BEVEZETÉS A MECHANIKÁBA

Sailer Kornél

Egyetemi előadás

Elméleti Fizikai Tanszék
Debreceni Egyetem
Debrecen
2001.

Contents

I. KLASSZIKUS MECHANIKA

A klasszikus mechanika a makroszkopikus testek mozgásának leírásával, a mozgások okainak és törvényszerűségeinek feltárásával foglalkozik. Érvényességi körébe olyan mozgások tartoznak, amikor a testek sebessége lényegesen kisebb a fény terjedési sebességénél.

1 KINEMATIKA

A kinematika a mozgások fenomenologikus leírásával foglalkozik. Értelmezi azokat a fogalmakat, amelyek ehhez szükségesek. Nem vizsgálja a mozgások okait, törvényszerűségeit.

1.1 Az anyagi pont mozgása

1.1.1 Vonatkoztatási rendszerek

A testek mozgását fizikai (mechanikai) történések, másszóval **események** egymásutánisága jelenti. A tapasztalat azt mutatja, hogy **a fizikai történések felbonthatók elemi eseményekre**, azaz elemi események folytonos sorozatának tekinthetők. **Az elemi események a pontszerű és pillanatszerű események.** Ezek jelölik ki fizikailag a geometriai tér pontjait és az időpillanatokat. Elemi eseménynek tekinthetjük például egy pontszerű fényforrás felvillanását, vagy adott térbeli pontban egy fényfelvillanás észlelését. **A pontszerű fényforrásból adott irányban kibocsátott fényjel ,,útja" jelöli ki fizikailag a térben azt az egyenest, amely átmegy a fényforrás tartózkodási helyén és érintője az adott irányba mutat.**

A testek mozgását mindig valamilyen vonatkoztatási testhez viszonyítva tudjuk leírni. Ezért először választanunk kell egy vonatkoztatási rendszert. A mozgás leírását ezután a vonatkoztatási rendszerben történő távolság- és időtartammérésekre vezetjük vissza.

1. *Távolságmérés.* A távolságot mérőrudakkal mérjük. Választunk egy kísérletileg nagyon jól reprodukálható, a külső fizikai behatásokra széles határok között érzéketlen rudat, ún. hosszúságetalont, amelynek egyik oldaléle egyenes. A hosszúságetalon mérőélének hossza képviseli definíció szerint az egységtávolságot. A mérőrudak ennek másolatai, vagy több ilyen mérőrúdnak a mérőél egyenes meghosszabbításával történő egymás mellé illesztésével (és merev egymáshoz rögzítésével) készülnek. Az egység ismeretében készített beosztás a valós számegyenes pozitív félegyenesének (a nullát is beleértve) kölcsönösen egyértelmű, lineáris leképezése a mérőélre. Ezért a távolságok additívak. (Ha B egy osztópont a mérőrúdon A és C között, akkor az ℓ_{AC} távolság az ℓ_{AB}és az ℓ_{BC} távolságok összege: $\ell_{AC} = \ell_{AB} + \ell_{BC}$.

   Feltesszük, hogy adott a vonatkoztatási test valamely pontjához képest és egymáshoz képest is rögzített, merev mérőrudak serege úgy, hogy a tér bármely két pontján átmegy valamelyik mérőrúd élének egyenese. Bármely test, bármely P pontjának a vonatkoztatási test bármely O pontjától mért távolsága az O és P pontokon átmenő mérőrúdon történő leolvasással meghatározható: megkeressük, hogy a mérőrúd mely O' ill. P' pontja esik egybe a vonatkoztatási test kiszemelt O pontjával ill. a vizsgált test vizsgált P pontjával, és a mérőrúd e két pontjának távolságát nevezzük a két pont ℓ_{OP} távolságának. A mérőrúdon a két pont helyzetének leolvasását egyidejűleg kell elvégezni.

2. *Időmérés.* Az egyidejűség fogalmának értelmezéséhez órákra van szükségünk, amelyek mérik az időtartamokat. Most is választunk egy órát, időmérő etalont. Az

etalonnak választott óra olyan, kísérletileg jól reprodukálható, a külső fizikai behatásokra nagyon széles határok között érzéketlen test, amely periodikusan ismétlődő, pontszerűnek és pillanatszerűnek tekinthető jelenséget („azonos mutatóállást") szolgáltat, és valamennyi ismert periodikus jelenséggel „együtt fut". Az etalonnak választott órán a periodikus jelenség, az azonos mutatóállás két, közvetlen egymás utáni bekövetkezése jelöli ki az egységnyi időtartamot. Bármely más időtartamot is két, az óra helyén bekövetkező elemi esemény jelöl ki. Tetszőleges órán (a fizikai behatásokkal szemben kellően érzéketlen, periodikus jelenséget szolgáltató fizikai rendszeren) az egységnyi időtartamot az a két mutatóállás jelöli ki, amelyek egyidejűek a hitelesítendő órával azonos helyen elhelyezett és hozzá képest nyugvó óra-etalon két, közvetlenül egymást követő, azonos mutatóállásával. Az órán a nullához és az egységhez tartozó mutatóállás kijelölése után minden mutatóálláshoz (időtartamhoz) rendelünk egy nem negatív valós számot kölcsönösen egyértelmű, lineáris leképezéssel.

Vonatkoztatási rendszer. A vonatkoztatási rendszer olyan elképzelt test, amelyet az egymáshoz képest mereven rögzített mérőrudaknak (mérőéleknek) a egész teret behálózó rendszere alkot. A vonatkoztatási rendszer fogalmába a mérőrudak merev rendszerével együtt beleértjük, hogy a mérőrudakhoz képest nyugalomban levő, fizikailag azonos órák is adottak a tér minden pontjában. **Az órákat összeigazítjuk, azaz szinkronizáljuk. A szinkronizálás a klasszikus mechanikában azon feltevés alapján történik, hogy a fény végtelen nagy sebességgel terjed.** Ez azt jelenti, hogy egy pillanatszerű fényjel keltése a tér valamely pontjában és annak megérkezése a tér tetszőleges másik pontjába definíció szerint mindig egyidejű elemi események. Az órák szinkronizálása úgy történik, hogy amikor az egyik óra mutatója éppen nullán áll, akkor onnan, ahol ez az óra elhelyezkedik, fényjelet adunk le. Ezt a tér más pontjaiban elhelyezkedő megfigyelők késedelem nélkül észlelik, és a tartózkodási helyükön elhelyezett nyugvó órák mutatóját nullállásba hozzák. Az O és P pontok helyzetének egyidejű leolvasása ezek után azt jelenti, hogy az O-ban és a P-ben (a vonatkoztatási testhez képest) nyugvó órák a leolvasáskor ugyanazt az időt mutatják.

A vonatkoztatási rendszert a mérőrudak egymáshoz képest mereven rögzített rendszere és a hozzájuk képest nyugvó órák alkotják. A mozgások leírásához először mindig vonatkoztatási rendszert kell választanunk.

