes tagok járuléka ' Σ' '-hoz:

$\sim (n^+(p) - 1)(n^+(q) - 1)$ tag:

$$\begin{aligned} & \left[\frac{2m^2}{(E_p - E_q)^2 - \omega^2} + 1 \right] \left\{ n^+(p)n^+(q) \frac{1}{E_p E_q} \right. \\ & - n^+(p) \frac{1}{2E_p E_q \omega} \left[\omega + (E_p - E_q) \frac{e^{\beta\omega} + 1}{e^{\beta\omega} - 1} \right] \\ & \left. - n^+(q) \frac{1}{2E_p E_q \omega} \left[\omega - (E_p - E_q) \frac{e^{\beta\omega} + 1}{e^{\beta\omega} - 1} \right] \right\}. \end{aligned} \quad (17.24)$$

$\sim (n^+(p) - 1)n^-(q)$ tag:

$$\begin{aligned} & \left[\frac{2m^2}{(E_p + E_q)^2 - \omega^2} + 1 \right] \left\{ -n^+(p)n^-(q) \frac{1}{E_p E_q} \right. \\ & - n^+(p) \frac{1}{2E_p E_q \omega} \left[-\omega + (E_p + E_q) \frac{e^{\beta\omega} + 1}{e^{\beta\omega} - 1} \right] \\ & - n^-(q) \frac{1}{2E_p E_q \omega} \left[-\omega - (E_p + E_q) \frac{e^{\beta\omega} + 1}{e^{\beta\omega} - 1} \right] \\ & \left. + \frac{1}{2E_p E_q \omega} \left[-\omega + (E_p + E_q) \frac{e^{\beta\omega} + 1}{e^{\beta\omega} - 1} \right] \right\}. \end{aligned} \quad (17.25)$$

$\sim (n^-(p) - 1)n^+(q)$ tag: az előzőből p és q felcserélése révén kapható meg.

Amikor a fenti járulékokat összeadjuk és $\vec{p}$ szerint integrálunk, akkor lesznek olyan tagok, amelyek

$$f(E_p, E_q, \omega) \delta(\vec{p} - \vec{q} - \vec{k}) \left[\frac{E_p + E_q}{(E_p + E_q)^2 - \omega^2} - \frac{E_p - E_q}{(E_p - E_q)^2 - \omega^2} \right] \quad (17.26)$$

alakú integrandust eredményeznek. Ez az integrandus $\vec{p}$ páratlan függvénye, s így integrálja zérus. Ennek belátásához tegyük a következőket. Hozzunk közös nevezőre a szögletes zárójelen belül. Mivel

$$E_q^2 = m^2 + \vec{q}^2 = m^2 + (\vec{p} - \vec{k})^2 = E_p^2 + \omega^2 - 2\vec{p}\vec{k}, \quad (17.27)$$

a közös nevező:

$$\begin{aligned} & (E_p^2 + E_q^2 - \omega^2 + 2E_p E_q)(E_p^2 + E_q^2 - \omega^2 - 2E_p E_q) = \\ & = (2E_p^2 - 2\vec{p}\vec{k} + 2E_p E_q)(2E_p^2 - 2\vec{p}\vec{k} - 2E_p E_q) \\ & = 4E_p^4 + 4(\vec{p}\vec{k})^2 - 8E_p^2 \vec{p}\vec{k} - 4E_p^2 (E_p^2 + \omega^2 - 2\vec{p}\vec{k}) \\ & = -4E_p^2 \omega^2 + 4(\vec{p}\vec{k})^2. \end{aligned} \quad (17.28)$$

A szögletes zárójelen belüli kifejezés számlálója elemi számolás után $-4E_q\vec{p}\vec{k}$, ahonnan látszik, amit bizonyítani akartunk.

Végül az integrálás után zérust adó tagokat elhagyva a (17.23), (17.24) és (17.25) járulékok összege:

$$\begin{aligned}
'\Sigma' &= \frac{1}{E_p E_q} \left[\frac{2m^2}{(E_p - E_q)^2 - \omega^2} + 1 \right] (n^+(p)n^+(q) + n^-(p)n^-(q)) \\
&+ \frac{1}{E_p E_q} \left[\frac{2m^2}{(E_p + E_q)^2 - \omega^2} + 1 \right] (n^+(p)n^-(q) + n^-(p)n^+(q)) \\
&+ \frac{2n(p)}{E_p} \left[-\frac{1}{E_q} + \frac{1}{\omega} + \frac{2m^2}{E_q \omega} \frac{E_q + \omega}{(E_q + \omega)^2 - E_p^2} \right] \\
&+ \frac{4n(p)N(\omega)}{E_p \omega} \\
&- \frac{4N(\omega)}{E_p \omega} \left[\frac{2m^2}{(E_p + E_q)^2 - \omega^2} + 1 \right] \\
&+ \{ \beta\text{-től független áll.} \}.
\end{aligned} \tag{17.29}$$

(Az utolsó előtti sorban kihasználtuk, hogy a kifejezés $\vec{p}$ -ben és $\vec{q}$ -ban szimmetrikus. A partíciós függvény ezek szerint:

$$\ln Z_2 = \frac{1}{2} \beta V e^2 \int \frac{d^3 p d^3 q}{(2\pi)^6} \cdot '\Sigma'.$$

Az így kapott kifejezés még ultraibolya divergenciákat tartalmaz. Az elmélet renormálása ugyanúgy történik, mint az önkölcsönható skalártér példáján láttuk. Kivonjuk az összes olyan diagrammot, amelyet az eredetiből úgy kapunk, hogy a foton és az elektron sajátenergiás betétrészeket az összes lehetséges módon kiválasztva a $T \rightarrow 0$, $\mu \rightarrow 0$ határértékükkel helyettesítjük:

$$\begin{aligned}
\ln Z_{2R} &= -\frac{1}{2} \left(\text{diagram (a)} - 2 \text{diagram (b)} - \text{diagram (c)} \right) \\
&= \ln Z_2 + \ln Z_{2b} + \ln Z_{2c}.
\end{aligned} \tag{17.31}$$

A (b) és (c) diagrammok járulékanak kiszámolása ugyanúgy történik, mint ahogy az előzőekben jártunk el.

A (b) diagramm:

$$\begin{aligned}
\ln Z_{2b} &= e^2 \beta V T \sum_{n_p} \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \lim_{\beta \rightarrow \infty, \mu \rightarrow 0} \int \frac{d^3 q}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \\
&\cdot (2\pi)^3 \delta(\vec{p} - \vec{q} - \vec{k}) \frac{1}{(p^2 - m^2)(q^2 - m^2)k^2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \cdot \frac{\exp\{\beta(k^0 + q^0 - \mu)\} - \exp\{\beta(p^0 - \mu)\}}{p^0 - q^0 - k^0} \\
= & e^2 \beta V \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} T \sum_{n_p} \lim_{\beta \rightarrow \infty, \mu \rightarrow 0} \int \frac{d^3 q}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} T \sum_{n_q} T \sum_{n_k} \\
& \cdot (2\pi)^3 \delta(\vec{p} - \vec{q} - \vec{k}) \frac{1}{p^2 - m^2} \\
& \frac{-2}{E_q \omega} \sum_{\pm} \sum_{\pm} \left\{ \begin{array}{c} n^-(q) \\ n^+(q) - 1 \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{c} N(\omega) \\ N(\omega) + 1 \end{array} \right\} I(p^0, \pm E_q, \pm \omega),
\end{aligned} \tag{17.32}$$

ahol

$$\begin{aligned}
I(p^0, q^0, k^0) &= -\frac{1}{8} \text{Tr}\{\gamma_\mu(\not{p} + m)\gamma^\mu(\not{p} + m)\} \\
& \cdot \frac{\exp\{\beta(k^0 + q^0 - \mu)\} - \exp\{\beta(p^0 - \mu)\}}{p^0 - q^0 - k^0} \\
&= -\frac{1}{4} \text{Tr}\{(2m - \not{q})(\not{p} + m)\} \\
& \cdot \frac{\exp\{\beta(k^0 + q^0 - \mu)\} - \exp\{\beta(p^0 - \mu)\}}{p^0 - q^0 - k^0}.
\end{aligned} \tag{17.33}$$

A fenti kifejezés a következő határértéket tartalmazza:

$$\begin{aligned}
& \lim_{\beta \rightarrow \infty, \mu \rightarrow 0} \text{Tr}\{\dots\}(\not{p} + m) = \\
& \lim \text{Tr} \left\{ (2m - \not{q})_{E_q} n^-(q) \left[n(\omega) \frac{\exp\{\beta(\omega + E_q - \mu)\} - \exp\{\beta(p^0 - \mu)\}}{p^0 - E_q - \omega} + \right. \right. \\
& \quad \left. \left. (n(\omega) + 1) \frac{\exp\{\beta(-\omega + E_q - \mu)\} - \exp\{\beta(p^0 - \mu)\}}{p^0 - E_q + \omega} \right] \right. \\
& \quad \left. + (2m - \not{q})_{-E_q} (n^+(q) - 1) \left[n(\omega) \frac{\exp\{\beta(\omega - E_q - \mu)\} - \exp\{\beta(p^0 - \mu)\}}{p^0 + E_q - \omega} + \right. \right. \\
& \quad \left. \left. (n(\omega) + 1) \frac{\exp\{\beta(-\omega - E_q - \mu)\} - \exp\{\beta(p^0 - \mu)\}}{p^0 + E_q + \omega} \right] \right\} (\not{p} + m).
\end{aligned} \tag{17.34}$$

A határérték könnyen képezhető, ha figyelembe vesszük, hogy az n_p -re még nem történt összegzés, így $p^0 = i(2n_p + 1)\pi$ és ezért $\exp\{\beta(p^0 - \mu)\} = \exp\{i(2n_p + 1)\pi\} = \text{const.}$:

$$\begin{aligned}
& \lim_{\beta \rightarrow \infty, \mu \rightarrow 0} \text{Tr}\{\dots\}(\not{p} + m) = \\
& \text{Tr} \left\{ (2m - \not{q})_{E_q} (\not{p} + m) \frac{1}{p^0 - E_q - \omega} \right. \\
& \quad \left. + (2m - \not{q})_{-E_q} (\not{p} + m) \frac{\exp\{\beta(p^0 - \mu)\}}{p^0 + E_q - \omega} \right\}.
\end{aligned} \tag{17.35}$$

Felhasználjuk, hogy

$$\text{Tr}(2m - \not{q})(\not{p} + m) = 4(2m^2 - p \cdot q). \quad (17.36)$$

A (17.13) egyenlőség segítségével n_p -re az összegzést elvégezhetjük:

$$\begin{aligned} T \sum_{n_p} \lim \text{Tr}\{\dots\} \frac{\not{p} + m}{p^2 - m^2} = \\ \frac{2}{E_p} \left\{ \left[(2m^2 - p \cdot q)_{E_p, E_q} \frac{1}{E_p - E_q - \omega} \right. \right. \\ \left. \left. + (2m^2 - p \cdot q)_{E_p, -E_q} \frac{\exp\{\beta(E_p - \mu)\}}{E_p + E_q + \omega} \right] \frac{1}{\exp\{\beta(E_p - \mu)\} + 1} \right. \\ \left. + \left[(2m^2 - p \cdot q)_{-E_p, E_q} \frac{1}{-E_p - E_q - \omega} \right. \right. \\ \left. \left. + (2m^2 - p \cdot q)_{-E_p, -E_q} \frac{\exp\{-\beta(E_p + \mu)\}}{-E_p + E_q + \omega} \right] \frac{-1}{\exp\{-\beta(E_p + \mu)\} + 1} \right\}. \end{aligned} \quad (17.37)$$

Innen azonos átalakítással kapjuk, hogy:

$$\begin{aligned} T \sum_{n_p} \lim \text{Tr}\{\dots\} \frac{\not{p} + m}{p^2 - m^2} = \\ \frac{2}{E_p} \left[\frac{2m^2 - E_p E_q + \vec{p}\vec{q}}{E_p - E - q - \omega} - \frac{2m^2 + E_p E_q + \vec{p}\vec{q}}{E_p + E_q + \omega} \right] [2(n^-(p) + n^+(p)) - 2] \end{aligned} \quad (17.38)$$

Az első szögletes zárójel a

$$\begin{aligned} \vec{p}\vec{q} &= -\frac{1}{2}(\vec{p} - \vec{q})^2 + \frac{1}{2}\vec{p}^2 + \frac{1}{2}\vec{q}^2 \\ &= -\frac{1}{2}\omega^2 + \frac{1}{2}E_p^2 + \frac{1}{2}E_q^2 - m^2 \end{aligned} \quad (17.39)$$

azonosság segítségével tovább alakítható:

$$\frac{-2m^2(E_q + \omega)}{(E_q + \omega)^2 - E_p^2} - E_q + \omega. \quad (17.40)$$

Így végezetül:

$$\begin{aligned} \ln Z_{2b} &= \frac{1}{2}e^2\beta V \int \frac{d^3p d^3q}{(2\pi)^6} \frac{2}{E_p} (n(p) - 1) \\ &\cdot \left[\frac{1}{\omega} - \frac{1}{E_q} \frac{2m^2(E_q + \omega)}{(E_q + \omega)^2 - E_p^2} \frac{1}{E_q\omega} \right] \end{aligned} \quad (17.41)$$

Ha most is elhagyjuk az integrálból a T -től független állandót, akkor a maradék éppen kiejti $\ln Z_2$ -ben a (17.29) harmadik sorában álló tagokat.