Rendszer- és világidő. Fontos megjegyezni, hogy a szinkronizálás elvégzése után valamennyi óra ugyanazt az időt méri, ez tehát **rendszeridő** az adott vonatkoztatási rendszerben. A klasszikus mechanikában ennél még több is igaz. Amikor egy vonatkoztatási rendszer egy kiszemelt pontja éppen egybeesik a másik vonatkoztatási rendszer egy pontjával, akkor az egyik ill. a másik rendszerben nyugvó, ebben a közös pontban elhelyezkedő órákat össze lehet igazítani. Ezzel a két rendszer rendszeridejét is egy adott pillanatban összeigazítottuk. A klasszikus mechanikában feltesszük, hogy az azonos órák minden vonatkoztatási rendszerben azonos módon járnak, vagyis hogy az egyik rendszerben eltelt Δt időtartamnak, amelyet két egymás utáni elemi esemény jelöl ki, a másik rendszerben is ugyanekkora $\Delta t' = \Delta t$ időtartam felel meg. Ha ez így van, akkor az idő egységesen, minden vonatkoztatási rendszerben ugyanaz a t, azaz a klasszikus mechanikában létezik úgynevezett **világidő**. Azt, hogy két egymást követő esemény által kijelölt időtartam minden vonatkoztatási rendszerben ugyanaz, úgy is szoktuk mondani, hogy az időtartam abszolút, azaz vonatkoztatási rendszertől független fogalom a klasszikus fizikában. Hasonlóan, két elemi esemény távolsága minden vonatkoztatási rendszerben ugyanaz, vagyis a klasszikus mechanikában a távolság is abszolút fogalom.

A tér geometriája euklideszi. A klasszikus mechanika által vizsgált jelenségek körében a tapasztalat azt igazolja a távolságmérés alapján, hogy **a tér euklideszi geometriájú.** A mérések nem mondanak ellent az euklideszi geometria axiómáinak. Teljesülnek, azaz mérésekkel igazolhatók az euklideszi geometria összefüggései, pl. Pitagorasz tétele, a koszinusz- és a szinusz-tétel, stb.

Helyzetvektor. Az euklideszi tér a matematika (lineáris algebra) szerint egy pozitív definit belsőszorzattal ellátott lineáris vektortér. A vektorok a vonatkoztatási rendszer tetszőlegesen kiszemelt O vonatkoztatási pontjából, origójából a tér egyes P pontjaiba mutató $\mathbf{r}$ helyzetvektorok. A skaláris szorzat bármely két $\mathbf{r}$ és $\mathbf{r}'$ helyzetvektorhoz egy valós számot rendel: $(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \to \mathbf{r} \cdot \mathbf{r}'$ olyan módon, hogy teljesüljenek az alábbi tulajdonságok:

1. bármely két helyzetvektorra $\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}' = \mathbf{r}' \cdot \mathbf{r}$,

2. bármely helyzetvektor hosszának négyzetére $\mathbf{r} \cdot \mathbf{r} \equiv \mathbf{r}^2 \geq 0$, és egyenlőség akkor és csak akkor áll fenn, ha $\mathbf{r} = \mathbf{0}$, azaz az „O pontból az O pontba mutató" vektor.

Az $\mathbf{r}$ vektor hosszának szokásos jelölése $r = |\mathbf{r}| = \sqrt{\mathbf{r}^2}$. Két tetszőleges $\mathbf{r}$ és $\mathbf{r}'$ helyzetvektor $\alpha \in [0, \pi]$ szögét a

$$\cos \alpha = \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}'}{r r'} \tag{1.1.1}$$

összefüggés értelmezi. Az $\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}'$ skalárszorzat akkor és csak akkor nulla, ha vagy a tényező vektoroknak legalább az egyike nullvektor, vagy ha a tényezővektorok merőlegesek egymásra.

Globális koordinátarendszer a térben. A tér pontjainak megfelelő helyzetvektorok lineáris vektorterében választhatunk ortonormált bázist: a vonatkoztatási pontban felveszünk három, páronként egymásra merőleges $\mathbf{E}_i$ $(i = 1, 2, 3)$ egységvektort:

$$\mathbf{E}_i \cdot \mathbf{E}_j = \delta_{i,j}, \tag{1.1.2}$$

ahol $\delta_{i,j}$ a Kronecker-delta:

$$\delta_{i,j} = 1, \text{ ha } i = j, \qquad \delta_{i,j} = 0, \text{ ha } i \neq j. \tag{1.1.3}$$

Az O vonatkoztatási ponton átmenő, a bázisvektorokkal párhuzamos egyenesek egy Descartes-féle koordinátarendszer tengelyeinek tekinthetők, amelyekre a helyzetvektorok bázisvektorok irányába eső összetevőinek előjeles nagysága van felmérve:

$$\mathbf{r} = \sum_{i=1}^{3} r_i \mathbf{E}_i = x\mathbf{E}_1 + y\mathbf{E}_2 + z\mathbf{E}_3, \tag{1.1.4}$$

ahol tehát $\mathbf{r}$ a tér egy tetszőleges P pontjába mutató helyzetvektor, és ennek merőleges összetevői a P pont (x, y, z) Descartes-féle koordinátái a globális Descartes-féle koordinátarendszerben. A skaláris szorzat a tényezővektorok komponenseivel kifejezhető:

$$\begin{aligned} \mathbf{r} \cdot \mathbf{r}' &= \sum_{i=1}^{3} r_i \mathbf{E}_i \cdot \sum_{j=1}^{3} r'_j \mathbf{E}_j = \sum_{i,j=1}^{3} r_i r'_j \mathbf{E}_i \cdot \mathbf{E}_j = \sum_{i,j=1}^{3} r_i r'_j \delta_{i,j} \\ &= \sum_{i=1}^{3} r_i r'_i = xx' + yy' + zz'. \end{aligned} \tag{1.1.5}$$

Dimenzió. A tapasztalat megerősíti azt a tényt, hogy a térben pontosan három lineárisan független bázisvektort lehet választani, ill. ennek következményét, hogy minden térbeli pontot pontosan három, független Descartes-koordinátával lehet megadni. Ezért megállapíthatjuk, hogy **a tér három-dimenziós.**

Az idő a fentiek szerint a valós számegyenes pontjaival ábrázolható. A valós számok az összeadás és a számmal való szorzás műveletével ellátva ugyancsak lineáris vektorteret alkotnak. Ebben a vektortérben egyetlen független bázisvektor választható. Ezért azt szokás mondani, hogy **az idő egy-dimenziós**, vagy más szóhasználattal a Világ az időben egy-dimenziós. A tapasztalat valóban megerősíti, hogy az elemi események pontosan egyetlen időadattal jellemezhetők.

Összefoglalva: **A tér pontjait és az időpillanatokat az elemi események jelölik ki. A térben az egyeneseket a fényjelek terjedése jelöli ki. A tér három-dimenziós és euklideszi geometriájú. Az idő egy-dimenziós. Bármely két elemi esemény térbeli távolsága független a vonatkoztatási rendszertől, és bármely két elemi esemény között eltelt idő is független a vonatkoztatási rendszertől. A távolság és az időtartam a klasszikus mechanikában a vonatkoztatási rendszer megválasztásával szemben invariáns, abszolút fogalmak. A testek mechanikai mozgása térben és időben bekövetkező elemi történések folytonos sorozata. A klasszikus mechanika szerint a tér és az idő eleve adott színpad, amelyben a mozgások lefolynak. A testek mozgásának nincsen a tér és az idő geometriai tulajdonságaira semmiféle befolyása.**

1.1.2 Az anyagi pont

A legegyszerűbb test az ún. anyagi pont, másszóval részecske. **Anyagi pontnak (részecskének) olyan testet nevezünk, amelynek méretei nagyon kicsinyek a mozgásával kapcsolatos más jellemző méretekhez, távolságokhoz képest. Az ilyen testet pontszerűnek, azaz kiterjedés nélkülinek tekintjük.** A mozgással kapcsolatos egyéb méretek lehetnek a mozgást kiváltó testek méretei, ill. az anyagi pont távolsága ezen testektől.

Tekintsünk egy K vonatkoztatási rendszert és abban válasszunk egy nyugvó O vonatkoztatási pontot, origót. Legyen továbbá t a K-ban nyugvó, szinkronizált órák által mért idő. A K rendszerben az anyagi pont helyzetét az O ponthoz viszonyítva, adott t pillanatban azzal az $\mathbf{r}(t)$ **helyzetvektorral** adjuk meg, amely vektor az O pontból az anyagi pont pillanatnyi tartózkodási helyének P_t pontjába mutat: $\mathbf{r}(t) = \overrightarrow{OP_t}$. Az anyagi pont mozgása során a K vonatkoztatási rendszerben folytonos görbét ír le, ez **az anyagi pont pályája** a K rendszerben. A pályagörbe az $\mathbf{r}(t)$ vektorok folytonos sorozatával adható meg, ahol a t idő valós változó.

A klasszikus mechanikai mozgásról nemcsak azt szokás feltételezni, hogy a pálya folytonos, hanem azt is, hogy tetszőlegesen sokszor differenciálható. Ha Δt egy tetszőleges időtartam, akkor feltesszük, hogy minden t pillanatban létezik a

$$\mathbf{v}(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\mathbf{r}(t+\Delta t) - \mathbf{r}(t)}{\Delta t} \equiv \frac{d\mathbf{r}(t)}{dt} \tag{1.1.1}$$

határérték, a pálya idő szerinti első deriváltja, amit az anyagi pont t pillanathoz tartozó **sebességének** nevezünk. Ugyancsak feltesszük, hogy minden t pillanatban létezik a

$$\mathbf{a}(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\mathbf{v}(t+\Delta t) - \mathbf{v}(t)}{\Delta t} \equiv \frac{d\mathbf{v}(t)}{dt} = \frac{d^2\mathbf{r}(t)}{dt^2} \tag{1.1.2}$$

határérték, a sebesség idő szerinti első, ill. a pálya idő szerinti második deriváltja, amit **gyorsulásnak** nevezünk.

A véges Δt időtartamhoz tartozó $\Delta \mathbf{r} = \mathbf{r}(t + \Delta t) - \mathbf{r}(t)$ vektort az anyagi pont Δt időtartam alatt bekövetkezett **elmozdulásának** nevezzük. Az elmozdulás, a sebesség és a gyorsulás a pálya tetszőleges pontjában, lokálisan értelmezett vektorok, amelyeknek nagysága és iránya van.

A sebesség, definiciójából következően, párhuzamos a pályagörbe érintőjével a pálya minden pontjában. Jelölje $\mathbf{t}(P_t)$ a pályagörbének, az anyagi pont haladása irányába mutató érintő irányú egységvektorát a pálya tetszőleges P_t pontjában:

$$|\mathbf{t}(P_t)| = 1, \quad \mathbf{t}(P_t) \cdot \mathbf{t}(P_t) = 1, \quad \mathbf{v}(t) = v(t)\mathbf{t}(P_t). \tag{1.1.3}$$

A sebesség nagysága, $v(t) = |\mathbf{v}(t)| = \mathbf{v}(t) \cdot \mathbf{t}(P_t)$ segítségével számolható ki annak a görbeívnek a ds hossza, amelyet dt idő alatt az anyagi pont a pályája mentén megtesz:

$$ds = v(t)dt = \mathbf{v}(t) \cdot \mathbf{t}(P_t)dt, \tag{1.1.4}$$

az ún. nevezett **elemi úthossz**. Az anyagi pont által véges Δt időtartam alatt megtett **út**:

$$\Delta s = \int_{P_t}^{P_{t+\Delta t}} ds = \int_t^{t+\Delta t} v(t')dt'. \tag{1.1.5}$$

Az első egyenlőségben szereplő görbementi integrál integrálközelítő összeg határértékeként van értelmezve:

$$\int_{P_t}^{P_{t+\Delta t}} ds = \lim_{\Delta s_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} \Delta s_i, \tag{1.1.6}$$

ahol a pálya P_t és $P_{t+\Delta t}$ pontok közötti szakaszán n osztópontot vettünk fel és Δs_i a szomszédos osztópontok által kijelölt egyenes szakaszok hosszúságai. A határérték úgy értendő, hogy az osztópontok számával végtelenhez tartunk, $n \to \infty$ miközben a Δs_i szakaszok közül a legnagyobb is zérushoz tart. Az integrálközelítő összeg itt azt jelenti, hogy a görbe hosszát egy törtvonal hosszával közelítjük, majd ezt a törtvonalat egyre jobban „ráhúzzuk” az igazi görbére a határérték képzése során.

1.1.3 Egyenesvonalú egyenletes mozgás

Nyugalom. A sebességösszeadás szabálya. A K vonatkoztatási rendszerben **nyugvó anyagi pont** felfogható úgyis, mint a $\mathbf{v} = 0$ állandó sebességgel mozgó anyagi pont, amely természetesen így mindig ugyanabban a térbeli pontban marad. **A nyugalom azonban relatív.** Ha az anyagi pont nyugalomban van a K vonatkoztatási rendszerben, akkor általában nincs nyugalomban valamely másik K' vonatkoztatási rendszerben. Mozogjon pl. a K' rendszer a t pillanatban $\mathbf{V}$ sebességgel a K rendszerhez képest, amin azt értjük, hogy a K' rendszer minden pontja $\mathbf{V}$ sebességgel mozog a K vonatkoztatási rendszerből nézve. Ekkor az összes K'-ben nyugvó mérőrúd minden pontja is ezzel a sebességgel mozog K-ból nézve. Ha tehát $dt' = dt$ infinitezimális időtartam alatt az anyagi pont elmozdulása K'-ben $d\mathbf{r}' = \mathbf{v}'dt$, akkor K-ból nézve az elmozdulása $d\mathbf{r} = d\mathbf{r}' + \mathbf{V}dt = (\mathbf{v}' + \mathbf{V})dt$. Másrészt ez az infinitezimális elmozdulás definiálja az anyagi pont sebességét K-ban: $d\mathbf{r} = \mathbf{v}dt$. A K-ban észlelt elmozdulás két fenti alakját egyenlővé téve megkapjuk a **sebességösszeadás szabályát**:

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}' + \mathbf{V}. \tag{1.1.1}$$

Ebből látszik, hogy a nyugalom viszonylagos. Ha az anyagi pont nyugalomban van K-ban, azaz $\mathbf{v}(t) \equiv 0$, akkor ugyanez az anyagi pont általában nincs nyugalomban a K-hoz képest tetszőleges $\mathbf{V}(t)$ sebességgel mozgó K' vonatkoztatási rendszerben, hanem abban $\mathbf{v}'(t) = -\mathbf{V}(t)$ sebességgel mozog.

Egyenesvonalú egyenletes mozgás. Az anyagi pont legegyszerűbb mozgása, amikor a gyorsulása azonosan zérus,

$$\mathbf{a}(t) = \frac{d\mathbf{v}(t)}{dt} = 0. \tag{1.1.2}$$

Ekkor a részecske sebessége a t idő függvényében állandó:

$$\mathbf{v}(t) - \mathbf{v}_0 = \int_{t_0}^{t} \mathbf{a}(t')dt' = 0, \qquad \mathbf{v}(t) = \mathbf{v}_0, \tag{1.1.3}$$

ahol $\mathbf{v}_0 = \mathbf{v}(t_0)$ a részecske kezdeti sebessége a tetszőlegesen választott t_0 pillanatban. A pálya egyenlete:

$$\mathbf{r}(t) - \mathbf{r}_0 = \int_{t_0}^{t} \mathbf{v}(t')dt' = \mathbf{v}_0(t - t_0), \qquad \mathbf{r}(t) = \mathbf{r}_0 + \mathbf{v}_0(t, -t_0), \tag{1.1.4}$$

ahol $\mathbf{r}_0 = \mathbf{r}(t_0)$ a részecske helyzetvektora a kezdeti t_0 időpillanatban. A pálya $\mathbf{v}_0$ irányú egyenes. A részecske által Δt idő alatt megtett út,

$$\Delta s = v_0 \int_{t}^{t+\Delta t} dt' = v_0 \Delta t \tag{1.1.5}$$

arányos az eltelt idővel. Az anyagi pont tehát egyenlő időközök alatt egyenlő utakat tesz meg az egyenesen, ezért mozgását **egyenesvonalú egyenletes mozgásnak** nevezzük.