(c) diagramm:

$$\begin{aligned}
\ln Z_{2c} &= \frac{1}{2}e^2\beta VT \sum_{n_k} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3pd^3q}{(2\pi)^6} (2\pi)^3 \delta(\vec{p} - \vec{q} - \vec{k}) \frac{1}{k^2} \\
&\cdot \lim_{\beta \rightarrow \infty, \mu \rightarrow 0} T \sum_{n_p} T \sum_{n_q} \frac{8I(p^0, q^0, k^0)}{(p^2 - m^2)(q^2 - m^2)} \\
&= \frac{1}{2}e^2\beta VT \sum_{n_k} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3pd^3q}{(2\pi)^6} (2\pi)^3 \delta(\vec{p} - \vec{q} - \vec{k}) \frac{1}{k^2} \\
&\cdot \lim_{\beta \rightarrow \infty, \mu \rightarrow 0} \frac{8}{4E_p E_q} \sum_{\pm} \sum_{\pm} \left\{ \begin{array}{l} n^-(q) \\ n^+(q) - 1 \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} n^-(p) \\ n^+(p) - 1 \end{array} \right\} I(\pm E_p, \pm E_q, k^0),
\end{aligned} \tag{17.42}$$

ahol

$$\begin{aligned}
I(p^0, q^0, k^0) &= \frac{1}{8} \text{Tr} \{ \gamma^\mu (\not{q} + m) \gamma_\mu (\not{p} + m) \} \\
&\cdot \frac{\exp\{\beta(k^0 + q^0 - \mu)\} - \exp\{\beta(p^0 - \mu)\}}{p^0 - q^0 - k^0}.
\end{aligned} \tag{17.43}$$

Most a határértékképzés során $\exp\{\beta k^0\} = \text{const.}$, amit figyelembe véve, majd a foton-frekvenciákra összegezve:

$$\begin{aligned}
\ln Z_{2c} &= \frac{1}{2}e^2\beta VT \sum_{n_k} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3pd^3q}{(2\pi)^6} (2\pi)^3 \delta(\vec{p} - \vec{q} - \vec{k}) \frac{1}{k^2} \\
&\cdot \frac{2}{E_p E_q} \left\{ \frac{2m^2 + E_p E_q + \vec{p}\vec{q}}{E_p + E_q - k^0} - \frac{2m^2 + E_p E_q + \vec{p}\vec{q}}{-E_p - E_q - k^0} e^{\beta k^0} \right\} \\
&= -\frac{1}{2}e^2\beta V \int \frac{d^3kd^3pd^3q}{(2\pi)^9} (2\pi)^3 \delta(\vec{p} - \vec{q} - \vec{k}) \frac{1}{k^2} \\
&\cdot \frac{2m^2 + E_p E_q + \vec{p}\vec{q}}{E_p E_q \omega} \left\{ \left[\frac{1}{E_p + E_q - \omega} + \frac{1}{E_p + E_q + \omega} e^{\beta \omega} \right] N(\omega) \right. \\
&\quad \left. + \left[\frac{1}{+E_p + E_q + \omega} + \frac{1}{+E_p + E_q - \omega} e^{-\beta \omega} \right] (N(\omega) + 1) \right\} \\
&= -\frac{1}{2}e^2\beta V \int \frac{d^3pd^3q}{(2\pi)^6} 2 \frac{2m^2 + E_p E_q + \vec{p}\vec{q}}{E_p E_q \omega} \\
&\quad \cdot \left[\frac{N(\omega)}{E_p + E_q - \omega} + \frac{N(\omega) + 1}{E_p + E_q + \omega} \right] \\
&= -\frac{1}{2}e^2\beta V \int \frac{d^3pd^3q}{(2\pi)^6} 2 \frac{2m^2 + E_p E_q + \vec{p}\vec{q}}{E_p E_q \omega}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \cdot \left[\frac{1}{E_p + E_q + \omega} + \frac{2(E_p E_q)}{(E_p + E_q)^2 - \omega^2} N(\omega) \right] \\
= & -\frac{1}{2} e^2 \beta V \int \frac{d^3 p d^3 q}{(2\pi)^6} \frac{4N(\omega)}{E_p \omega} \left[\frac{2m^2}{(E_p + E_q)^2 - \omega^2} + 1 \right]. \quad (17.44)
\end{aligned}$$

Itt $\omega = |\vec{p} - \vec{q}|$ és felhasználtuk az utolsó egyenlőség felírásához a (17.21) azonosságot ($E_q \rightarrow -E_q$ helyettesítés után). Elhagytuk továbbá megint azt a tagot, amely a termodinamikai potenciálhoz const. járulékot ad. A (c) diagramm tehát kiejti $\ln Z_2$ -ben a (17.29) összeg ötödik sorában álló tagot.

Végül tehát a renormált, ún. kicserélődési korrekció csak a betöltési számokban kvadratikus tagokat tartalmaz. A renormálás az összes, a betöltési számokban lineáris tagot eltávolította a partíciós függvényből:

$$\begin{aligned}
\ln Z_2^R = & \\
& -\frac{1}{2} \beta V e^2 \int \frac{d^3 p d^3 q}{(2\pi)^6} \left\{ \frac{1}{E_p E_q} \left[\frac{2m^2}{(E_p - E_q)^2 - \omega^2} + 1 \right] (n^+(p)n^+(q) + n^-(p)n^-(q)) \right. \\
& + \frac{1}{E_p E_q} \left[\frac{2m^2}{(E_p + E_q)^2 - \omega^2} + 1 \right] (n^+(p)n^-(q) + n^-(p)n^+(q)) \\
& \left. + \frac{4n(p)}{E_p} \frac{N(\omega)}{\omega} \right\}, \quad (17.45)
\end{aligned}$$

ahol az utolsó tagban az integrálást elvégezhetjük és írhatjuk, hogy

$$-\frac{1}{6} \beta V e^2 T^2 \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{n(p)}{E_p}. \quad (17.46)$$

A fejezet befejezéséként álljon itt a partíciós függvény kicserélődési tagja $m = 0$ esetén:

$$\begin{aligned}
\frac{\ln Z_{\text{ex}}}{\beta V} &= -\frac{1}{6} e^2 T^2 \zeta - \frac{1}{2} e^2 \zeta^2 \\
&= -\frac{e^2}{288} \left[5T^4 + \frac{18\mu^2 T^2}{\pi^2} + \frac{9\mu^4}{\pi^4} \right], \quad (17.47)
\end{aligned}$$

ahol

$$\zeta = \zeta_+ + \zeta_-, \quad (17.48)$$

és

$$\begin{aligned}
\zeta_- &= \int_0^\infty \frac{dp}{2\pi^2} p \frac{1}{\exp\{\beta(p - \mu)\} + 1} \\
&= \frac{T^2}{2\pi^2} \int_{-\beta\mu}^\infty \frac{dx (x + \beta\mu)}{e^x + 1}, \quad (17.49)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\zeta_+ &= \int_0^\infty \frac{dp}{2\pi^2} p \frac{1}{\exp\{\beta(p+\mu)\} + 1} \\
&= \frac{T^2}{2\pi^2} \int_{\beta\mu}^\infty \frac{dx (x - \beta\mu)}{e^x + 1} \\
&= \frac{T^2}{2\pi^2} \int_0^\infty \frac{dx (x - \beta\mu)}{e^x + 1} - \frac{T^2}{2\pi^2} \int_0^{\beta\mu} \frac{dx (x - \beta\mu)}{e^x + 1} \\
&= \frac{T^2}{2\pi^2} \int_0^\infty \frac{dx (x - \beta\mu)}{e^x + 1} + \frac{T^2}{2\pi^2} \int_{-\beta\mu}^0 dx (x + \beta\mu) \left(1 - \frac{1}{e^x + 1}\right),
\end{aligned} \tag{17.50}$$

úgyhogy

$$\begin{aligned}
\zeta &= \zeta_- + \zeta_+ \\
&= \frac{T^2}{2\pi^2} \left(\int_0^\infty \frac{dx 2x}{e^x + 1} + \int_{-\beta\mu}^0 dx (x + \beta\mu) \right) \\
&= \frac{T^2}{12} + \frac{\mu^2}{4\pi^2}.
\end{aligned} \tag{17.51}$$

18 Infravörös divergencia a kvantumelektrodinamikában

Naivan azt várnánk, hogy a csatolási állandóban kvadratikusan kicserélődési járulékat követően a termodinamikai potenciál perturbációs sorában az $\mathcal{O}(e^4)$ tagok következnek. Mivel azonban a foton csupasz nyugalmi tömege nulla, ezért a következő járulék $T > 0$ esetén $\mathcal{O}(e^3)$ rendű, $T = 0, \mu \neq 0$ esetén pedig $\mathcal{O}(e^4 \ln e^2)$ rendű. A helyzet és az ok hasonló mint az önkölcsönható skalártér esetén láttuk.

Tekintsük a gyűrűdiagrammok járulékát a termodinamikai potenciál térfogati sűrűségéhez:

$$\begin{aligned}
-\frac{\ln Z_{\text{gy}}}{\beta V} &= \text{diagram 1} + \text{diagram 2} + \dots \\
&= \frac{1}{2} T \sum_{n_k} \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \{ \ln [1 + \mathcal{D}_{0\mu\nu}(k) \Pi_{\nu\mu}(k)] - \mathcal{D}_{0\mu\nu}(k) \Pi_{\nu\mu}(k) \}.
\end{aligned} \tag{18.1}$$

Használjuk fel a 16. fejezet eredményeit a fotonpropagátor és a polarizációs tenzor szerkezetére vonatkozóan, ekkor:

$$\mathcal{D}_{0\mu\nu}(k) \Pi_{\nu\mu}(k) = \frac{1}{k^2} (G P_{T\mu}^\mu + F P_{L\mu} \mu) = \frac{-1}{k^2} (2G + F). \tag{18.2}$$

Itt $k^2 = -(2\pi T n_k)^2 - \omega^2$ és $\omega = |\vec{k}|$. A gyűrűdiagrammok járulékát (a perturbációs számítás adott rendjéig véve figyelembe a polarizációt) a következőképpen írhatjuk:

$$\begin{aligned}
-\frac{\ln Z_{\text{gy}}}{\beta V} &= \\
&= \frac{1}{2} T \sum_{n_k} \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \left\{ 2 \left[\ln \left(1 - \frac{G(n, \omega)}{k^2} \right) + \frac{G(n, \omega)}{k^2} \right] \right. \\
&\quad \left. + \ln \left(1 - \frac{F(n, \omega)}{k^2} \right) + \frac{F(n, \omega)}{k^2} \right\}. \tag{18.3}
\end{aligned}$$

A legfontosabb, amit észrevehetünk, hogy ez a járulék mértékinvariáns, mert $\mathcal{D}_0 \Pi$ is az.

Az infravörös divergenciák elkülönítése $T > 0$ és $T = 0, \mu \neq 0$ esetén másképpen történhet. Vizsgáljuk először a $T > 0$ esetet. Különválasztjuk az $n_k \neq 0$ tagokat, valamint az $n_k = 0$ tagokból levonjuk $\omega \rightarrow 0$ értéküket majd ugyanezt hozzájuk is adjuk. Az utóbbi tagok kivételével F^2, G^2 rendig sorbafejtünk. Ha F és G e^2 renddel bezárólag pontos, akkor a sorfejtésünk e^4 rendig veszi figyelembe a tagokat:

$$\begin{aligned}
-\frac{\ln Z_{\text{gy}}}{\beta V} &= \\
&= -T \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \left\{ \sum_{n_k \neq 0} \left[\frac{G}{k^2} + \frac{1}{2} \left(\frac{G}{k^2} \right)^2 - \frac{G}{k^2} + \mathcal{O}(e^6) \right] \right. \\
&\quad + \frac{1}{2} \frac{F}{k^2} - \frac{1}{4} \left(\frac{F}{k^2} \right)^2 - \frac{1}{2} \frac{F}{k^2} + \mathcal{O}(e^6) \\
&\quad + \frac{1}{2} \left(\frac{G(0, \omega)}{\omega^2} \right)^2 - \frac{1}{2} \left(\frac{G(0, 0)}{\omega^2} \right)^2 \\
&\quad \left. - \frac{1}{4} \left(\frac{F(0, \omega)}{\omega^2} \right)^2 + \frac{1}{4} \left(\frac{F(0, 0)}{\omega^2} \right)^2 + \mathcal{O}(e^6) \right\} \\
&\quad + T \frac{1}{2} \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \left[2 \ln \left(1 + \frac{G(0, 0)}{\omega^2} \right) - \frac{2G(0, 0)}{\omega^2} \right. \\
&\quad \left. + \ln \left(1 + \frac{F(0, 0)}{\omega^2} \right) - \frac{F(0, 0)}{\omega^2} \right]. \tag{18.4}
\end{aligned}$$

A polarizációs tenzor kiszámolásával meghatározható F és G konkrét alakja. Ezt mi most nem fogjuk megtenni. A továbbiakban csak annyira lesz szükségünk, hogy hogyan viselkedik F és G az $\omega \rightarrow 0$ határesetben:

$$\begin{aligned}
F(0, \omega \rightarrow 0) &= \frac{e^2}{\pi^2} \int_0^\infty \frac{dp}{E_p} (p^2 + E_p^2) (n^+(p) + n^-(p)) \\
&\rightarrow_{m \rightarrow 0} e^2 \left(\frac{T^2}{3} + \mu^2 \pi^2 \right), \tag{18.5}
\end{aligned}$$

$$G(0, \omega \rightarrow 0) = 0. \tag{18.6}$$

Ha tehát a polarizáció első el nem tűnő rendű tagjait vesszük csak figyelembe, akkor a gyűrűdiagrammok egy $\mathcal{O}(e^4)$ rendű járulékot és egy infravörös divergenciákat felösszegező járulékot tartalmaznak, amely a következő alakú:

$$-\frac{\ln Z_{\text{IR}}}{\beta V} = \frac{1}{2}T \int_0^\infty \frac{dk}{2\pi^2} k^2 \left[\ln \left(1 + \frac{\omega^2}{F(0,0)} \right) - \ln \left(\frac{\omega^2}{F(0,0)} \right) - \frac{F(0,0)}{\omega^2} \right], \quad (18.7)$$

ahol $\omega^2 = k^2$.

Ha bevezetjük az $uF^{-1/2}$ változót, akkor ugyanazt az integrált kapjuk eredményül, mint amellyel már az önkölcsönható skalártér infravörös divergenciáinak vizsgálatakor dolgunk volt. Az ottani eredményt felhasználva:

$$-\frac{\ln Z_{\text{IR}}}{\beta V} = -\frac{TF(0,0)^{3/2}}{12\pi}. \quad (18.8)$$

A $T = 0$ esetben az infravörös divergenciák járulékát másképp kell leválasztani, mert az ω_n fotonfrekvencia $T = 0$ -n folytonossá válik. Hosszadalmas matematikai elemzés után a korrekció $\mathcal{O}(e^4 \ln e^2)$ rendűnek adódik. Ha $m = 0$ (az ún. ultrarelativisztikus határesetben), akkor:

$$-\lim_{\beta \rightarrow \infty} \frac{\ln Z_{\text{IR}}}{\beta V} = \frac{e^4 \ln e^2}{128\pi^6} \mu^4. \quad (18.9)$$

19 Általános megjegyzések a renormálásról

1. Könnyen plauzibilissé tehetjük, hogy a véges hőmérséklet és kémiai potenciál nem eredményez újabb ultraibolya divergenciákat a térelméletben. Ezért a térelméletet $T = 0$ hőmérséklet és $\mu = 0$ kémiai potenciál mellett kell renormálni, s akkor az tetszőleges hőmérséklet és kémiai potenciál esetén renormált lesz. Az egyik lehetséges argumentáció a következő. Képzeljük el, hogy sikerült a renormált $T = 0$, $\mu = 0$ elméletben a zárt rendszer összes stacionárius állapotának E_i energiáját meghatározni. Akkor az állapotösszeg a Boltzmann-faktorok

$$Z = \sum_i \exp\{-\beta E_i\} \quad (19.1)$$

összege. Az összegzés során természetesen semmiféle ultraibolya divergencia nem léphet fel. Azok az energiasajátértékek kiszámolásakor léptek fel és lettek eltávolítva a $T = 0$ elmélet renormálásakor.

Nézzünk most egy másik lehetséges érvelést. A véges hőmérsékletű terek elméletében a partíciós függvényhez járulékot adó diagrammok a diszkrét bozon- és fermion-frekvenciákra összegzést tartalmaznak. Ezek az összegek a kontúrintegrálok módszerével

egymástól függetlenül kiszámolhatók. Az összegzés eredménye - mint az a (9.6) és (11.14) összefüggésekből jól látható - tartalmaz egy vákuumjárulékot, amely független a hőmérséklettől és a kémiai potenciáltól. Az összeg ugyanakkor tartalmaz olyan tagokat, amelyeknek integrandusa a betöltési számokkal arányos, az ún. közegtagokat. Az ultraibolya divergenciák a vákuumjárulékok impulzus szerinti integrálásakor lépnek fel. A közegtagok impulzus szerinti integrálása nem eredményez sohasem újabb ultraibolya divergenciákat, mert a betöltési számok nagy impulzusoknál mindig exponenciálisan lecsökkennek.