1.2 Speciális mozgások

1.2.1 Egyenesvonalú egyenletesen gyorsuló mozgás

A fejezet elolvasása előtt tanulja meg az A.1, A.2 és A.3 függeléket!

A részecske egyenesvonalú egyenletesen gyorsuló mozgást végez, ha a részecske gyorsulásvektora időben állandó:

$$\frac{d^2\mathbf{r}(t)}{dt^2} = \mathbf{a} \equiv \text{áll.} \tag{1.2.1}$$

Ez egyúttal az egyenletesen gyorsuló mozgást végző részecske mozgásegyenlete. A mozgásegyenletet idő szerint integrálva megkapjuk a részecske sebességét, mint az idő függvényét:

$$\mathbf{v}(t) - \mathbf{v}_0 = \int_{t_0}^{t} \mathbf{a}dt' = \mathbf{a}(t - t_0), \qquad \mathbf{v}(t) = \mathbf{a}(t - t_0) + \mathbf{v}_0, \tag{1.2.2}$$

ahol $\mathbf{v}_0 = \mathbf{v}(t_0)$ állandó vektor, az anyagi pont kezdősebessége a t_0 időpillanatban. A sebesség időfüggéséből látszik, hogy miért nevezzük a mozgást egyenletesen gyorsulónak: a sebesség egyenlő Δt időközök alatt azonos $\Delta\mathbf{v} = \mathbf{a}\Delta t$ vektorral változik meg. Mégegyszer integrálva idő szerint, megkapjuk az anyagi pont pályájának egyenletét:

$$\mathbf{r}(t) - \mathbf{r}_0 = \int_{t_0}^{t} \mathbf{v}dt' = \frac{1}{2}\mathbf{a}(t-t_0)^2 + \mathbf{v}_0(t-t_0), \qquad \mathbf{r}(t) = \frac{1}{2}\mathbf{a}(t-t_0)^2 + \mathbf{v}_0(t-t_0) + \mathbf{r}_0, \tag{1.2.3}$$

ahol $\mathbf{r}_0 = \mathbf{r}(t_0)$ újabb integrációs állandó, az anyagi pont helyzetvektora a t_0 kezdőpillanatban.

Ha az anyagi pont $\mathbf{v_0}$ kezdősebessége párhuzamos az anyagi pont állandó $\mathbf{a}$ gyorsulásával, akkor írhatjuk, hogy

$$\mathbf{a} = a\mathbf{t}, \qquad \mathbf{v}_0 = (\mathbf{v}_0 \cdot \mathbf{t})\mathbf{t} = v_{0t}\mathbf{t}, \tag{1.2.4}$$

ahol $\mathbf{t}$ a gyorsulás irányába mutató egységvektor. Ekkor az anyagi pont mozgásegyenlete

$$\mathbf{r}(t) = \left[\frac{1}{2}a(t - t_0)^2 + v_{0t}(t - t_0)\right]\mathbf{t} + \mathbf{r}_0 = s(t - t_0)\mathbf{t} + \mathbf{r}_0 \tag{1.2.5}$$

alakot ölt. Ez az $\mathbf{r}_0$ helyzetvektorú ponton átmenő, $\mathbf{t}$ irányú egyenes egyenlete. Az $s(t-t_0)$ az az út, amit az anyagi pont az egyenes mentén az $\mathbf{r}_0$ pontból kiindulva, a t_0 pillanattól kezdve mért $t - t_0$ idő alatt megtesz.

Általános esetben, amikor a kezdeti sebesség és a gyorsulás nem párhuzamosak, a mozgást ferde hajításnak nevezzük. Erről később lesz szó, amikor majd a mozgás okát is megnevezzük.

Figyeljünk fel rá, hogy a pálya meghatározására szolgáló mozgásegyenlet közönséges, másodrendű differenciálegyenlet. A pálya egyértelmű megadásához ezért két kezdőfeltételre van szükség: a helyzetvektor és a sebesség (a helyzetvektor idő szerinti első deriváltjának) kezdeti $\mathbf{r}_0$ és $\mathbf{v}_0$ értékeire.

Természetesen az egyenletesen gyorsuló mozgás ($\mathbf{a}$ =áll.) Descartes-koordinátákban könnyűszerrel leírható. Ha az $i = (x, y, z)$ index jelöli rendre az $\mathbf{E}_x$, $\mathbf{E}_y$, ill. $\mathbf{E}_z$ bázisvektorokkal párhuzamos összetevőket, akkor, a fenti egyenleteket skalárisan szorozva rendre az egyes bázisvektorokkal, kapjuk:

$$\begin{aligned}
\frac{d^2 r_i}{dt} &= a_i(t) = \text{áll.}, \\
\frac{dr_i}{dt} &= v_i(t) = \int_{t_0}^{t} a_i(t')dt' = a_i(t-t_0) + v_{0i}, \\
r_i(t) &= \int_{t_0}^{t} v_i(t')dt' = \frac{1}{2}a_i(t-t_0)^2 + v_{0i}(t-t_0) + r_{0i}. \qquad (1.2.6)
\end{aligned}$$

Itt a tömörebb írásmód kedvéért az $r_1(t) = x(t)$, $r_2(t) = y(t)$, $r_3(t) = z(t)$ jelölést használtuk az anyagi pont Descartes-koordinátáinak megadására. A kapott egyenletek azt jelentik, hogy az egyenletesen gyorsuló mozgás vetülete a Descartes-koordinátarendszer bármelyik tengelyére egyenesvonalú egyenletesen gyorsuló mozgás.

1.2.2 Körmozgás

A fejezet elolvasása előtt tanulja meg az A.4 függeléket!

Körmozgásról akkor beszélünk, ha az anyagi pont körpályán mozog. A mozgás leírásához válasszunk a kör síkjában egy polárkoordinátarendszert. Legyen az origó a kör középpontja. Ekkor a körmozgást az

$$r(t) = R = \text{áll.} \qquad (1.2.1)$$

egyenlet jellemzi, ahol R a kör sugara. Az anyagi pont helyzetét a körön a φ polárszög egyértelműen meghatározza. A mozgás leírása tehát azt jelenti, hogy meg kell adni a polárszöget, mint az idő függvényét: $\varphi(t)$. A sebesség és a gyorsulás radiális és érintő irányú komponensei rendre,

$$\begin{aligned}
v_r &= \frac{dr}{dt} = 0, \qquad v_\varphi = R\frac{d\varphi}{dt} = R\omega, \\
a_r &= \frac{d^2 r}{dt^2} - r\omega^2 = -R\omega^2, \qquad a_\varphi = r\frac{d\omega}{dt} + 2\omega\frac{dr}{dt} = R\beta, \qquad (1.2.2)
\end{aligned}$$

ahol bevezettük az anyagi pont ω szögsebességét és β szöggyorsulását:

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt}, \qquad \beta = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\varphi}{dt^2}. \qquad (1.2.3)$$

Az anyagi pont sebessége a kör érintőjével párhuzamos, nagysága $R|\omega|$ (a szögsebesség lehet negatív is!). Az anyagi pont radiális gyorsulása, $a_r\mathbf{e}_r$ a kör középpontja felé mutat, mert $a_r < 0$. **A körmozgást végző test radiális gyorsulását centripetális gyorsulásnak nevezzük.** Ezenkívül az anyagi pontnak általában van érintő irányú gyorsulása is, $a_\varphi\mathbf{e}_\varphi$, amelynek nagysága a szöggyorsulás nagyságával arányos, $|a_\varphi| = R|\beta|$.

Az egyenletes körmozgás. A körmozgás egyik speciális esete az egyenletes körmozgás. Ekkor a részecske szöggyorsulása zérus, $\beta = 0$. A

$$\beta = \frac{d^2\varphi}{dt^2} = 0 \qquad (1.2.4)$$

egyenletet idő szerint integrálva megkapjuk a részecske szögsebességét,

$$\omega = \int_{t_0}^{t} \beta(t')dt' + \omega_0 = \omega_0 = \text{áll.} \qquad (1.2.5)$$

ami időben állandónak adódik. Újabb idő szerinti integrálással kapjuk a részecske helyzetét meghatározó polárszög időfüggését:

$$\varphi(t) = \int_{t_0}^{t} \omega(t')dt' + \varphi_0 = \omega(t - t_0) + \varphi_0, \tag{1.2.6}$$

ahol $\varphi_0 = \varphi(t_0)$ az anyagi pont kezdeti helyzetét adja meg a körön. Miután az egyenletes körmozgás során a szögsebesség állandó, az anyagi pontnak zérus az érintő irányú gyorsulása, $a_\varphi = R\beta = 0$. Ilyenkor is van azonban a kör középpontja felé mutató, $R\omega^2 = \frac{v_\varphi^2}{R}$ =áll. nagyságú centripetális gyorsulása.

Az egyenletesen gyorsuló körmozgás. Egy másik speciális körmozgás az egyenletesen gyorsuló körmozgás, amikor a részecske szöggyorsulása β =áll.$\neq 0$. Ekkor a részecske mozgásegyenlete

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} = \beta = \text{áll.}, \tag{1.2.7}$$

ahonnan integrálással

$$\begin{aligned} \omega(t) &= \int_{t_0}^{t} \beta(t')dt' = \beta(t - t_0) + \omega_0, \\ \varphi(t) &= \int_{t_0}^{t} \omega(t')dt' = \frac{1}{2}\beta(t - t_0)^2 + \omega_0(t - t_0) + \varphi_0 \end{aligned} \tag{1.2.8}$$

adódik, ahol $\varphi_0 = \varphi(t_0)$ és $\omega_0 = \omega(t_0)$ integrálási állandók, rendre a polárszögnek és a szögsebességnek a kezdeti $t = t_0$ időpillanatban felvett értékei. Az egyenletesen gyorsuló körmozgást végző anyagi pontnak állandó, $R|\beta|$ nagyságú, érintő irányú gyorsulása van. A kör középpontja felé mutató centripetális gyorsulásásának $R\omega^2$ nagysága azonban a szögsebességgel együtt időben változik.

1.2.3 Harmonikus rezgőmozgás

A harmonikus rezgőmozgáshoz legegyszerűbben úgy jutunk, hogy az egyenletes körmozgást merőlegesen vetítjük a kör síkjában felvett Descartes-koordinátarendszer valamelyik tengelyére. Helyezzük a Descartes-koordinátarendszer és a polárkoordinátarendszer origóját is a kör középpontjába. Fejezzük ki az egyenletes körmozgást végző anyagi pont $x(t), y(t)$ Descartes-koordinátáit az anyagi pont

$$r(t) = R, \qquad \varphi(t) = \omega t + \varphi_0 \tag{1.2.1}$$

polárkoordinátáival:

$$x(t) = R\cos(\omega t + \varphi_0), \qquad y(t) = R\sin(\omega t + \varphi_0) = R\cos(\omega t + \varphi_0 - \frac{1}{2}\pi), \tag{1.2.2}$$

ahol φ_0 a $t = 0$ pillanatban a polárszög. Vegyük a mozgás vetületét az x-tengelyre. Az

$$x(t) = A\cos(\omega t + \alpha), \qquad A, \omega, \alpha = \text{áll.} \tag{1.2.3}$$

alakú egyenlettel leírt mozgás periodikus, ún. lineáris (vagy egy-dimenziós) harmonikus rezgőmozgás. Az anyagi pont az $x = 0$ pont körül rezeg az x-tengely mentén, $x(t)$ az anyagi pont előjeles kitérése az $x = 0$ helyzetből. A kitérés az idő koszinusz-függvénye. A maximális kitérés nagysága a rezgés A amplitúdója. A koszinusz-függvény argumentumát a rezgő anyagi pont fázisának nevezzük, $\varphi(t) = \omega t + \alpha$. A mozgás T periódusideje az az idő, ami az alatt telik el, hogy az anyagi pont közvetlenül egymás után azonos kitérésre tesz szert, vagyis az a legkisebb T idő, amelyre $x(t+T) = x(t)$ teljesül:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{1}{\nu}, \tag{1.2.4}$$

ahol ω-t körfrekvenciának, $\nu = \frac{\omega}{2\pi}$-t frekvenciának nevezzük. A frekvencia, $\nu = \frac{1}{T}$ azon események száma az időegység alatt, amikor az anyagi pont ugyanazt a kitérést veszi fel. Az anyagi pont fázisa a kezdeti $t = 0$ pillanatban α. Idő szerinti deriválással kapjuk a lineáris harmonikus rezgést végző anyagi pont sebességét és gyorsulását mint az idő függvényét:

$$\begin{aligned} v_x(t) &= \frac{dx}{dt} = -A\omega \sin(\omega t + \alpha), \\ a_x(t) &= \frac{d^2x}{dt^2} = -A\omega^2 \cos(\omega t + \alpha) = -\omega^2 x(t). \end{aligned} \tag{1.2.5}$$

Utóbbi egyenlet a lineáris harmonikus rezgést végző anyagi pont mozgásegyenlete:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 x(t). \tag{1.2.6}$$

A gyorsulás arányos a kitérés negatívjával, az arányossági tényező az $\omega^2 > 0$ pozitív állandó.

Teljesen hasonló eredményt kapunk, ha a kitérést a fázis szinusz-függvényeként vesszük fel, hiszen ez csak $\frac{1}{2}\pi$ állandó fáziseltolódást jelent: $\sin\alpha = \cos(\alpha - \frac{1}{2}\pi)$. Ezért az egyenletes körmozgás y-tengelyre vett vetülete is lineáris harmonikus rezgőmozgás.

Vegyük észre, hogy a lineáris harmonikus rezgést végző anyagi pont az időméréshez szükséges óra egy lehetséges megvalósítása.