2. Az előző megjegyzés értelmében az elméletet $T = 0$ -n kell renormálnunk. Mivel azonban az állapotegyenletet keressük, ezért az energiát (termodinamikai potenciált) a vákuuméhoz viszonyítjuk, nem lesz szükség rá, hogy az ellentagokat ténylegesen bevezessük. Elegendő lesz, ha a már eddig is alkalmazott eljárást követjük és kivonjuk a sajátenergiás betétrészekből azok $T \rightarrow 0, \mu \rightarrow 0$ limeszben felvett értékét. A diagrammok kiszámításakor tehát a

$$\Sigma \rightarrow \Sigma - \lim \Sigma, \quad \Pi \rightarrow \Pi - \lim \Pi \quad (19.2)$$

helyettesítésekkel élünk, és az eredményből elhagyjuk azokat a tagokat, amelyek egy állandóval járulnának hozzá a termodinamikai potenciálhoz.

3. A termodinamikai potenciált a korábbiakban megismert perturbatív módszerrel a csatolási állandó szerinti sorfejtésének véges sok tagjával tudjuk mindig közelíteni. Nem egyértelműen tisztázott azonban, hogy ténylegesen a csatolási állandó helyére milyen számot kell írni valamely konkrét közelítő számolás során.

A probléma gyökere ott van, hogy a renormálást végtelen sok, egymással egyenértékű séma szerint hajthatjuk végre. Amikor ugyanis a Green-függvényekből eltávolítjuk (pl. a Λ_c levágás bevezetése után) a $(\Lambda_c \rightarrow \infty)$ limeszben) végtelen tagokat, akkor még tetszőleges véges értékű tagot is kivonhatunk. Legyen pl. egy Green-függvény értéke $G(p, \Lambda_c) = A(p, \Lambda_c) + B(p, \Lambda_c)$, ahol $B(p, \Lambda_c) \rightarrow \infty$ és $A(p, \Lambda_c) \rightarrow A(p, \infty)$ = véges a $\Lambda_c \rightarrow \infty$ határesetben. Ekkor a renormált Green-függvényt definiálhatom mint

$$G_R(p) = \lim_{\Lambda_c \rightarrow \infty} [G(p, \Lambda_c) - B(p, \Lambda_c) - b], \quad (19.3)$$

ahol b tetszőleges véges állandó. Ennek értékét azáltal rögzíthetjük, hogy a Green-függvény értékét egy tetszőleges $p^2 = M^2$ esetén rögzítjük (valamely mérés eredményével azonosítjuk): $G_R(p^2 = M^2) = G_*$, ekkor

$$A(p, \infty) - b = G_*, \quad \text{azaz} \quad b = A(p, \infty) - G_*. \quad (19.4)$$

Úgy tűnhet tehát, hogy az elmélet fizikai tartalma, azaz a Green-függvények függhetnek attól, hogyan választjuk meg az M tömegparamétert. Hogy ne ez legyen a helyzet megköveteljük az ellenkezőjét, vagyis hogy a Green-függvények ne függjenek az M paramétertől:

$$M \frac{d}{dM} \Gamma^{(n)} = 0, \quad (19.5)$$

ahol $\Gamma^{(n)}$ tetszőleges, n kifutó lábat tartalmazó ún. n -pont Green-függvény inverze. Ez az egyenlet az ún. renormálási csoport egyenlet. Azt fejezi ki, hogy az M különböző megválasztásával kapott különböző renormálási sémák egyenértékűek egymással, mert azonos Green-függvényekre vezetnek. Az egyenlet így felírva trivialis. Ha azonban kifejezzük a baloldalon álló Green-függvényt a megfelelő renormált Green-függvénnyel, akkor már egyáltalán nem az.

Hogyan lehetséges ez? Az egyszerűség kedvéért az önkölcsönható skalártér $m = 0$ esetéről beszélünk, de ennek ismeretében azok az állítások is könnyen érthetőek lesznek, amelyek a kvantumelektrodinamikára és a kvantumszándinamikára vonatkoznak, ha az elektron ill. a kvarkok tömegét zérusnak vesszük. Az (19.5) egyenlet bal oldalán a deriválást a λ csupasz csatolási állandó és Λ_c rögzített értéke mellett kell végezni. A renormált Green-függvény a λ_R renormált csatolási állandón keresztül függ a csupasz csatolási állandótól. A renormálás programjának végrehajtása után

$$\Phi = \mathcal{Z}_3^{1/2} \Phi_R, \quad \lambda = \mathcal{Z}_1 \mathcal{Z}_3^{-2} \lambda_R \quad (19.6)$$

kapcsolatot találunk a renormálatlan és a renormált térmennyiségek és csatolási állandók között. A hullámfüggvényt és a csatolási állandót renormáló tényezők kifejezhetők mint a renormált csatolási állandó hatványsorai, amelyekben az együtthatók függenek a Λ_c ultraibolya levágástól. Ha $\Gamma^{(n)}$ tetszőleges 1PI Green-függvény inverze, akkor

$$\Gamma_R^{(n)}(p, \lambda_R, M) = \mathcal{Z}_3^{n/2}(\lambda, \Lambda_c/M) \Gamma^{(n)}(p, \lambda, \Lambda_c) \quad (19.7)$$

kapcsolat áll fenn. Itt p az n -pont Green-függvényben szereplő n darab impulzust jelöli. Felhasználtuk, hogy $\mathcal{Z}_3$ dimenziótlan és hogy ezért csak a dimenziótlan Λ_c/M hányadostól függhet. Képezzük ennek az összefüggésnek a felhasználásával a renormálási csoport egyenletét M szerinti deriválás útján:

$$M \left(\frac{\partial \Gamma_R^{(n)}}{\partial M} \right)_{\lambda_R} + \frac{\partial \Gamma_R^{(n)}}{\partial \lambda_R} M \left(\frac{\partial \lambda_R}{\partial M} \right)_{\lambda, \Lambda_c} - M \left(\frac{\partial \mathcal{Z}_3^{n/2}}{\partial M} \right)_{\lambda, \Lambda_c} \Gamma^{(n)} = 0. \quad (19.8)$$

Definiáljuk a

$$\beta_\lambda = M \left(\frac{\partial \lambda_R}{\partial M} \right)_{\lambda, \Lambda_c}, \quad (19.9)$$

$$\begin{aligned} \gamma_{(n)} &= -\mathcal{Z}_3^{-n/2} M \left(\frac{\partial \mathcal{Z}_3^{n/2}}{\partial M} \right)_{\lambda, \Lambda_c} \\ &= \mathcal{Z}_3^{-n/2} \Lambda_c \left(\frac{\partial \mathcal{Z}_3^{n/2}}{\partial \Lambda_c} \right)_{\lambda, M} \\ &= \frac{n}{2} \Lambda_c \mathcal{Z}_3^{-1} \left(\frac{\partial \mathcal{Z}_3}{\partial \Lambda_c} \right)_{\lambda, M} \end{aligned} \quad (19.10)$$

függvényeket. Megjegyezzük, hogy azért szoroztuk M -mel a (19.8) egyenlet bal oldalát, hogy a β_λ és $\gamma_{(n)}$ függvények dimenziótlanok legyenek. Emlékezzünk rá, hogy $\mathcal{Z}_1$ és $\mathcal{Z}_3$ a renormálás programjának végrehajtásakor tetszőleges rendben kiszámolható, s ennek következtében a β_λ és az ún. $\gamma_{(n)}$ anomális dimenzió is. A renormálási csoport egyenlet tehát az alábbi alakot ölti:

$$\left[M \frac{\partial}{\partial M} + \beta_\lambda \frac{\partial}{\partial \lambda_R} + \gamma_{(n)} \right] \Gamma_R^{(n)}(p, \lambda_R, M) = 0. \quad (19.11)$$

Skálázzuk most át ebben az egyenletben az összes impulzust felhasználva, hogy a Green-függvények legáltalánosabb alakja $\Gamma_R^{(n)}(p, \lambda_R, p^2/M^2)$. Ha az impulzusokat α -val szorozzuk, akkor

$$\Gamma_R^{(n)}(\alpha p, \lambda_R, \alpha^2 p^2/M^2) = \alpha^D \tilde{\Gamma}_R^{(n)}(p, \lambda_R, \alpha^2 p^2/M^2), \quad (19.12)$$

ahol D azt jelenti, hogy a vizsgált Green-függvény dimenziója [tömeg] D , továbbá $\tilde{\Gamma}_R^{(n)}$ dimenziótlan. Írjuk ezt be az (19.11) renormálási csoport egyenletbe. Miután α^D -vel egyszerűsítünk, az M szerinti deriválást α szerintire cseréljük:

$$\left[-\alpha \frac{\partial}{\partial \alpha} + \beta_\lambda \frac{\partial}{\partial \lambda_R} + \gamma_{(n)} \right] \tilde{\Gamma}_R^{(n)}(p, \lambda_R, \alpha^2 p^2/M^2) = 0. \quad (19.13)$$

Nem nehéz behelyettesítéssel ellenőrizni, hogy ennek az egyenletnek a megoldása

$$\bar{\Gamma}_R^{(n)}(p, \bar{\lambda}_R(p^2)) \exp \left\{ \int_M^{\alpha^2 p^2/M^2} \frac{dM'}{M'} \gamma_{(n)}(M') \right\} \quad (19.14)$$

alakú függvény, ahol a $\bar{\lambda}_R(M')$ ún. futó csatolási állandó a

$$M' \frac{\partial \bar{\lambda}_R(M')}{\partial M'} = \beta_\lambda(\bar{\lambda}_R(M')), \quad (19.15)$$

$$\bar{\lambda}_R(M' = M) = \lambda_R \quad (19.16)$$

kezdetiérték-feladat megoldása. A renormált Green-függvény M -függése teljesen belefoglalható a futó csatolási állandóba, hiszen a (19.11) egyenlet most felírt megoldását használva:

$$\Gamma_R^{(n)}(p', \lambda_R, p'^2/M^2) = \bar{\Gamma}_R^{(n)}(p', \bar{\lambda}_R(p'^2)) \exp \left\{ \int_M^{p'^2/M^2} \frac{dM'}{M'} \gamma_{(n)}(M') \right\}, \quad (19.17)$$

ahol $p' = \alpha p$, de erről most már el is felejtkezhetünk és írhatunk helyette p -t.

Oldjuk meg a futó csatolási állandóra vonatkozó (19.15) feladatot. Semleges skalártér esetén a perturbáció számítás második rendjében:

$$\beta_\lambda(\bar{\lambda}_R) = \frac{9}{2\pi^2} \bar{\lambda}_R^2. \quad (19.18)$$

Ezt behelyettesítve, elemi integrálás után kapjuk a futó csatolási állandót:

$$\bar{\lambda}_R(M') = \frac{\lambda_R}{1 - \frac{9}{2\pi^2} \lambda_R \ln(M'/M)} \quad (19.19)$$

Első ránézésre a futó csatolási állandó bevezetésével nem sokat nyertünk, hiszen az függ az önkényesen választott M renormálási ponttól és a csatolási állandó ott felvett értékétől. Kétségtelen tény azonban, hogy a futó csatolási állandó M' -nek olyan függvénye, hogy a Green-függvények M megváltoztatásakor változatlanok maradnak. A figyelmes vizsgálat azonban még ennél is többet mond. A futó csatolási állandót megadó (19.19) egyenletet rendezzük át:

$$\frac{1}{\bar{\lambda}_R(M')} + \frac{9}{2\pi^2} \ln M' = \frac{1}{\bar{\lambda}_R(M)} + \frac{9}{2\pi^2} \ln M \quad (19.20)$$

Ez az egyenlet azt fejezi ki, hogy a bal oldalon álló kifejezés az elméletben állandó M' tetszőleges értéke esetén. Másképpen fogalmazva, az elmélet fizikai tartalma akkor lesz invariáns a renormálási pont tetszőleges megváltoztatásával szemben, ha ennek során a csatolási állandót úgy változtatjuk meg, hogy a fenti kifejezés értéke állandó maradjon. Jelöljük ezt az állandót $9/(2\pi^2) \ln \Lambda$ -val. Ekkor a futó csatolási állandó

$$\bar{\lambda}_R(M) = \frac{2\pi^2}{9 \ln(\Lambda/M)} \quad (19.21)$$

alakot ölt.

A semleges önkölcsönható skalártér elméletében tehát nem létezik egy igazi, az elméletből következően állandó csatolási állandó. Helyette az elmélet egy belső energiaskálával rendelkezik, amelyet a Λ állandó definiál. Megjegyezzük még, hogy ebben az elméletben $\bar{\lambda}_R \rightarrow 0$, ha $M/\Lambda \rightarrow 0$, amely tulajdonságot úgy szokás nevezni, hogy infravörös szabadság. Ha a futó csatolási állandónak a Green-függvényekben játszott szerepére gondolunk, akkor ez azt jelenti, hogy a kis impulzusátadással járó folyamatokban a tér úgy viselkedik, mintha nem lenne önkölcsönható.

4. Milyen következményei vannak az előző pontban elmondottaknak a véges hőmérsékletű rendszerek térelméletében? A partíciós függvény logaritmus, $\ln Z_I$ pályaintegrálos definíciójánál fogva (ld. (6.2)) olyan, mint egy 0-pont Green-függvény. Az anomális dimenziója így zérus és a renormálási csoport egyenlet (19.14) megoldása értelmében ezért λ_R -et a futó $\bar{\lambda}_R$ csatolási állandóval kell $\ln Z_I$ -ben helyettesíteni. Az M renormálási pont megválasztása önkényes, és mint tudjuk, attól nem függ a partíciós függvény. Ez azonban csak akkor van így, ha az egzakt partíciós függvényről van szó. A gyakorlatban azonban mindig a perturbációs sor véges sok tagjával dolgozunk. Ilyenkor élve M megválasztásának szabadságával, azt úgy érdemes választani, hogy a magasabb rendű tagok járulékát minimálissá tegyük. Erre azonban nincsen megnyugtató általános érvényű eljárás. Pl. az önkölcsönható $m = 0$ tömegű skalártér esetén $M = cT$ plauzibilis választás, mert T az egyetlen fizikai energiaskála.

A várakozás az, hogy $c \sim \mathcal{O}(1)$. Ennek eldöntéséhez ki kellene számolni a partíciós függvényt λ^2 renddel bezárólag és vizsgálni kellene, meg lehet-e c -t úgy választani, hogy a másodrendű és az elsőrendű korrekció hányadosa minimális legyen.