Általában, ha bármilyen $\psi(t)$ fizikai mennyiség az (1.2.3) egyenlethez hasonló időbeli változást mutat,

$$\psi(t) = A\cos(\omega t + \alpha) \tag{1.2.7}$$

ahol A, ω és α (valós) állandók, azaz ha a

$$\frac{d^2\psi(t)}{dt^2} = -\omega^2 \psi(t) \tag{1.2.8}$$

alakú közönséges másodrendű differenciálegyenlet megoldása, akkor azt mondjuk, hogy az adott ψ mennyiség lineáris harmonikus rezgést végez. Azt is szoktuk mondani, hogy ekkor a ψ fizikai mennyiség egy lineáris harmonikus oszcillátort képvisel. Az ilyen lineáris harmonikus oszcillátor azonban elvont fogalom, amelyhez általában nem is kapcsolható mechanikai mozgás. **Lineáris harmonikus oszcillátor minden olyan $\psi(t)$ mennyiség, amelynek időfüggése analóg a lineáris harmonikus rezgést végző anyagi pont kitérésének időfüggésével.**

Különböző irányú harmonikus rezgőmozgásokat össze lehet tenni. Így síkbeli (kétdimenziós) ill. térbeli (három-dimenziós) rezgőmozgásokhoz jutunk. Vegyük először merőleges irányú rezgések síkbeli összetevését. Erről akkor beszélünk, ha az anyagi pont Descartes-koordinátái az

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega_x^2 x, \qquad \frac{d^2y}{dt^2} = -\omega_y^2 y \tag{1.2.9}$$

alakú mozgásegyenleteket elégítik ki, ahol A_x, A_y, ω_x, ω_y állandók. Ez mind az x-, mind az y-tengely irányában lineáris harmonikus rezgést jelent, amelyeknek azonban más az amplitúdója és a körfrekvenciája. Ráadásul mindkét irányban különböző lehet a rezgés kezdeti α_x és α_y kezdeti fázisa is. A két-dimenziós mechanikai harmonikus oszcillátor két egymásra merőleges irányban rezgő lineáris harmonikus oszcillátor.

Az eredményül kapott pályagörbe a síkban általában nagyon bonyolult, az ú.n. Lissajous-görbék egyike. Egy egyszerű speciális eset az, amikor azonos frekvenciájú merőleges rezgéseket teszünk össze:

$$\omega_x = \omega_y = \omega, \qquad \alpha_y = \alpha_x - \frac{1}{2}\pi. \tag{1.2.10}$$

A kezdeti fázisokra vonatkozó megszorítást csak az egyszerűség kedvéért tettük. Ekkor

$$x(t) = A_x \cos(\omega t + \alpha_x), \qquad y(t) = A_y \sin(\omega t + \alpha_x). \tag{1.2.11}$$

Innen, a $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ azonosságot felhasználva, az anyagi pont pályaegyenletére,

$$\frac{x^2}{A_x^2} + \frac{y^2}{A_y^2} = 1, \tag{1.2.12}$$

azaz egy ellipszis egyenlete adódik, amelynek féltengelyei a koordinátatengelyekkel párhuzamosak és nagyságuk rendre A_x és A_y.

Természetesen a térben három, egymásra páronként merőlegesen rezgő lineáris harmonikus oszcillátort is összetehetünk. Ez annak felel meg, hogy az anyagi pont Descartes-koordinátákban

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega_x^2 x, \qquad \frac{d^2y}{dt^2} = -\omega_y^2 y, \qquad \frac{d^2z}{dt^2} = -\omega_z^2 z \tag{1.2.13}$$

alakú mozgásegyenleteknek tesz eleget, ahol az ω_i körfrekvenciák és a megoldásokban fellépő A_i amplitúdók és kezdeti α_i fázisok $(i = x, y, z)$ állandók. Az A_i és α_i állandókat a kezdőfeltételek meghatározzák meg. Ilyenkor három-dimenziós mechanikai oszcillátorról beszélünk. Ez tehát úgy is felfogható mint három független lineáris harmonikus oszcillátor.

1.3 Kiterjedt testek

1.3.1 Modellek: pontrendszer és folytonos anyageloszlású test (közeg)

A testeknek általában véges a térbeli kiterjedésük. Ha ettől eltekinthetünk, akkor pontszerű testről, azaz anyagi pontról beszélünk. **Ha a test véges méretét figyelembe kell vennünk, akkor kiterjedt testről beszélünk.**

A kiterjedt testek mozgásának leírása kétféle modell alapján lehetséges.

1. *Pontrendszer.* Abból indulunk ki, hogy a kiterjedt testet részecskék (pl. atomok, molekulák) alkotják. Ezek a köztük levő távolságokhoz képest általában nagyon kicsiny méretűek, tehát jó közelítéssel pontszerűnek, azaz anyagi pontoknak tekinthetők. A kiterjedt test tehát mikroszkopikus szerkezetét figyelembe véve anyagi pontok rendszerének tekinthető: **pontrendszernek**. A kiterjedt testek pontrendszerrel történő modellezése a kiterjedt testek mikroszkopikus szerkezetén alapul.

2. *Folytonos anyageloszlású test (közeg).* A kiterjedt testet pontrendszerként kezelni általában technikailag lehet nehéz. Vegyük figyelembe ugyanis, hogy pl. valamely egyatomos anyag 1 molnyi mennyiségében $6 \cdot 10^{23}$ számú atom van jelen. Ennyi darab anyagi pont mozgását kell külön-külön leírni, ha le akarjuk írni, hogy hogyan mozog a test 1 molnyi darabja. Ilyenkor célszerű valamilyen ügyesebb modellt használni, hogy ne kelljen minden egyes részecske mozgását külön vizsgálni. Úgy járunk el, hogy minden térbeli pont körül gondolatban kiszemelünk egy kicsiny, de még mindig makroszkopikus $\Delta V \sim \mathcal{O}(b^3)$ térfogatú anyagdarabkát. Feltesszük, hogy a választott térfogatdarabka b lineáris kiterjedése $b \gg d$, ahol d a szomszédos atomok közti átlagos távolság, hogy a térfogatdarabok makroszkopikusak legyenek. Utána ezen kicsiny, de makroszkopikus anyagdarabkákhoz tartozó átlagos F fizikai mennyiségeket határozunk meg. Az átlagolás makroszkopikus Δt időtartamra történik, amely sokkal nagyobb mint az atomi mozgások jellegzetes időtartamai. Például lehetséges F fizikai mennyiség a ΔV térfogatban található atomok átlagos ΔN száma vagy $\mathbf{v}$ sebessége. Ha az F mennyiség értékét a tér minden $\mathbf{r}$ helyzetvektorú pontja környezetében felvett ΔV térfogatdarabkában, minden t pillanatban meghatározzuk, akkor ennek segítségével $f(\mathbf{r}, t)$ helytől és időtől folytonosan függő fizikai mennyiségeket tudunk értelmezni. Az értelmezés hogyanjára vonatkozóan lásd a B függeléket. A kapott $f(\mathbf{r}, t)$ fizikai mennyiségek a t pillanatban minden $\mathbf{r}$ helyen jellemzik az anyagot, ún. térmennyiségek. **Térmennyiségnek vagy másszóval fizikai mezőnek nevezünk minden olyan fizikai mennyiséget, amely a tér minden pontjában, minden pillanatban jól meghatározott értékkel rendelkezik.** Megjegyezzük a későbbiek kedvéért, hogy fizikai mezők nem csak akkor vannak jelen a természetben, ha testek, azaz kondenzált anyag van jelen, hanem akkor és ott is, ahol nincsen jelen kondenzált anyag, nevezetesen a vákumban.