Ha a nyomás 10. fejezetben kapott képletébe behelyettesítjük a futó csatolási állandót az $M = cT$ választással, akkor az nem triviálisan fog függni a hőmérséklettől:

$$P_{m=0} = T^4 \frac{\pi^2}{90} \left[1 - \frac{15}{8} \frac{2}{9 \ln(\Lambda/cT)} + \frac{15}{2} \left(\frac{2}{9 \ln(\Lambda/cT)} \right)^{3/2} + \dots \right]. \quad (19.22)$$

Amíg $T/\Lambda \rightarrow 0$ esetén a perturbatív közelítés használható (gyenge csatolás határeseté), addig $T/\Lambda \rightarrow 1$ esetén a perturbációs sor konvergenciája elromlik, mert a rendszer erősen csatoltá válik. Jelenleg nem tudjuk, hogyan is viselkedik ez a rendszer $T \sim \Lambda$ és magasabb hőmérsékleteken.

5. A kvantumelektrodinamikában a csatolási állandó szerepét $\alpha = e^2/4\pi$ játssza. A futó csatolási állandó az

$$M \frac{d\bar{\alpha}}{dM} = \beta_\alpha(\bar{\alpha}), \quad \bar{\alpha}(M_0) = \alpha_0 \quad (19.23)$$

kezdetiérték feladat megoldása $m = 0$ elektrontömeg esetén. Legalacsonyabb rendben

$$\beta_\alpha = \frac{2\pi}{3} \alpha^2, \quad (19.24)$$

úgyhogy ezt behelyettesítve, a futó csatolási állandóra

$$\bar{\alpha}(M) = \frac{\alpha_0}{1 - \frac{2}{3\pi} \alpha_0 \ln(M/M_0)} \quad (19.25)$$

adódik. A kvantumelektrodinamikában is létezik egy belső energiaskála. Jelöljük ezt Λ -val. Ekkor a futó csatolási állandó:

$$\bar{\alpha}(M) = \frac{3\pi}{2 \ln(\Lambda/M)}. \quad (19.26)$$

Véges hőmérsékletű elektrongáz esetén a futó csatolási állandót feltehetően M olyan értékénél érdemes a közelítés javítása érdekében használni, amely T és μ nagyságrendjébe esik, pl. $M = c_1 T + c_2 \mu$, ahol az együtthatók $\mathcal{O}(1)$ nagyságrendűek.

IV. KVANTUMSZÍNDINAMIKA VÉGES HŐMÉRSÉKLETEN

20 Kvantumszíndinamika

A kvarkok és gluonok közötti erős kölcsönhatás elmélete a kvantumszíndinamika. Ez az elmélet magyarázza meg a hadronok szerkezetét, ahogy a kvantumelektrodinamika magyarázatot ad az atomok szerkezetéről. Az atommagokban az anyag hadronok (nukleonok) alakjában, az ún. hadronikus fázisban van jelen. Ezt az jellemzi, hogy a színtöltést hordozó kvarkok színszinglett nukleonokba vannak bezárva. A színtöltést is hordozó gluonok közvetítik a kölcsönhatást a kvarkok között. Mivel a gluonok is hordoznak színtöltést, ezért kölcsönhatnak egymással is. Ez lényeges különbség az elektrodinamikához képest, ahol a fotonter részecskéi nem hordoznak elektromos töltést és ezért a fotonok nem hatnak egymással kölcsön. Matematikailag a különbség abból ered, hogy a kvantumelektrodinamika $U(1)$, azaz ábeli mértékelmélet, míg a kvantumszíndinamika úgynevezett nemábeli mértékelmélet. A kétféle típusú mértékelmélet nagyon lényeges fizikai különbségek elméleti modelljét képes adni. Az elektronok kellő nagy energia közlésével (ionizációs energia) kiszabadíthatók az atomi kötött állapotukból, és megfigyelhetők kísérletileg, mint aszimptotikusan szabad részecske-állapotok. Másrészt az elektromágneses kölcsönhatás effektív csatolási állandója növekvő energiájú kísérletekben nagyobbak bizonyul. Ezekkel ellentétben, a kvarkok nem szabadíthatók ki a hadronok kötelékéből. Pl. ha egy protont nagyon nagy energiájú elektronokkal bombázunk, amelyekre nem hat az erő kölcsönhatás, akkor sem tudunk a protonból egy szabad kvarkot kiutni. Ehelyett az történik, hogy amikor a meglökött kvark elkezd „kifelé mozogni” a protonból, akkor közte és a proton másik két kvarkja között egyre nagyobb térenergia halmozódik fel a gluontérben, és még mielőtt a meglökött kvark el tudná hagyni a proton kb. 1 fm sugarú tartományát, a felhalmozódott térenergia rovására kvark-antikvark pár keletkezik. Utóbbi antikvarkja a meglökött kvarkkal egy új részecskét, legvalószínűbben piont alkot. A keltett pár kvarkja pedig helyreállítja a protont (a korábbinál kevésbé gerjesztet, vagy alapállapotban). Eközben a keltett pár kvarkja és antikvarkja között a gluontér leárnyékolódik, úgyhogy a folyamat vége az, hogy a proton visszamaradt és keltődött egy pion. Ezt a tényt, hogy a tapasztalat szerint nem lehet a hadronokból szabad kvarkot kinyerni, kvarkbezárásnak nevezzük. Az a remény, hogy a kvantumszíndinamika alkalmas a kvarkbezárás megértésére. A másik lényeges különbség az elektromágneses és az erős kölcsönhatás között az, hogy utóbbiban a kölcsönhatás effektív csatolási állandója az energia növekedtével egyre gyengül. Ezt a jelenséget aszimptotikus szabadságnak nevezzük.

Egy további érdekes kérdés, hogy hogyan viselkedik egy magas hőmérsékletű és/vagy nagy sűrűségű kvark-gluon rendszer. Mivel szabad színtöltéseket nem sikerült mindeddig megfigyelni, és valószínűleg ilyenek elvileg sem létezhetnek, azért beszéljünk egy összességében színsemleges kvark-gluon rendszerről. A kvantumelektrodinamikai analóg eset a magas hőmérsékletű, nagy sűrűségű, zérus össztöltésű elektron-pozitron-foton rendszer, amit globálisan semleges elektron-pozitron plazmának nevezünk. En-

nek létrejöttét elméletben elképzelhetjük úgy, hogy egy üreget feketetest-sugárzás tölt ki. Ha olyan nagyra emeljük a környezet hőmérsékletét, hogy $k_B T$ nagyobb lesz, mint egy elektron-pozitron pár keltéséhez szükséges energia, $2m_e c^2 = 2 \cdot 511$ keV, akkor a jelentősen megnő azon fotonok száma, amelyek energiája elegendő az elektron-pozitron párkeltés beindulásához. A fotonok energia-eloszlásának azonban mindig „végtelen hosszú” a nagyenergiás farka, ezért a folyamat nem egy éles hőmérsékleten megy végbe, hanem a hőmérséklet növelésével folyamatosan, monoton nő az elektronok és a pozitronok sűrűsége a plazmában. Valóságosan könnyebb a folyamatot úgy elképzelni, hogy semleges atomok alacsony hőmérsékletű gáza a kezdeti állapot. Aztán elkezdjük növelni a hőmérsékletet. Először az történik, hogy az atomok termikus gerjesztés elkezdnek ionizálódni, majd amikor a $k_B T$ „hőmérséklet” erősen meghaladja az ionizációs energiát (kb. 10 keV nagyságrendet), akkor pozitív ionokat és elektronokat tartalmazó, elektromosan semleges plazmát kapunk. Ha ezek után még tovább növeljük a hőmérsékletet a $k_B T \approx 2m_e c^2$ értékre, ill. fölé, akkor beindul az elektron-pozitron párok képződése. Amit így kapunk az a pozitív ion háttér mellett megvalósuló olyan elektron-pozitron plazma, amelynek negatív össztöltését a pozitív ionok rendszerének pozitív töltése kompenzálja.

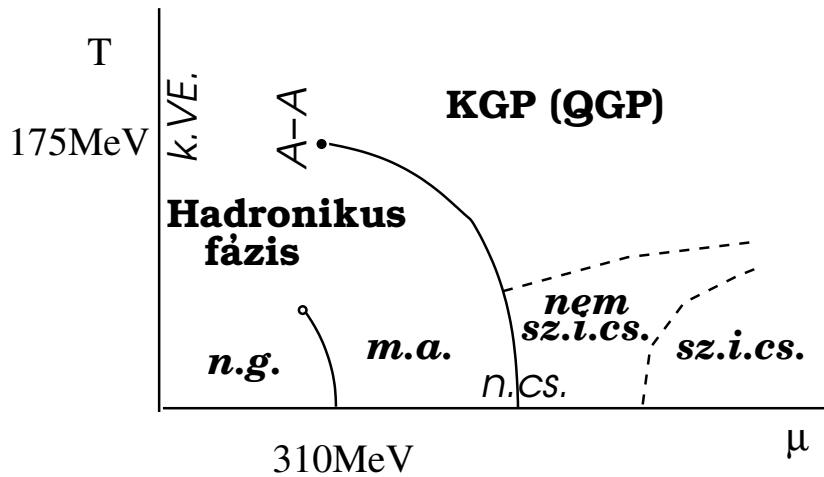


Figure 5: A hadronikus anyag fázisdiagrammja. A rövidítések: n.g.=nukleonok gáza, m.a.=maganyag, n.cs.=neutroncsillagok, sz.i.cs.=szín-zamat-csatolt fázis, nem sz.i.cs.=nem szín-zamat-csatolt fázis, KGP(QGP)=kvarkgluon-plazma, A – A =nehézion-ütközések, k.V.E.=korai Világegyetem. Az üres és a tömör karika kritikus pontot jelöl.

Mi a helyzet a kvark-gluon rendszer hőmérsékletének növelése során? Azt a kérdést tehetjük fel, hogy ha veszünk egy hadrongázt, amely színsemleges hadronokból és a köztük levő vákuumból áll (ld. a 5. ábrán az n.g. tartományt), és elkezdjük növelni ennek a rendszernek a T hőmérsékletét (és/vagy sűrűségét, ill. ami nagyjából ugyanezt jelenti, a μ bariokémiai potenciálját), akkor mi fog történni? A rácson végzett kvantumszindinamikai számolások egyik jóslata az, hogy akár a hőmérséklet,

akár a bariokémiai potenciál, vagy mindkettő növelésével a kvarkokat bezáró színszinglett zsákok felszakadhatnak. Ezáltal a kvarkok szabaddá válhatnak az anyag egész térfogatában. Az anyag a hadronikus fázisból az úgynevezett kvarkgluon-plazma fázisba kerül. A 5 ábrán azt is feltüntettük, hogy a hadrongáz és a maganyag között alacsony hőmérsékleten és nyomáson megfigyelték közepes-energiájú nehézion-ütközésekben a folyadék-gáz típusú elsőrendű fázisátalakulást, amely az ábrán üres karikával jelölt kritikus pontban másodrendűvé válik. A 310 MeV-os bariokémiai potenciál a normál maganyag ($T=0$) ≈ 1 nukleon/ fm^3 sűrűségének felel meg. Látjuk, hogy kb. ezen az alacsony sűrűségen (bariokémiai potenciál értéken) a hadronikus fázisból a kvarkgluon-plazma fázisba történő fázisátalakulás kb. 175 MeV hőmérsékleten ($\approx 10^{12}$ K) következik be (ez kb. a kvantumszíndinamika Λ_{QCD} energiaskálájának a nagysága). Alacsony hőmérsékleten a fázisátalakulás az elméleti előrejelzés szerint kb. 400 MeV bariokémiai potenciálon következik be. A korai Világegyetem jelen ismereteink szerint valószínűleg egy alacsony bariokémiai potenciálú, de forró rendszer volt. A mai nagyenergiás nehézion-ütközésekben is kicsiny bariokémiai potenciálú, forró hadronikus anyag hozható létre; a létrehozott energiasűrűség kb. annak felel meg, amekkora az az Ős robbanás után $20 \mu\text{s}$ -mal uralkodhatott a Világegyetemben. A CERN SPS gyorsítóján észlelték először ilyen nagyenergiás nehézion-ütközésekben „az anyag egy új fázisa” keletkezésének jeleit. A kísérleteket részben a Brookhaven National Laboratoryban a RHIC-en (Relativisztikus Nehézion Ütköztető (Relativistic Heavy Ion Collider)), részben a CERN-ben az LHC-n (Nagy Hadron Ütköztető (Large Hadron Collider)) azóta is folynak. A cél egyrészt annak tisztázása, hogy milyenek a felfedezett fázis fizikai tulajdonságai. Minden jel arra utal (ld. a CERN 2010-ben nyilvánosságra hozott eredményei), hogy az nem kvarkok és gluonok ideális gáza, hanem egy sűrű ideális („perfect”) folyadék. Sajnos a jelenlegi kísérletek nem teszik lehetővé az anyag tulajdonságainak nagy bariokémiai potenciál melletti kísérleti vizsgálatát. A Standard Modellen alapuló elméleti előrejelzés alapján az várható, hogy nagyon nagy bariokémiai potenciál és alacsony hőmérséklet esetén egy szín-íz csatolt fázis jön létre, amelyben a kvarkok Cooper-párokat alkotnak és azokban egymással szoros korrelációban (kölcsonösen egyértelmű megfeleltetésben) lévő szín- és íz-állapotban találhatók. Valószínűleg a hadronikus fázist és a szín-íz csatolt fázist egy nem szín-íz csatolt átmeneti fázis választja el, amelynek tulajdonságait egyelőre nem ismerjük és előrejelezni se tudjuk. Az elmondottak mindenesetre talán elegendők ahhoz, hogy érdemesnek tartsuk a megismerkedést a véges hőmérsékleti kvantumszíndinamika alapjaival.

Tegyük fel, hogy a gluontér $SU(N)$ lokális mértékszimetriával rendelkezik. (A valóságban $N = 3$ és az $SU(3)$ színszimmetria felel a gluonok által a kvarkok között közvetített erős kölcsönhatásért.) A gluontér a mértékcsoport adjungált ábrázolását valósítja meg, ezért komponensei: A_μ^a , ahol $a = 1, 2, \dots, N^2 - 1$. Ugyanakkor a ψ kvarktér a mértékcsoport alapábrázolása szerint transzformálódik. Az $SU(N)$

csoport G^a generátorai a

$$[G^a, G^b] = if^{abc}G^c \quad (20.1)$$

kommutátorrelációkat elégítik ki. Alapábrázolásban a generátorokat a λ^a Gell-Mann-mátrixok ábrázolják: $G^a \rightarrow \lambda^a/2$. Az $\omega^a(x)$ infinitezimális paraméterekkel adott lokális mértéktranszformáció

$$\psi \rightarrow \exp\{i\frac{\lambda^a}{2}\omega^a(x)\}\psi, \quad (20.2)$$

$$A_\mu^a \rightarrow A_\mu^a - \partial_\mu\omega^a + gf^{abc}A_\mu^b\omega^c \quad (20.3)$$

alakú.

Minkowski-térben a kvantumszindinamika Lagrange-sűrűsége:

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}(i\not{\partial} - m - g\not{A}^a\frac{\lambda^a}{2})\psi - \frac{1}{4}F^{\mu\nu a}F_{\mu\nu}^a \quad (20.4)$$

Ennek megfelelően az euklideszi hatás:

$$S_E = -\int_0^\beta \int d^3x \left[\bar{\psi} \left(-\gamma^0 \partial_\tau + i\vec{\gamma}\vec{\nabla} - m - g\frac{\lambda^a}{2}(\gamma^0 iA_0^a - \vec{\gamma}\vec{A}^a) \right) \psi - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}^a F_{\mu\nu}^a \right], \quad (20.5)$$

ahol a térerősség tenzora:

$$F_{\mu\nu}^a = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu + gf^{abc}A_\mu^b A_\nu^c \quad (20.6)$$

a $\partial_0 \rightarrow -i\partial_\tau$, $A_0 \rightarrow iA_0$ helyettesítéssel.

A mértékinvariáns partíciós függvényt hasonlóan definiáljuk, mint a kvantum-elektrodinamikában. Írjuk elő az

$$F^a[A_\mu^a, \partial_\mu A_\mu^a] = \partial_\mu A_\mu^a - c^a(c) = 0 \quad (20.7)$$

kovariáns mértékfeltételt a gluontérre, ahol $c^a(x)$ tetszőleges, a τ változóban periodikus függvények. Ekkor a partíciós függvény:

$$Z = \int_{\text{per.}} [dA_\mu^a][d\bar{\psi}][d\psi]\Delta[A_\mu^a]\delta[F^a]e^{-S_E}. \quad (20.8)$$

Itt a Δ funkcionált az

$$1 = \Delta[A_\mu^a] \int [d\omega^a] \delta[(F^\omega)^a] \quad (20.9)$$

egyenlet definiálja, ahol $[d\omega^a]$ az $SU(N)$ csoport feletti invariáns integrálási mérték. Hasonlóan, mint a kvantumelektrodinamikában, a Δ funkcionál egy determinánssal egyenlő:

$$\Delta[A_\mu^a] = \det \frac{\delta(F^\omega(x))^a}{\delta\omega^b(y)}|_{\omega=0}. \quad (20.10)$$

Ez most is annak a diszkrét szín- és folytonos térindexeket hordozó mátrixnak a determinánsa, amelyet a mértékfeltételnek a lokális mértékparaméter szerinti funkcionál-deriválásával kapunk, és a determinánst ismét a mértékparaméter azonosan nulla értékénél kell venni. Infinitézimális mértéktranszformáció során a mértékfeltétel

$$F^a \rightarrow (F^\omega)^a = F^a + \partial_\mu(-\partial_\mu\omega^a + gf^{abc}A_\mu^b\omega^c) \quad (20.11)$$

módon transzformálódik, ezért:

$$\frac{\partial(F^\omega)^a}{\partial\omega^b} = -\partial_\mu\partial_\mu\delta^{ab} + gf^{acb}\partial_\mu A_\mu^c. \quad (20.12)$$

A determináns most is kifejezhető szellemterek szerinti útintegrál alakjában. A gluontér valamennyi $a = 1, 2, \dots, N_g$ színkomponensének megfelelően be kell vezetni a Grassmann-értékű C^a , $\bar{C}^a$ tereket. Ezek kompenzálják a gluontér valamennyi színkomponensében a nem fizikai, nem transzverzális szabadsági fokokat. A Δ funkcionál a következő alakot ölti:

$$\begin{aligned} \Delta[A_\mu^a] &= \int_{\text{per.}} [d\bar{C}^a][dC^a] \exp \left\{ - \int_0^\beta d\tau \int d^3x \bar{C}^a(x) \frac{\partial(F^\omega)^a}{\partial\omega^b} C^b(x) \right\} \\ &= \int_{\text{per.}} [d\bar{C}^a][dC^a] \exp \left\{ - \int_0^\beta d\tau \int d^3x \left[-\bar{C}^a \partial_\mu \partial_\mu C^a + \bar{C}^a g f^{abc} (\partial_\mu A_\mu^b) C^c \right] \right\}. \end{aligned} \quad (20.13)$$

Ha ezt behelyettesítjük a partíciós függvénybe, akkor látjuk, hogy a szellemterek a gluontérrel kölcsönhatnak. Ez lényeges változás a kvantumelektrodinamikához képest, amikor a szellemterek a kölcsönhatást nem befolyásolták, hanem csak a vákuum tulajdonságait. A különbség oka, hogy a gluontér nem ábeli mértéktér.

Miután a Δ funkcionált behelyettesítettük a partíciós függvénybe, a Dirac-delta funkcionáloktól is megszabadulhatunk, ha szorozzuk a partíciós függvényt az

$$\exp \left\{ - \frac{1}{2\rho} \int_0^\beta d\tau \int d^3x c^a(x) c^a(x) \right\} \quad (20.14)$$

faktorral és integrálunk az összes lehetséges $c^a(x)$ függvényre. Az eredmény az, hogy az euklideszi hatásban megjelenik a $-(\partial_\mu A_\mu^a)^2/(2\rho)$ tag. Itt a $0 \leq \rho \leq 1$ mértékparaméter tetszőleges, csakúgy mint a kvantumelektrodinamikában.

Mindezek után a kvantumszindinamika partíciós függvénye:

$$Z = \int [dA_\mu^a][d\bar{\psi}][d\psi][d\bar{C}^a][dC^a] \exp \{-S_{QCD}\}, \quad (20.15)$$

ahol az effektív hatás:

$$\begin{aligned} -S_{QCD} = & -S_E + \int_0^\beta \int d^3x \left[-\frac{1}{2\rho} (\partial_\mu A_\mu^a)^2 + \bar{\psi} \mu \gamma^0 \psi \right. \\ & \left. + g f^{abc} \bar{C}^a (\partial_\mu A_\mu^b) C^c + (\partial_\mu \bar{C}^a) (\partial_\mu C^a) \right]. \end{aligned} \quad (20.16)$$

Az effektív hatást felírhatjuk a szabad terek S_0 hatása és a kölcsönhatást leíró S_I hatás összegeként:

$$S_{QCD} = S_0 + S_I, \quad (20.17)$$

ahol

$$\begin{aligned} S_0 = & - \int_0^\beta d\tau \int d^3x \left[\bar{\psi} (i\gamma^\mu \partial_\mu - m + \mu \gamma^0) \right. \\ & - \frac{1}{4} (\partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a)^2 - \frac{1}{2\rho} (\partial_\mu A_\mu^a)^2 \\ & \left. + (\partial_\mu \bar{C}^a) (\partial_\mu C^a) \right], \end{aligned} \quad (20.18)$$

és

$$\begin{aligned} S_I = & - \int_0^\beta d\tau \int d^3x \left[-g \bar{\psi} \frac{\lambda^a}{2} \gamma^\mu A_\mu^a \psi \right. \\ & - g f^{abc} A_\mu^b A_\nu^c \partial_\mu A_\nu^a - \frac{1}{4} g^2 f^{abc} f^{ade} A_\mu^b A_\nu^c A_\mu^d A_\nu^e \\ & \left. + g f^{abc} \bar{C}^a (\partial_\mu A_\mu^b) C^c \right], \end{aligned} \quad (20.19)$$

ahol mindig el kell végezni a $\partial_0 \rightarrow -i\partial_\tau$ és $A_0^a \rightarrow iA_0^a$ helyettesítéseket.

A partíciós függvény ismeretében megkaphatjuk a Feynman-szabályokat, hasonlóan mint a kvantumelektrodinamika esetén. Célszerű formálisan áttérni megint Minkowski-változókra a négyes-impulzus nulladik komponensének alábbi megválasztásával:

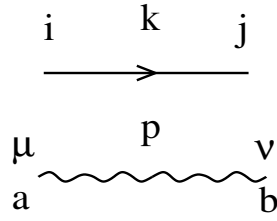
$$p_0 = i\omega_n = i2\pi nT \quad \text{gluonokra,} \quad (20.20)$$

$$q_0 = i\omega_n = i2\pi nT \quad \text{szellemtérre,} \quad (20.21)$$

$$k_0 = i\omega_m + \mu = i(2m+1)\pi T + \mu \quad \text{kvarokra.} \quad (20.22)$$

A Feynman-szabályokat az alábbiakban foglaljuk össze:

1. Kvar-propagátor:



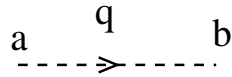
$$\mathcal{G}_{\alpha\beta} = \frac{\delta_{ij}}{\not{k} - m}, \quad (20.23)$$

ahol $i, j = 1, 2, 3$ az $SU(3)$ színcsoport alapábrázolásának megfelelő színkomponenseket indexeli (a Dirac-indexeket az egyszerűség kedvéért nem írtuk ki).

2. Gluon-propagátor:

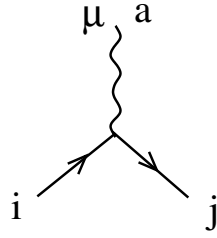
$$\mathcal{D}_{ab}^{\mu\nu} = \frac{\delta_{ab}}{p^2} \left(g^{\mu\nu} - \frac{(1 - \rho)p^\mu p^\nu}{p^2} \right). \quad (20.24)$$

3. Szellem-propagátor:



$$\mathcal{W}_{ab} = \frac{\delta_{ab}}{q^2}. \quad (20.25)$$

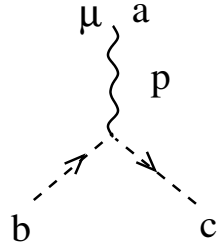
4. A (gluon-2-kvark)-vertex:



$$= -g\gamma^\mu (G^a)_{ij}, \quad (20.26)$$

ahol $(G^a)_{ij}$ a színcsoport generátorai az alapábrázolásban.

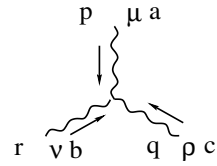
5. A (gluon-2-szellem)-vertex:



$$= -igf_{abc}p_\mu. \quad (20.27)$$

Itt $f_{abc} = (G^a)_{bc}$ a generátorok mátrixai az adjungált ábrázolásban, a mátrixelemek az antiszimmetrikus struktúra-állandókkal azonosak.

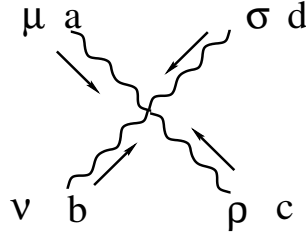
6. A (3-gluon)-vertex:



$$= -igf_{abc}[g_{\nu\rho}(r-q)_\mu + g_{\mu\nu}(p-r)_\rho + g_{\rho\mu}(q-p)_\nu], \quad (20.28)$$

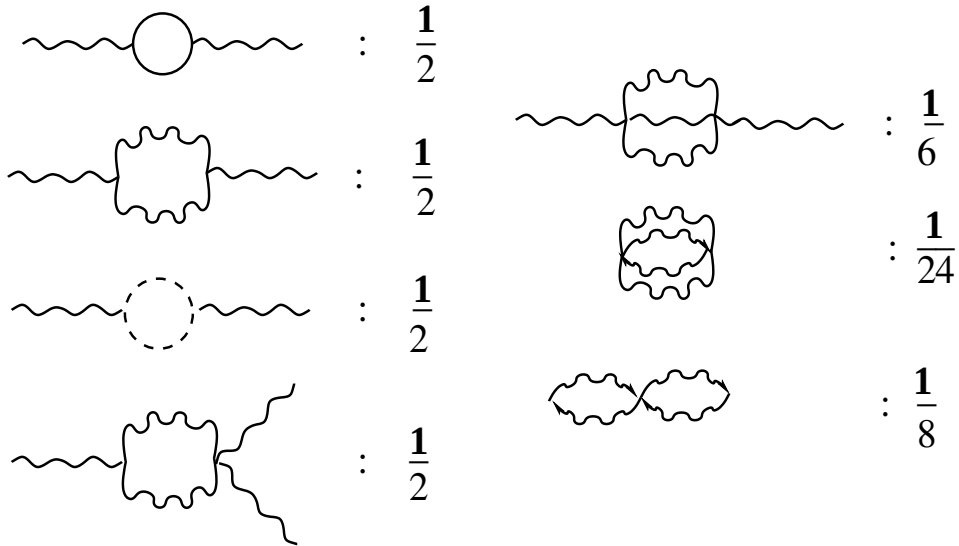
ahol a zárójeles kifejezés második és harmadik tagját ciklikus permutációval kapjuk az első tagból.

7. A (4-gluon)-vertex:



$$= -g^2 [f_{ade}f_{ebc}(g_{\mu\nu}g_{\rho\sigma} - g_{\mu\rho}g_{\nu\sigma}) + f_{abe}f_{edc}(g_{\mu\sigma}g_{\nu\rho} - g_{\mu\rho}g_{\nu\sigma}) + f_{ace}f_{edb}(g_{\mu\sigma}g_{\nu\rho} - g_{\mu\nu}g_{\rho\sigma})]. \quad (20.29)$$

További szabály, hogy minden zárt fermion-hurok és szellem-hurok egy (-1) faktort eredményez. Ezen kívül kombinatorikai faktorok lépnek fel:



Most is érvényes Furry tétele, hogy a kvarktér és a szellemtér által képezett 'békalencse' eltűnik:

$$\text{wavy line with circle loop} = 0, \quad \text{wavy line with dashed circle loop} = 0.$$

21 Az aszimptotikus szabadság

A kvarkok és a gluonok közötti erős kölcsönhatás egyik jellegzetes vonása, hogy a futó csatolási állandó nagy impulzusátadáással járó folyamatokban kicsivé válik.

Mivel nagy hőmérsékletű kvarkgluon-plazmában a részecskék átlagos impulzusa várhatóan nagy, ezért remélhetjük, hogy az aszimptotikus szabadság miatt kis effektív csatolási állandóval kell számolnunk. Így a forró kvarkgluon-plazma állapot-egyenlete tárgyalható a perturbációs számítás módszerével. A magas hőmérséklet azt jelenti, hogy $T \gg \Lambda_{QCD}$, ahol Λ_{QCD} a kvantumszíndinamika belső energiaskáláját megadó paraméter. Értéke a kísérletek analízise alapján $\Lambda_{QCD} \sim 100 - 200$ MeV. A nem perturbatív, rácstérelméleti jóslatok szerint kb. $T \approx \Lambda_{QCD}$ hőmérsékleten megy végbe a barionritka hadronikus anyag fázisátalakulása kvarkgluon-plazmává. A nehézion-reakciókban is kb. ilyen hőmérséklet érhető el a legnehezebb atommagok centrális ütközése és 0.1 - 1 TeV nukleononkénti bombázó energia esetén. Ez azt jelenti, hogy a hadronikus anyag fázisátalakulása kvarkgluon-plazmává nem tanulmányozható az itt leírt perturbatív módszerrel.