   Ha a kiterjedt testeket térmennyiségekkel írjuk le, akkor azt mondjuk, hogy a kiterjedt testet folytonos anyageloszlásúnak, másszóval folytonos közegnek tekintjük. Áttértünk mikroszkopikus pontrendszer-modellről egy olyan modellre, amelyben nem érdekel bennünket, hogy a testet valóságosan alkotó részecskék hol vannak és hogyan mozognak. Helyette a testet térben és időben pontról pontra folytonosan változó fizikai mennyiségekkel, térmennyiségekkel írjuk le. Ezzel biztosan elveszítettünk bizonyos finom, mikroszkopikus részleteket a test szerkezetére vonatkozóan. Amit nyertünk vele, hogy a test mozgásának makroszkopikus leírása egyszerűbb. A mozgás mikroszkopikus, pontrendszerként történő leírásához nagyon nagyszámú anyagi pont pályájának, a testet alkotó részecskék N

számával azonos számú $\mathbf{r}_a(t)$ $(a = 1, 2, \ldots, N)$ függvénynek a megadása szükséges. A folytonos közeg mozgásának (makroszkopikus) jellemzéséhez csak néhány, helytől és időtől függő $f(\mathbf{r}, t)$ térmennyiséget kell megadnunk. Egyetlen ilyen függvény minden térbeli pontban történő megadása kontinuum sok adat. Jogosan kérdezhetjük, miért egyszerűbb ez a leírás mégis, mint a pontrendszer tárgyalása. A pontrendszer részecskéi pályájának meghatározásához általában nagyságrendben annyi darab (közönséges) differenciálegyenletből álló egyenletrendszert kell megoldani, ahány részecske van jelen. Folytonos anyageloszlású test mozgásának tárgyalása során csak néhány f térmennyiségre vonatkozó (parciális) differenciálegyenletből álló egyenletrendszert kell megoldanunk. Innen a nyereség.

Néhány fontos példa a folytonos közeget jellemző térmennyiségekre:

1. A kitérés vektormező, $\mathbf{s}(\mathbf{r}, t)$ megadja, hogy mekkora a közeg azon részecskéinek az átlagos elmozdulása valamilyen referencia helyzethez (pl. egyensúlyi helyzethez) képest, amelyek az $\mathbf{r}$ helyen, a t pillanatban felvett kis, makroszkopikus térfogatelemben találhatók.

2. A sebesség vektormező, $\mathbf{v}(\mathbf{r}, t)$ megadja, hogy a közeg azon részecskéinek mekkora az átlagos sebessége, amelyek az $\mathbf{r}$ helyen, a t pillanatban felvett kis, makroszkopikus térfogatelemben találhatók.

3. A részecskeszám sűrűsége, $n(\mathbf{r}, t)$ azzal a jelentéssel bír, hogy $n(\mathbf{r}, t)dV$ megadja az $\mathbf{r}$ helyet tartalmazó dV (kicsiny, makroszkopikus) térfogatelemben található részecskék átlagos számát a t pillanatban.

4. A tömegsűrűség, vagy egyszerűen csak sűrűség, $\rho(\mathbf{r}, t)$ azzal a jelentéssel bír, hogy $\rho(\mathbf{r}, t)dV$ megadja az $\mathbf{r}$ helyet tartalmazó dV (kicsiny, makroszkopikus) térfogatelemben található részecskék átlagos tömegét a t pillanatban. Ha a közeget azonos, m tehetetlen tömegű részecskék alkotják, akkor $\rho(\mathbf{r}, t) = mn(\mathbf{r}, t)$.

5. A térfogati erősűrűség, $\mathbf{f}(\mathbf{r}, t)$ azzal a jelentéssel bír, hogy $\mathbf{f}(\mathbf{r}, t)dV$ megadja az $\mathbf{r}$ helyet tartalmazó dV (kicsiny, makroszkopikus) térfogatelemben található részecskékre ható átlagos eredőerőt t pillanatban.

(A tehetetlen tömeg és az erő dinamikai fogalmak, amelyeknek a pontos jelentésére a Dinamika fejezetben térünk vissza.)

1.3.2 Pontrendszer kinematikája

Pontrendszernek nevezzük az $N \geq 1$ darab anyagi pontból álló rendszert. Az $N = 1$ esetet, az anyagi pont esetét speciális pontrendszernek tekinthetjük, amely egyetlen anyagi pontból áll. A pontrendszer mozgásának leírásához meg kell adnunk minden egyes részecske $\mathbf{r}_a(t)$ $(a = 1, 2, \ldots, N)$ helyzetvektorát, mint az idő függvényét valamilyen vonatkoztatási rendszerben. Természetesen értelmezhetjük valamennyi $(a = 1, 2, \ldots, N)$ részecske sebességét,

$$\frac{d\mathbf{r}_a(t)}{dt} = \mathbf{v}_a(t), \tag{1.3.1}$$

és gyorsulását,

$$\frac{d^2\mathbf{r}_a(t)}{dt^2} = \frac{d\mathbf{v}_a(t)}{dt} = \mathbf{a}_a(t). \tag{1.3.2}$$

Az N darab $\mathbf{r}_a(t)$ pályaegyenlet megadása Descartes-koordinátarendszerben $3N$ darab Descartes-koordináta megadását jelenti, mint az idő függvényét:

$$\mathbf{r}_a(t) : x_a(t), y_a(t), z_a(t), \qquad a = 1, 2, \ldots, N \tag{1.3.3}$$

Tehát $3N$ darab koordináta szükséges és elegendő ahhoz, hogy megadjuk N darab anyagi pont helyzetét a térben.

A tapasztalat igazolja a klasszikus mechanikának azt a feltevését, hogy a mechanikai rendszer mechanikai állapotának megadásához az N darab részecske N darab helyzetvektorát és N darab sebességvektorát elegendő megadni. A mechanikai állapot akkor van egyértelműen megadva valamely t időpillanatban, ha mindazok a fizikai mennyiségek ismertek, amelyekből a – később tárgyalásra kerülő – mozgásegyenletek segítségével meg lehet határozni a rendszer állapotát a későbbi $t+dt$ időpillanatban. A mechanikai állapot kimerítő jellemzéséhez szükséges fizikai mennyiségek értékei tehát a mozgásegyenletek kezdőfeltételei lesznek.

1.3.3 Általános koordináták és általános sebességek. Szabadsági fok

Anyagi pont. Az anyagi pont esetében láttuk, hogy hogyan adható meg a helyzete a térben, legáltalánosabban három görbevonalú koordinátával: (q_1, q_2, q_3). A koordinátarendszer valamilyen speciális választása esetén ezek hosszúságoknak, vagy szögeknek adódtak (ld. A Függelék). Nevezzük a továbbiakban az anyagi pont valamilyen tetszőleges koordinátarendszerben meghatározott koordinátáit általános koordinátáknak.

A speciális koordinátarendszerek vizsgálata során azt is láttuk, hogy az anyagi pont elemi elmozdulásának és így sebességének összetevői kifejezhetők voltak a bevezetett koordinátákkal és azok infinitezimális dt idő alatt bekövetkező dq_i $(i = 1, 2, 3)$ megváltozásaival, ill. a $\dot{q}_i = \frac{dq_i(t)}{dt}$ idő szerinti első deriváltakkal. Az anyagi pont általános koordinátáinak $\dot{q}_i$ $(i = 1, 2, 3)$ idő szerinti első deriváltjait ezért **általános sebességeknek** nevezzük.

Az anyagi pont mechanikai állapotának megadásához 3 darab általános koordináta és a hozzájuk tartozó 3 darab általános sebesség meghatározása elegendő. **Ha az anyagi pont f darab kényszernek van alávetve,** (pl. a Föld felszínén kell mozogjon, stb.), **akkor 3 koordinátája mint az idő függvénye között f kényszerfeltételi egyenlet áll fenn.** Ilyenkor $3 - f$ darab független általános koordináta megadása szükséges és elegendő az anyagi pont helyzetének megadásához. **Az anyagi pont helyzetének egyértelmű megadásához szükséges és elegendő általános koordinátákat (geometriai adatokat) ill. azok számát az anyagi pont szabadsági fokainak ill. az anyagi pont szabadsági fokai számának nevezzük.** Ha az anyagi pont mozgása során f darab kényszerfeltételnek tesz eleget, akkor a szabadsági fokainak a száma $s = 3 - f$. Nyilván $f = 3$ darab (független, azaz egymásból nem következő) kényszer fennállása esetén a részecskének nincsen egyetlen szabadsági foka sem. Az s szabadsági fokú anyagi pont mechanikai állapotának megadásához s darab független általános koordináta és a hozzájuk tartozó s darab általános sebesség szükséges.