A kvantumszíndinamikában a csonkított Green-függvényekre hasonló renormálási csoport egyenlet érvényes mint a kvantumelektrodinamikában vagy az önkölcsönható skalártér esetében. Legyen $\Gamma^{n,n'}$ egy n darab gluonlábbal és n' kvarklábbal rendelkező csonkított Green-függvény. Renormálás után ez függ általában a g renormált csatolási állandótól, az M renormálási pont választásától, és a ρ mértékparamétertől. Tegyük fel, hogy a kvarktömeg valamennyi N_f íz esetén $m_f = 0$. A renormálási csoport egyenlet:

$$\left[M \frac{\partial}{\partial M} + \beta(g, \rho) \frac{\partial}{\partial g} + \delta(g, \rho) \frac{\partial}{\partial \rho} + n\gamma_A(g, \rho) + n'\gamma_\psi(g, \rho) \right] \Gamma_R^{n,n'}(p_1, \dots, p_{n+n'}; g, \rho, M) = 0. \quad (21.1)$$

A mértékparamétertől való függést megadó $\delta(g, \rho)$ függvény a

$$\delta(g, \rho) = 2\rho\gamma_A(g, \rho) \quad (21.2)$$

összefüggésnek tesz eleget a Ward-Takahashi-azonosságok következményeként. Ez azt jelenti, hogy a $\rho = 0$ Landau-mértékben $\delta(g, 0) = 0$ marad, akárhogy kell változnia a csatolási állandónak a renormálási pont megváltoztatásakor. Ha Landau-mértéket választottunk, akkor a renormálási csoport transzformációi során nem kell még mértéktranszformációt is végrehajtanunk. Ha azonban bármilyen más mértéket választunk, akkor a renormálási csoport transzformációi kivezetnek ebből a mértékből és így egy mértéktranszformáció végrehajtása is szükséges, hogy az eredeti mértékben maradjunk.

A renormálási csoport egyenletben szereplő függvényeket legalacsonyabb el nem tűnő rendben az alábbi kifejezések adják meg:

$$\gamma_A = \frac{g^2}{16\pi^2} \left[\left(\frac{13}{6} - \frac{1}{2}\rho \right) N - \frac{2}{3}N_f \right] \quad (21.3)$$

$$\gamma_\psi = -\frac{g^2}{16\pi^2} \rho N, \quad (21.4)$$

$$\beta = -\frac{g^3}{48\pi^2}(11N - 2N_f). \quad (21.5)$$

A fenti egy-hurok közelítésben β független a ρ mértékparamétertől. Ezért ilyen közelítésben a futó csatolási állandó sem függ ρ -tól. A futó csatolási állandót a

$$M \frac{\partial \bar{g}}{\partial M} = \beta(\bar{g}) \quad (21.6)$$

egyenlet megoldásaként kapjuk meg. A megoldás:

$$\bar{\alpha} = \frac{\bar{g}^2}{4\pi} = \frac{12\pi}{(11N - 2N_f) \ln(M^2/\Lambda_{QCD}^2)}. \quad (21.7)$$

Most is be lehetett vezetni egy belső energiaskálát definiáló Λ_{QCD} energiaparamétert, mint ahogy a kvantumelektrodinamikában vagy az önkölcsönható skalártér esetén.

A futó csatolási állandó zérushoz tart, ha $M/\Lambda_{QCD} \rightarrow \infty$. Ezt a tulajdonságot nevezzük aszimptotikus szabadságnak. Az aszimptotikus szabadság a nem ábeli mértékelméletek tulajdonsága. A kvantumelektrodinamikában más a helyzet. Ott $M/\Lambda \rightarrow 1$ esetén a futó csatolási állandó minden határon túl nő (legalább is egy-hurok közelítésben), és $M/\Lambda \rightarrow 0$ esetén vesz fel kis értékeket.

Általában magasabb rendben $\beta(g, \rho)$ függ ténylegesen a ρ mértékparamétertől. A fizikai mennyiségek, mint pl. a termodinamikai potenciál, azonban nem függhetnek tőle. Ez úgy lehetséges, hogy a futó csatolási állandó megfelelő módon függ ρ -tól, ami biztosítja az alábbi egyenlet teljesülését:

$$0 = \frac{d}{d\rho} \Omega(\bar{g}(\rho), \rho) = \left(\frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{\partial \bar{g}}{\partial \rho} \frac{\partial}{\partial \bar{g}} \right) \Omega(\bar{g}(\rho), \rho). \quad (21.8)$$

22 A kvarkgluon-plazma állapotegyenlete

Magas hőmérsékleten és nagy sűrűségeen az aszimptotikus szabadság következtében remélhetjük, hogy a kvarkgluon-plazma állapotegyenlete jól közelíthető perturbatív módszerrel. Nulladik közelítésben N_g fajta gluon és N fajta (színű) kvark ideális gázával van dolgunk. Az 5. fejezet és a 13. fejezet eredményeit felhasználva a kvarkgluon-plazma nyomása ideális gáz közelítésben:

$$P_0 = \frac{\pi^2}{45} N_g T^4 + N \sum_f \frac{1}{3\pi^2} \int_0^\infty \frac{dp p^4}{(m_f^2 + p^2)^{1/2}} n(p), \quad (22.1)$$

ahol a második tagban az összegzés az ízekre történik, és m_f az f -edik ízű kvark nyugalmi tömege. Ha feltesszük, hogy valamennyi ízre $m_f = 0$, akkor a nyomás

fermionikus járuléka kiintegrálható azzal a módszerrel, amelyet a 17. fejezet végén ζ kiszámolására használtunk:

$$P_{0F}(m_f = 0) = N \sum_f \left(\frac{7\pi^2 T^4}{180} + \frac{\mu_f^2 T^2}{6} + \frac{\mu_f^4}{12\pi^2} \right). \quad (22.2)$$

Itt érdemes emlékeznünk rá, hogy a kísérletileg megtalált fázis sűrű ideális folyadék fizikai tulajdonságait hordozza és nem pedig ideális gázéit. Ez jelentheti azt, hogy a kísérletekben megvalósuló hőmérséklet még nem elég magas ahhoz, hogy az anyag ideális gázhoz hasonlóan viselkedjen, vagy nem igaz az az aszimptotikus szabadság dacára sem, hogy alkalmazni lehet a partíciós függvény perturbációs sorfejtését. Ennek ellenére is tanulságos végiggondolni, hogy milyen eredményt ad a perturbatív megközelítés a kvarkgluon-plazma állapotegyenletére.

A g^2 -rendű kicserélődési korrekció a partíciós függvény logaritmusához az alábbi diagrammokból adódik:

$$\ln Z_I^{(2)} = -\frac{1}{2} \text{ (diagram 1) } - \frac{1}{2} \text{ (diagram 2) } + \frac{1}{12} \text{ (diagram 3) } + \frac{1}{8} \text{ (diagram 4) } \quad (22.3)$$

A diagrammok kiszámolása során a renormálás ugyanúgy történik, mint a kvantum-elektrodinamikában:

$$\begin{aligned}
\ln Z_{\text{IR}}^{(2)} = & -\frac{1}{2} \left[\text{diagram 1} - 2 \text{diagram 2} - \text{diagram 3} \right] \\
& -\frac{1}{2} \left[\text{diagram 4} - 2 \text{diagram 5} - \text{diagram 6} \right] \\
& + \frac{1}{12} \left[\text{diagram 7} - 3 \text{diagram 8} \right] \\
& + \frac{1}{8} \left[\text{diagram 9} - 2 \text{diagram 10} \right]
\end{aligned}$$

(22.4)

Az első sorban szereplő járuléka a kvantumelektrodinamikában is fellépett. Csak annyi a különbség, hogy most az $e^2 \rightarrow g^2 \text{Tr}(\lambda^a/2)^2 = N_g g^2/2$ helyettesítéssel kell élni a (17.45) képletben. A többi diagramm járuléka a nyomáshoz:

$$P_2^{gl} = -\frac{g^2}{144} N N_g T^4. \quad (22.5)$$

Mivel a gluonok nyugalmi tömege zérus az eredeti (renormálatlan) Lagrange-sűrűségben, a következő korrekció nem g^4 -rendű, hanem $T = 0$ esetén $g^4 \ln g^2$ -rendű, $T > 0$ esetén g^3 - és $g^4 \ln g^2$ -rendű. Ezek a járulékok az infravörös divergenciák felösszegzésével adódnak. A megfelelő gyűrűdiagrammok:

$$\ln Z_1^{\text{gy}} = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{2} \text{diagram 1} - \frac{1}{3} \text{diagram 2} + \dots \right], \quad (22.6)$$

ahol a gluonsajátenergiát egy-hurok közelítésben számoljuk:

$$\begin{aligned}
& \text{Diagram with } \Pi \text{ in a circle} = \text{Diagram with empty circle} + \text{Diagram with dashed empty circle} \\
& \quad - \frac{1}{2} \text{Diagram with gluon loop and wavy line} - \frac{1}{2} \text{Diagram with gluon loop and dashed line}
\end{aligned}$$

(22.7)

A nyomás g^3 -rendű korrekciója:

$$P_{\text{gy}}^{(1)} = \frac{N_g}{12\pi} T m_{el}^3, \quad (22.8)$$

ahol az elektromos 'tömeget'

$$\begin{aligned}
m_{el}^2 &= F(n=0, \vec{k} \rightarrow 0) \\
&= g^2 \left(\frac{1}{3} N T^2 + \frac{1}{2\pi^2} \sum_f \int_0^\infty \frac{dp}{E_p} (p^2 + E_p^2) n(p) \right)
\end{aligned} \quad (22.9)$$

összefüggés adja meg. Ennek és az F függvénynek a jelentésére és a polarizációval való kapcsolatára még visszatérünk. Ha valamennyi kvark tömege zérus, akkor

$$m_{el}^2 = g^2 \left[\left(\frac{1}{3} N + \frac{1}{6} N_f \right) T^2 + \frac{1}{2\pi^2} \sum_f \mu_f^2 \right]. \quad (22.10)$$

Ha az F függvény impulzus szerinti sorfejtésében a lineáris tagot is figyelembe vesszük, akkor még egy olyan ($g^4 \ln g^2$)-rendű korrekciót is kapunk, amelyhez hasonló a kvantumelektrodinamikában nem lép fel. A további korrekciók számolása komoly technikai nehézséget jelent.

Az állapotegyenlet jobb közelítése érdekében a fenti képletekben a csatolási állandót a futó csatolási állandóval érdemes helyettesíteni. A futó csatolási állandót kézenfekvő olyan tömegértéknél (M) venni, amely megfelel az átlagos átadott impulzusnak. Ha pl. egy tiszta gluongázt tekintünk, akkor használhatjuk a

$$M^2 \approx \langle p^2 \rangle = (3.2T)^2 \quad (22.11)$$

becslést, ahol az átlagolást az ideális gluongáz Bose-Einstein-eloszlása szerint végeztük.

V. DEBYE-ÁRNYÉKOLÁS. PLAZMAHULLÁMOK

23 Egyensúlyi állapotukból gyengén kitérített rendszerek

Az eddigiekben az egyensúlyi rendszerek állapotegyenletének meghatározásával foglalkoztunk. Most azt fogjuk vizsgálni, mi történik egy rendszerben, ha egyensúlyi állapotából egy gyenge külső perturbáció kitéríti. A statisztikus fizika elemeiből tudjuk, hogy a rendszerben a fizikai mennyiségek időbeli változását ilyenkor az egyensúlyi rendszer korrelációs függvényei szabják meg. Ha a fizikai rendszert kvantált terekkel írjuk le, akkor lényegében ugyanez a helyzet. A korrelációkról a valós idejű Green-függvények adnak számot.

Tegyük fel, hogy a rendszer Hamilton-operátora eredetileg $\hat{H}$. Legyen $\hat{H}_k(t)$ az időfüggő perturbáció Hamilton-operátora. Akkor a rendszer teljes Hamilton-operátora $\hat{H}'(t) = \hat{H} + \hat{H}_k(t)$. Tegyük fel, hogy a külső perturbációt $t = t_0$ pillanatban kapcsoljuk be, azaz $\hat{H}_k(t) = 0$ ha $t < t_0$. Vizsgáljuk az $\hat{Y}(\vec{x}, t)$ fizikai mennyiség időbeli változását. Heisenberg-képben a mozgásegyenlet:

$$\frac{\partial \hat{Y}(\vec{x}, t)}{\partial t} = i[\hat{H}'(t), \hat{Y}(\vec{x}, t)]. \quad (23.1)$$

Legyen $[|j\rangle]$ a perturbálatlan $\hat{H}$ Hamilton-operátor sajátvektorainak egy ortonormált teljes rendszere. Képezzük a mozgásegyenlet mindkét oldalának várható értékét a $|j\rangle$ állapotban:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \langle j | \hat{Y}(\vec{x}, t) | j \rangle}{\partial t} &= i \langle j | [\hat{H}'(t), \hat{Y}(\vec{x}, t)] | j \rangle \\ &= i \langle j | [\hat{H}_k(t), \hat{Y}(\vec{x}, t)] | j \rangle. \end{aligned} \quad (23.2)$$

Ezt felhasználva, gyenge perturbáció esetén az $\hat{Y}$ mennyiség megváltozása a perturbáció bekapcsolásának pillanatától számítva:

$$\begin{aligned} \delta \langle j | \hat{Y}(\vec{x}, t) | j \rangle &= \langle j | \hat{Y}(\vec{x}, t) | j \rangle - \langle j | \hat{Y}(\vec{x}, t_0) | j \rangle \\ &= i \int_{t_0}^t dt' \langle j | [\hat{H}_k(t'), \hat{Y}(\vec{x}, t')] | j \rangle \\ &\approx i \int_{t_0}^t dt' \langle j | [\hat{H}_k(t'), \hat{Y}(\vec{x}, t)] | j \rangle. \end{aligned} \quad (23.3)$$

Itt csak a külső perturbációban lineáris tagot tartottuk meg. Ezért ezt a közelítést a lineáris válasz 'elméletének' nevezik. Képezzük végül a

$$\hat{\rho} = e^{-\beta \hat{K}} = e^{-\beta(\hat{H} - \mu \hat{N})} \quad (23.4)$$

sűrűségoperátor segítségével az $\hat{Y}$ mennyiség megváltozásának makrokanonikus várható értékét:

$$\delta \langle \hat{Y}(\vec{x}, t) \rangle = \frac{\sum_j e^{-\beta K_j} \delta \langle j | \hat{Y}(\vec{x}, t) | j \rangle}{\sum_j e^{-\beta K_j}}$$

$$= i \int_{t_0}^t dt' \text{Tr} \left\{ \hat{\rho} [\hat{H}_k(t'), \hat{Y}(\vec{x}, t)] \right\}. \quad (23.5)$$

Vegyük a külső forráshoz csatolt skalártér példáját:

$$\hat{H}_k(t) = \int d^3x J(\vec{x}, t) \hat{\Phi}(\vec{x}, t), \quad (23.6)$$

ahol a $J(\vec{x}, t) = 0$, ha $t < t_0$. Vizsgáljuk magának a termennyiségnek a megváltozását a külső forrás bekapcsolásának hatására:

$$\begin{aligned} \delta \langle \Phi(\vec{x}, t) \rangle &= -i \int_{t_0}^t dt' \int d^3x' \text{Tr} \left\{ \hat{\rho} [\hat{\Phi}(\vec{x}, t), \hat{\Phi}(\vec{x}', t')] \right\} J(\vec{x}', t') \\ &\quad -i \int_{t_0}^{\infty} dt' \int d^3x' \text{Tr} \left\{ \hat{\rho} [\hat{\Phi}(\vec{x}, t), \hat{\Phi}(\vec{x}', t')] \right\} J(\vec{x}', t') \Theta(t - t'). \end{aligned} \quad (23.7)$$

Most célszerű bevezetni a valós idejű Green-függvényt,

$$iD(\vec{x}, t; \vec{x}', t') = \text{Tr} \left\{ \hat{\rho} T_t \hat{\Phi}(\vec{x}, t), \hat{\Phi}(\vec{x}', t') \right\} \quad (23.8)$$

a retardált Green-függvényt,

$$iD^R(\vec{x}, t; \vec{x}', t') = \text{Tr} \left\{ \hat{\rho} [\hat{\Phi}(\vec{x}, t), \hat{\Phi}(\vec{x}', t')] \right\} \Theta(t - t'), \quad (23.9)$$

és az avanzsált Green-függvényt,

$$iD^A(\vec{x}, t; \vec{x}', t') = -\text{Tr} \left\{ \hat{\rho} [\hat{\Phi}(\vec{x}, t), \hat{\Phi}(\vec{x}', t')] \right\} \Theta(t' - t). \quad (23.10)$$

Példánkban a skalártér megváltozása kifejezhető a retardált Green-függvény segítségével:

$$\delta \langle \hat{\Phi}(\vec{x}, t) \rangle = \int_{t_0}^{\infty} \int d^3x D^R(\vec{x}, t; \vec{x}', t') J(\vec{x}', t'). \quad (23.11)$$

Tekintve, hogy az egyensúlyi rendszer eltolás invariáns, a Green-függvényt és a forrást is Fourier-integrál alakjába írhatjuk az alábbi módon:

$$D^R(\vec{x} - \vec{x}', t - t') = \int \frac{d^3q d\omega}{(2\pi)^4} e^{i\vec{q}(\vec{x} - \vec{x}') + i\omega(t - t')} \tilde{D}^R(\omega, \vec{q}), \quad (23.12)$$

$$J(\vec{x}, t) = \int \frac{d^3p d\alpha}{(2\pi)^4} e^{i(\vec{p}\vec{x} - \alpha t)} \tilde{J}(\alpha, \vec{p}). \quad (23.13)$$

A skalártér megváltozása így

$$\delta \langle \tilde{\Phi}(\omega, \vec{q}) \rangle = \tilde{J}(\omega, \vec{q}) \tilde{D}^R(\omega, \vec{q}) \quad (23.14)$$

alakban is kifejezhető.

Be lehet bizonyítani, hogy a valós idejű Green-függvények és a hőmérsékleti Green-függvények között szoros kapcsolat van:

$$\tilde{D}^R(\omega, \vec{q}) = \mathcal{D}(i\omega_n \rightarrow \omega + i\epsilon, \vec{q}), \quad (23.15)$$

$$\tilde{D}^A(\omega, \vec{q}) = \mathcal{D}(i\omega_n \rightarrow \omega - i\epsilon, \vec{q}), \quad (23.16)$$

$$\tilde{D}(\omega, \vec{q}) = \frac{\tilde{D}^R(\omega, \vec{q})}{1 \mp e^{-\beta\omega}} + \frac{\tilde{D}^A(\omega, \vec{q})}{1 \mp e^{\beta\omega}}, \quad (23.17)$$

ahol az utolsó sorban a + előjel fermionokra, a - előjel bozonokra vonatkozik.

24 Elektron-pozitron plazma külső térben

Tegyük fel, hogy a rendszerben eredetileg jelen van egy $\vec{E}$ elektromos és $\vec{B}$ mágneses tér, majd $t \rightarrow -\infty$ pillanatban bekapcsoljuk a klasszikus külső $\vec{E}^{(k)}$ teret, amely sztatikus. A teljes Hamilton-sűrűség (a fermionok nélkül):

$$\hat{\mathcal{H}}' = \frac{1}{2}(\hat{\vec{E}} + \vec{E}^{(k)})^2 + \frac{1}{2}\hat{\vec{B}}^2, \quad (24.1)$$

a perturbálatlan Hamilton-sűrűség:

$$\hat{\mathcal{H}} = \frac{1}{2}\hat{\vec{E}}^2 + \frac{1}{2}\hat{\vec{B}}^2, \quad (24.2)$$

és a perturbáció:

$$\hat{\mathcal{H}}_k = \hat{\vec{E}} \cdot \vec{E}^{(k)} + \frac{1}{2}\vec{E}^{(k)2}. \quad (24.3)$$

Arra vagyunk kíváncsiak, hogy hogyan változik az elektromos térerősség értéke, ha az egész rendszer egy T hőmérsékletű, μ kémiai potenciálú környezettel egyensúlyban van, amikor a helyfüggő sztatikus külső $\vec{E}_k(\vec{x})$ teret bekapcsoljuk. Az előző fejezet eredményét felhasználva, a térerősség makrokanonikus várható értékének megváltozása:

$$\begin{aligned} \delta\langle \hat{E}_i(\vec{x}, t) \rangle &= -i \int_{-\infty}^{\infty} dt' \int d^3x' E_j^{(k)}(\vec{x}') \text{Tr} \left\{ \hat{\rho} \left[\hat{E}_i(\vec{x}', t), \hat{E}_j(\vec{x}', t') \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{1}{2} E_j^{(k)}(\vec{x}') \right] \right\} \Theta(t - t'). \end{aligned} \quad (24.4)$$

A jobb oldalt kifejezhetjük a retardált

$$D_{\mu\nu}^R(\vec{x} - \vec{x}', t - t') = i \text{Tr} \left\{ \hat{\rho} \left[\hat{A}_\mu(\vec{x}, t), \hat{A}_\nu(\vec{x}', t') \right] \right\} \Theta(t - t') \quad (24.5)$$

Green-függvény segítségével, ha felhasználjuk a térerősség-operátorok felcserélési szabályát:

$$\begin{aligned}
& \langle [\hat{E}_i(\vec{x}, t), \hat{E}_j(\vec{x}', t')] \rangle \Theta(t - t') \\
&= \partial_i \partial_j' \left\{ \langle [\hat{A}_0(\vec{x}, t), \hat{A}_0(\vec{x}', t')] \rangle \Theta(t - t') \right\} \\
&\quad - \partial_i \partial_0' \left\{ \langle [\hat{A}_0(\vec{x}, t), \hat{A}_j(\vec{x}', t')] \rangle \Theta(t - t') \right\} \\
&\quad - \partial_0 \partial_j' \left\{ \langle [\hat{A}_i(\vec{x}, t), \hat{A}_0(\vec{x}', t')] \rangle \Theta(t - t') \right\} \\
&\quad + \partial_0 \partial_0' \left\{ \langle [\hat{A}_i(\vec{x}, t), \hat{A}_j(\vec{x}', t')] \rangle \Theta(t - t') \right\} \\
&\quad - i \delta_{ij} \delta(\vec{x} - \vec{x}') \delta(t - t').
\end{aligned} \tag{24.6}$$

A teljes térerősség:

$$\begin{aligned}
E_i^{(t)} &= E_i^{(k)}(\vec{x}) + \delta \langle \hat{E}_i(\vec{x}, t) \rangle \\
&= - \int_{-\infty}^{\infty} dt' \int d^3x' E_j^{(k)}(\vec{x}') \left(\partial_i \partial_j' D_{00}^R - \partial_i \partial_0' D_{0j}^R - \right. \\
&\quad \left. \partial_0 \partial_j' D_{i0}^R + \partial_0 \partial_0' D_{ij}^R \right).
\end{aligned} \tag{24.7}$$

Itt a Green-függvények argumentuma $(\vec{x} - \vec{x}', t - t')$. Vezessük be a klasszikus térerősség és a retardált Green-függvények Fourier-transzformáltjait:

$$\vec{E}^{(k)}(\vec{x}) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} e^{i\vec{p}\vec{x}} \vec{E}^{(k)}(\vec{p}), \tag{24.8}$$

$$D_{\mu\nu}^R(\vec{x} - \vec{x}', t - t') = \int \frac{d^3q d\omega}{(2\pi)^4} e^{i\vec{q}(\vec{x} - \vec{x}') - i\omega(t - t')} \tilde{D}_{\mu\nu}^R(\omega, \vec{q}). \tag{24.9}$$

Ekkor a teljes térerősség

$$\begin{aligned}
E_i^t(\vec{x}) &= - \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} e^{i\vec{q}\vec{x}} \tilde{E}_j^{(k)}(\vec{q}) \left[q_i q_j \tilde{D}_{00}^R(\omega, \vec{q}) + \omega q_i \tilde{D}_{i0}^R(\omega, \vec{q}) \right. \\
&\quad \left. + \omega q_j \tilde{D}_{i0}^R(\omega, \vec{q}) + \omega^2 \tilde{D}_{ij}^R(\omega, \vec{q}) \right] |_{\omega=0}.
\end{aligned} \tag{24.10}$$

Innen leolvashatjuk, hogy a teljes térerősség Fourier-transzformáltja:

$$\begin{aligned}
\tilde{E}_i^t(\omega, \vec{q}) &= \tilde{E}_j^{(k)}(\vec{q}) \left[q_i q_j \tilde{D}_{00}^R(\omega, \vec{q}) + \omega q_i \tilde{D}_{i0}^R(\omega, \vec{q}) \right. \\
&\quad \left. + \omega q_j \tilde{D}_{i0}^R(\omega, \vec{q}) + \omega^2 \tilde{D}_{ij}^R(\omega, \vec{q}) \right] |_{\omega=0}.
\end{aligned} \tag{24.11}$$

Használjuk fel a fotonpropagátor (16.34) alakját, valamint a hőmérsékleti és a valós idejű Green-függvények (23.15) kapcsolatát. Beláthatjuk, hogy a három utolsó tag a teljes térerősség Fourier-transzformáltjában zérus és

$$\tilde{E}_i^t(\vec{q}) = \frac{q_i q_j \tilde{E}_j^{(k)}(\vec{q})}{\vec{q}^2 + F(\omega = 0, \vec{q})}. \tag{24.12}$$

Az egyensúlyi rendszer forgásszimmetriája miatt:

$$\tilde{E}_j^{(k)}(\vec{q}) = \frac{q_j}{|\vec{q}|} |\vec{E}^{(k)}(\vec{q})|. \quad (24.13)$$

Ezt behelyettesítve a teljes térerősség kifejezésébe

$$\begin{aligned} \tilde{E}_i^t(\vec{q}) &= \frac{\vec{q}^2}{\vec{q}^2 + F(0, \vec{q})} \frac{q_i |\vec{E}^{(k)}(\vec{q})|}{|\vec{q}|} \\ &= \frac{\vec{q}^2}{\vec{q}^2 + F(0, \vec{q})} \tilde{E}_i^{(k)}(\vec{q}) \\ &= \frac{\tilde{E}_i^{(k)}(\vec{q})}{\epsilon(\vec{q})} \end{aligned} \quad (24.14)$$

adódik, ahol bevezettük az $\epsilon(\vec{q})$ dielektromos állandót:

$$\epsilon(\vec{q}) = 1 + \frac{F(0, \vec{q})}{\vec{q}^2}. \quad (24.15)$$

Látjuk tehát, hogy a polarizációs tenzor Π_{00} komponense az $\omega \rightarrow 0$ esetben a rendszer dielektromos állandóját határozza meg.

Általában az F függvény egy vákuum tag és egy közegtag összege: $F = F^{(v)} + F^{(k)}$. Olyan távolságokon, amelyek a részecskék közötti átlagos távolsághoz képest kicsinyek, a vákuumpolarizációtól származó járulék lényeges és a közegtag elhanyagolható. Ugyanakkor a részecskék közti átlagos távolsághoz képest nagy távolságokon a közegtag dominál és a vákuumtag elhanyagolható. A közegtag sztatikus határesetét szokás elektromos tömegnek nevezni: $m_{el}^2 = F^{(k)}(0, \vec{q})$. Ennek a jelentése valóban olyan, mintha a fotonok tömeget nyernének az elektromos Coulomb-kölcsönhatás szempontjából és ennek megfelelően a Coulomb-potenciál leárnýékolódik valamely próbatöltéstől nagy távolságban.

Az árnyékolást az alábbi példa kapcsán vizsgálhatjuk. Vegyünk egy Q_1 és egy Q_2 töltést az $\vec{x}_1$ ill. az $\vec{x}_2$ pontban, egymástól a részecskék közti átlagos távolsághoz képest nagy távolságban. Kérdezzük, hogy mennyi ezen rögzített töltések potenciális energiája, ha a környezetben jelen van a plazma. Gauss törvénye értelmében:

$$\text{div} \vec{E}_1^{(k)}(\vec{x}) = Q_1 \delta(\vec{x} - \vec{x}_1), \quad (24.16)$$

ahonnan Fourier-transzformáció után:

$$\vec{E}_1^{(k)} = -i \frac{\vec{q}}{\vec{q}^2} e^{-i\vec{q}\vec{x}_1} Q_1. \quad (24.17)$$

Természetesen hasonló összefüggés érvényes a Q_2 töltés által keltett külső térre is. A kölcsönhatás potenciális energiája:

$$V(\vec{x}_1, \vec{x}_2) = \frac{1}{2} \int d^3x \left[\vec{E}_1^{(k)}(\vec{x}) \cdot \vec{E}_2^t(\vec{x}) + \vec{E}_2^{(k)}(\vec{x}) \cdot \vec{E}_1^t(\vec{x}) \right], \quad (24.18)$$

ahol $\vec{E}_a^t$ Fourier-transzformáltja $\vec{E}_a^t(\vec{q}) = \vec{E}_a^{(k)}(\vec{q})/\epsilon(\vec{q})$. Behelyettesítve a terek Fourier-integrál kifejtését a potenciális energia kifejezésébe,

$$\begin{aligned} V(\vec{x}_1, \vec{x}_2) &= \frac{1}{2} \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} \left[\vec{E}_1^{(k)}(\vec{q}) \vec{E}_2^t(-\vec{q}) + \vec{E}_2^{(k)}(\vec{q}) \vec{E}_1^t(-\vec{q}) \right] \\ &= Q_1 Q_2 \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} e^{i\vec{q}\vec{R}} \frac{1}{\vec{q}^2 + m_{el}^2} \\ &= \frac{Q_1 Q_2}{4\pi} \frac{e^{-m_{el}R}}{R}, \end{aligned} \quad (24.19)$$

ahol $\vec{R} = \vec{x}_2 - \vec{x}_1$. A plazma jelenlétében tehát a Coulomb-kölcsönhatás módosul: a közeg polarizációja az $R \gg 1/m_{el}$ távolságokon a sztatikus próbatöltések terét leárnyékolja. Az eredmény egy Yukawa-típusú kölcsönhatás. Ez annak felel meg, mintha a kölcsönhatást közvetítő longitudinális fotonok m_{el} nyugalmi tömeggel rendelkeznének.

Itt nem részletezem csak megemlítem, hogy a polarizációs tenzorra vonatkozó Dyson-egyenlet és a Ward-azonosságok felhasználásával a fotonok elektromos tömege és a plazma állapotegyenlete között közvetlen kapcsolat található:

$$m_{el}^2 = -\Pi_{00}(k_0 = 0, \vec{k} = 0) = e^2 \frac{\partial^2 P(\mu, T)}{\partial \mu^2}. \quad (24.20)$$

Ez a perturbációszámítás tetszőleges rendjében érvényes, azaz egzakt összefüggés, amely lehetővé teszi a plazma sztatikus árnyékolási tulajdonságainak vizsgálatát az állapotegyenlet ismeretében. Legalacsonyabb el nem tűnő rendben:

$$m_{el}^2 = \left(\frac{1}{3} e^2 + \mathcal{O}(e^4) \right) T^2 \quad (24.21)$$

A longitudinális fotonok tehát a T hőmérséklettel arányos elektromos tömegre tesznek szert az elektron-pozitron plazmában.

25 Plazmahullámok

Az előző fejezetben azt vizsgáltuk, mi történik a plazmában, ha sztatikus külső elektromos teret kapcsolunk be. Most időfüggő külső perturbáció hatását vizsgáljuk. Elegendő egyetlen Fourier-komponenst nézni, mert a válasz gyenge perturbáció esetén a perturbáló tér lineáris funkcionálja. Megmutatjuk, hogy ha a retardált Green-függvény a valós tengely közelében, az ω komplex változó szerinti alsó félsíkon pólussal rendelkezik, akkor ez gyengén csillapodó hullámok terjedését jelenti a plazmában.

Térjünk először vissza a skalártérhez. Tegyük fel, hogy a külső forrás, amit bekapcsolunk,

$$J(\vec{x}, t) = J_0(\vec{k})e^{i\vec{k}\vec{x}}\delta(t), \quad \tilde{J}(\omega, \vec{q}) = (2\pi)^3 J_0(\vec{k})\delta(\vec{q} - \vec{k}). \quad (25.1)$$

Az (23.14) egyenlet Fourier-transzformáltja adja a térmennyiség megváltozását:

$$\delta\langle\Phi(\vec{x}, t)\rangle = J_0(\vec{k})e^{i\vec{k}\vec{x}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi} e^{-i\omega t} D^R(\omega, \vec{k}). \quad (25.2)$$

Az retardált Green-függvény definíciójából következően a felső ω félsíkon analitikus. Tegyük fel most, hogy az alsó ω félsíkon, az $\omega_R = \omega(\vec{k}) - i\gamma(\vec{k})$ helyen a retardált Green-függvény egyszerű pólussal rendelkezik, $\gamma(\vec{k}) \geq 0$. Ekkor a pólus közelében:

$$D^R(\omega, \vec{k}) = \frac{R(\vec{k})}{\omega - \omega(\vec{k}) + i\gamma(\vec{k})}. \quad (25.3)$$

A térmennyiség megváltozását alapvetően ez a szingularitás határozza meg, így:

$$\delta\langle\Phi(\vec{x}, t)\rangle = -iJ_0(\vec{k})R(\vec{k})e^{i(\vec{k}\vec{x} - \omega(\vec{k})t)}e^{-\gamma(\vec{k})t}. \quad (25.4)$$

A $\vec{k}$ hullámszámú zavaró hullám tehát egy a közegre jellemző $\omega(\vec{k})$ frekvenciájú hullámzást kelt a közegben. A keltett hullám amplitúdója arányos a zavar amplitúdójával és a Green-függvény pólusának reziduumával. Szabad, m tömegű skalár-tér esetén létezik a retardált Green-függvénynek a fenti tulajdonságokkal rendelkező pólusa és $\omega(\vec{k}) = \sqrt{m^2 + \vec{k}^2}$, $\gamma(\vec{k}) = 0$, és $R(\vec{k}) = \omega(\vec{k})/2$.

Térjünk most vissza az elektron-pozitron plazma vizsgálatához. A plazmahullámok frekvenciáját a hullámhossz függvényében a retardált Green-függvény pólusaiból kell kiolvasnunk. Feynman-mértékben a transzverzális hullámokra a

$$k_0^2 = \vec{k}^2 + G(k_0, \vec{k}) \quad (25.5)$$

diszperziós relációt kapjuk a fotonpropagátor (16.34) alakjából. A $k_0 = \omega - i\gamma$ alakot használva, a transzverzális plazmahullámok diszperziós relációja és csillapodása az alábbi alakban adódik, ha a csillapodás gyenge ($\gamma \ll \omega$):

$$\omega_{\perp}(\vec{k})^2 = \vec{k}^2 + \Re G(\omega, \vec{k}), \quad (25.6)$$

$$\gamma_{\perp}(\vec{k}) = -\frac{1}{2\omega} \Im G(\omega, \vec{k}). \quad (25.7)$$

F és G hasonló módszerrel kiszámolható, mint ahogy az állapotösszeg. Ezt mi nem tesszük meg, hanem továbbra is csak a számítások végeredményeiből közöljük a legfontosabbakat. A transzverzális plazmahullámok terjedésére egyszerű képleteket

lehet levezetni rövid hullámhosszak, $\omega \approx |\vec{k}| \gg T, \mu$ esetén és hosszú hullámok, $|\vec{k}| \ll \omega T, \mu$ esetén. Rövid hullámok esetén

$$G(\omega = |\vec{k}|) = \frac{1}{2}e^2 \left(\frac{1}{3}T^2 + \frac{\mu^2}{\pi^2} \right) = m_P^2, \quad (25.8)$$

és a diszperziós reláció,

$$\omega_{\perp}^2(\vec{k}) = \vec{k}^2 + m_P^2 \quad (25.9)$$

alig különbözik a szabad fotonétól, hiszen $m_P \ll T, \mu$, míg $k \gg T, \mu$. Ez érthető is, mert rövid, a részecskék átlagos távolságához képest kicsi távolságokon a közeg nem tudja befolyásolni a hullámok terjedését. A rövid hullámok csillapodás nélkül terjednek a plazmában. Hosszú hullámok esetén

$$\Re G(|\vec{k}| \ll \omega < T, \mu) = \omega_P^2 \left(1 + \frac{1}{5} \frac{\vec{k}^2}{\omega^2} + \dots \right), \quad (25.10)$$

úgyhogy a transzverzális hullámok diszperziós relációja ebben a hullámhossz tartományban:

$$\omega_{\perp}^2(\vec{k}) = \omega_P^2 + \frac{6}{5} \vec{k}^2, \quad (25.11)$$

ahol $\omega_P = \frac{2}{3}m_P^2$ az ún. plazmafrekvencia. A plazmában ezek a módusok még zérus hullámszám esetén is csak véges energiabefektetés árán gerjeszthetők. A hosszú transzverzális hullámok csillapodása:

$$\gamma_{\perp} = \frac{e^2}{24\pi} \omega_P n(\omega_P/2), \quad (25.12)$$

ahol $n(\omega)$ a fermionokra a betöltési szám. A csillapodás fizikai oka, hogy a $\vec{k} = 0$ módus elbomlik egy elektron-pozitron párra. Ez az ún. Landau-féle csillapodás.

A longitudinális hullámok terjedése a fotonpropagátor longitudinális részének pólusszerkezete alapján vizsgálható. Tekintve, hogy vákuumban nincsenek longitudinális elektromágneses hullámok, ezért azt várjuk, hogy a plazmában sem terjedhetnek rövid hullámok. Ez valóban így is van. Terjedhetnek benne azonban longitudinális, hosszú hullámok. Ezek diszperziós relációja

$$\omega_{\parallel}^2(\vec{k}) = \omega_P^2 + \frac{3}{5} \vec{k}^2, \quad (25.13)$$

csillapodása pedig

$$\gamma_{\parallel} = \gamma_{\perp}. \quad (25.14)$$

A fotonpropagátor utolsó tagja Landau-mértékben eltűnik, ezért a benne megjelenő pólusnak nincsen fizikai jelentése. Nem beszéltünk arról, hogy a fotonpropagátor mértékfüggése miatt milyen nehézségek adódnak, amikor a mérték választásától független fizikai következtetéseket akarunk kiolvasni belőle. Az érdeklődő olvasót itt az irodalomra utaljuk.

26 Kvarkgluon-plazma

A kvarkgluon-plazma árnyékolási tulajdonságai és a plazmahullámok terjedési tulajdonságai ugyanazokkal a módszerekkel vizsgálhatók, mint az elektron-pozitron plazma esetén.

A kvarkgluon-plazma sztatikus teret módosító hatását a

$$F(0, q \rightarrow 0) = \frac{1}{3}g^2 NT^2 - \frac{1}{4}g^2 NTq + \dots, \quad (26.1)$$

$$G(0, q \rightarrow 0) = -\frac{3}{16}g^2 NTq + \dots \quad (26.2)$$

mennyiségek határozzák meg. (A kifejezések Feynman-mértékben vannak felírva.) F a g^2 rendben mértékinvariáns, G azonban nem. Az F mértékinvariáns határértékéből azt olvassuk ki, hogy véges hőmérsékletű kvarkgluon-plazmában is fellép sztatikus árnyékolás a színtöltések között. Az árnyékolási hossz most is fordítva arányos a T hőmérséklettel.

A gluonpropagátor mértékfüggését figyelembe vevő gondos elemzés arra az eredményre vezet, hogy a kvarkgluon-plazmában is terjedhetnek hosszúhullámú longitudinális és transzverzális gluonhullámok. A megfelelő diszperziós relációk:

$$\omega_{\perp}^2(\vec{k}) = \omega_P^2 + \frac{6}{5}\vec{k}^2 + \dots, \quad (26.3)$$

$$\omega_{\parallel}^2(\vec{k}) = \omega_P^2 + \frac{3}{5}k^2 + \dots \quad (26.4)$$

A plazmafrekvencia most $\omega_P^2 = \frac{1}{9}g^2 NT^2$. A hosszúhullámú plazmarezgések tehát még $\vec{k} = 0$ hullámszám esetén is csak a T hőmérséklettel arányos véges energia befektetésével nyerhetők. A csillapodási tényező szintén arányos a hőmérséklettel:

$$\gamma_{\perp} = \gamma_{\parallel} = \frac{g^2}{24\pi} NT. \quad (26.5)$$

A rövid hullámhosszú longitudinális plazmahullámok a kvarkgluon-plazmában sem tudnak terjedni. A rövid hullámú transzverzális gluonhullámok nem csillapodnak és diszperziós relációjuk:

$$\omega_{\perp}^2 = k^2 + \frac{3}{2}\omega_P^2 + \dots \quad (26.6)$$

Ez a 'szabad' gluonoknak megfelelő diszperziós relációtól csak kicsit tér el.

A. Függelék: A csonkított Green-függvények

A $\Gamma^{(n)}$ csonkított Green-függvényt az alábbiak szerint szokás definiálni. Induljunk ki a $G_c^{(n)}(x_1, \dots, x_n)$ összefüggő Green-függvényből, amely definícióját tekintve n darab térmennyiség szorzatának várható értéke. Így a dimenziója [tömeg] $^{\tilde{D}}$, ahol $\tilde{D} = \sum_i n_i d_i$, az összegzés a különböző típusú terekre történik, amelyek a szorzatban fellépnek, n_i az azonos típusú tényezők száma, $\sum_i n_i = n$ a Green-függvény lábainak száma és d_i az i -edik típusú térmennyiség dimenziója. Képezzük az összefüggő Green-függvény Fourier-transzformáltját. Az energia és az impulzus megmaradását explicit módon figyelembe vesszük egy megfelelő Dirac-delta leválasztásával:

$$\tilde{G}_c^{(n)}(p_1, \dots, p_n) \delta^{(d)}(p_1 + \dots + p_n) = \int d^d x_1 \dots d^d x_n G_c^{(n)}(x_1, \dots, x_n) e^{i(p_1 x_1 + \dots + p_n x_n)}, \quad (\text{A.1})$$

ahol d a téridő dimenziója. A fenti definíció értelmében:

$$\dim \tilde{G}_c^{(n)} = -nd + \tilde{D} + d. \quad (\text{A.2})$$

A $\Gamma^{(n)}$ csonkított Green-függvényt a lábak leválasztásával képezzük:

$$\Gamma^{(n)}(p_1, \dots, p_n) \tilde{G}_{ci_1}^{(2)} \dots \tilde{G}_{ci_n}^{(2)} = \tilde{G}_c^{(n)}(p_1, \dots, p_n). \quad (\text{A.3})$$

Itt az i_j index a kétpont Green-függvényekben azt jelöli, hogy azok milyen típusú térre vonatkoznak. Természetesen az i -edik típusnak megfelelő kétpont Green-függvények n_i -szer lépnek fel a szorzatban. A definícióból következően a csonkított Green-függvények dimenziója:

$$\begin{aligned} D = \dim \Gamma^{(n)} &= -nd + \sum_i n_i d_i + d \\ &\quad - \sum_i (-2d + 2d_i + d) n_i \\ &= -nd + \tilde{D} + d + 2nd - 2\tilde{D} - nd \\ &= d - \tilde{D}. \end{aligned} \quad (\text{A.4})$$

IRODALOM

1. J.I. Kapusta and Ch. Gale, *Finite Temperature Field Theory. Principles and Applications* (Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2006)
2. J.I. Kapusta, *Nucl. Phys.* **B148** (1979) 461
3. T. Toimela, *Int. J. Theor, Phys.* **24** (1985) 901

TARTALOMJEGYZÉK

BEVEZETÉS	2
I. KÖLCSÖNHATÁS MENTES RENDSZEREK	4
1. Az útintegrál és az állapotösszeg	5
2. A semleges skalártér	8
3. A töltött skalártér.	
Bose-Einstein-kondenzáció	14
4. Fermiontér partíciós függvénye	18
5. Az ideális Fermi-gáz állapotegyenlete	21
II. KÖLCSÖNHATÓ RENDSZEREK	24
6. A partíciós függvény perturbációs sora	25
7. Az önkölcsönható skalártér	26
8. Skalárrészecske propagátora és sajátenergiája	30
9. A $\lambda\Phi^4$ elmélet a perturbációszámítás első rendjében	34
10. Zérus tömegű skalártér és infravörös divergencia	39
11. Yukawa elmélete. A fermionpropagátor és fermion-sajátenergia	42
III. KVANTUMELEKTRODINAMIKA VÉGES HŐMÉRSÉKLETEN	46
12. Az elektromágneses tér	47
13. Feketetest sugárzás	52
14. Kvantumelektrodinamika	56
15. A fotonpropagátor és a polarizációs tenzor	59
16. A Ward-Takahashi azonosság	61
17. A kvantumelektrodinamika partíciós függvényének kicserélődési korrekciója	65
18. Infravörös divergencia a kvantumelektrodinamikában	77
19. Általános megjegyzések a renormálásról	79
IV. KVANTUMSZÍNDINAMIKA VÉGES HŐMÉRSÉKLETEN	86
20. Kvantumszíndinamika	87
21. Az aszimptotikus szabadság	90
22. A kvarkgluon-plazma állapotegyenlete	92

V.	DEBYE-ÁRNYÉKOLÁS. PLAZMAHULLÁMOK	95
23.	Egyensúlyi állapotukból gyengén kitérített rendszerek	96
24.	Elektron-pozitron plazma külső térben	98
25.	Plazmahullámok	102
26.	Kvarkgluon-plazma	104
A.	Függelék: A csonkított Green-függvények	106
	IRODALOM	107
	TARTALOMJEGYZÉK	108