Bizonyos mechanikai rendszerekben bonyolultabb kényszerek is előfordulhatnak, amikor f darab egyenlet áll fenn a mozgás során az általános koordináták és sebességek között.

Még egy dolgot érdemes megemlíteni, mielőtt rátérünk a pontrendszerekre. Ha az anyagi pont koordinátái az egyik koordinátarendszerben q_i, a másikban q'_i, akkor létezik olyan koordinátatranszformáció, amely kölcsönösen egyértelmű kapcsolatot teremt közöttük, ez az ún. általános koordináta transzformáció a tér vesszős és vesszőtlen koordinátarendszere között:

$$q_i = q_i(q'_1, q'_2, q'_3), \qquad (i = 1, 2, 3). \tag{1.3.1}$$

Pontrendszer. Mindez könnyen általánosítható pontrendszerekre. A pontrendszer mozgásának teljes leírását az jelenti, ha valamennyi pontjának megadjuk valamilyen tetszőlegesen választott koordinátarendszerben a koordinátáit, mint az idő függvényeit. Ez $3N$ darab geometriailag független, görbevonalú koordináta megadását jelenti. Több részecskéről lévén szó, nem csak ez az egyetlen lehetőség a pontrendszer helyzetének egyértelmű megadására. Pl. megadhatunk olyan távolságot, amelyet az egyik részecskétől a másikig mérünk, vagy megadhatunk egy szöget, amelyet három részecske által meghatározott háromszögből veszünk, stb. A lényeg az, hogy $3N$ darab olyan független hosszúság- vagy szögadatot kell megadjunk, amelyek a részecskék helyzetét kimerítően jellemzik. Az N darab részecske helyzetének egyértelmű megadásához szükséges és elegendő $3N$ darab tetszőleges, geometriailag független hosszúság- vagy szögadatot közös néven **a pontrendszer q_i $(i = 1, 2, \ldots, 3N)$ általános koordinátáinak nevezzük; az általános koordináták idő szerinti első deriváltjait pedig $\dot{q}_i$ $(i = 1, 2, \ldots, 3N)$ általános sebességeknek.**

Ha a pontrendszer részecskéinek helyzetét megadó koordináták között a mozgás során f darab reláció, azaz **kényszer** áll fenn, akkor $3N - f$ általános koordináta megadása szükséges csak a rendszer helyzetének megadásához. **A mechanikai rendszer helyzetének egyértelmű megadásához szükséges és elegendő geometriai adatok, azaz általános koordináták számát a mechanikai rendszer szabadsági fokai s számának nevezzük. Az s szabadsági fokú rendszer mechanikai állapotának megadásához s darab általános koordináta és a hozzájuk tartozó s darab általános sebesség szükséges és elegendő.**

A továbbiakban nem fogunk részletesen foglalkozni a kényszerekkel. Érdemes azonban megemlíteni, hogy ezek a fizikában nagyon fontosak. A kényszerekkel terhes mechanikai rendszerek tanulmányozása vezet el az úgynevezett **mértékszimmetria** fogalmához. Az alapvető kölcsönhatások többsége pedig ugyancsak ilyen mértékszimmetriával kapcsolatos, jelenlegi ismereteink szerint.

1.3.4 A kiterjedt testek osztályozása

A kiterjedt testeket osztályozhatjuk **merevtestekre** és **deformálható testekre**. **Egy kiterjedt testet merevtestnek nevezünk, ha bármely két pontjának távolsága a test mozgása során állandó marad.** A merevtest szemléletes tulajdonsága, hogy mozgása során megőrzi alakját, külső behatás esetén nem szenved alakváltozást, más szóval nem deformálódik. A természetben vannak olyan testek, amelyek bizonyos körülmények között jó közelítéssel merevtestnek tekinthetők, ilyenek általában a szilárd halmazállapotú testek.

Mindazokat a testeket, amelyek nem merevtestek, deformálható testeknek nevezzük. Szigorúan véve deformálható testnek kell tekinteni minden testet, hiszen egy szilárd halmazállapotú test esetében is csak elhanyagolás azt mondani, hogy bármely két részecskéjének távolsága mindig állandó. Természetesen ide kell sorolni a folyadékokat és a gázokat is.

1.3.5 Hullámok

A folytonos anyageloszlású testek mechanikai mozgásának leírásával nem foglalkozunk általánosságban, mert az nagyon különböző aszerint, hogy merevtestről, vagy deformálható testről van-e szó, és attól is függ hogy miféle mozgást akarunk leírni. Néhány konkrét esetben majd fogunk erre példát látni a testek speciális mozgásai során. Egy nagyon fontos jelenség leírásával azonban már itt foglalkozunk. Ez a hullámjelenség.

Folytonos közegben, vagy annak felszínén mechanikai hullámok terjedhetnek. A hang és az ultrahang mechanikai hullámok. A hullámterjedés egyike a legfontosabb mechanikai jelenségeknek, mert a mechanikai hullám speciális esete annak a sokféle hullámjelenségnek, ami a természetben előfordul (pl. fény, mikrohullám, rádióhullám, infravörös sugárzás, stb.)

Legyen adott egy fizikai mező, amelyet valamilyen $\psi(\mathbf{r},t)$ térmennyiség jellemez. **Hullámról akkor beszélünk, ha valamely térmennyiségben keltett zavar időben állandó sebességgel tovaterjed.** A térmennyiséget, amelyben a zavar jelentkezik, szokás ilyenkor **hullámmennyiségnek** nevezni.

Hullámcsomag. Vegyük a hullámok egyik jellegzetes esetét, a **hullámcsomag terjedését**. Legyen adott a t_0 kezdeti pillanatban a ψ fizikai mennyiségnek a $\psi(\mathbf{r},t_0) = f(\mathbf{r})$ térben lokalizált eloszlása. Az $f(\mathbf{r})$ függvény általában valamely pontban maximummal rendelkezik, és ennek a pontnak véges sugarú környezetében nullától lényegesen különböző értékeket vesz fel, a maximumhelytől nagy távolságban pedig nullához tart. Egy lehetséges példa a Gauss-függvény alakú hullámcsomag: $f(\mathbf{r}) = f_0 e^{-\frac{(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0)^2}{2\sigma^2}}$, amelynek a maximuma az $\mathbf{r}_0$ pontban van és a „szélessége" σ. A térben $\mathbf{c}$ =áll. sebességgel mozgó hullámcsomagot a ψ térmennyiség alábbi időfüggésével tudjuk leírni:

$$\psi(\mathbf{r},t) = f(\mathbf{r} - \mathbf{c}t). \tag{1.3.1}$$

Ez azt fejezi ki, hogy a hullámcsomagot $\mathbf{c}t$ vektorral kell a térben eltolni. A zavar mintázata változatlan marad, csak állandó sebességgel odább halad a térben.

Síkhullám. Egy másik hullámforma a síkhullám. A síkhullám egyenlete:

$$\psi(\mathbf{r},t) = f(\mathbf{r}\cdot\mathbf{n} - ct), \tag{1.3.2}$$

ahol $\mathbf{n}$ =áll egységvektor, $\mathbf{c} = c\mathbf{n}$ a síkhullám állandó terjedési sebessége, az ún. **fázissebesség.** A $\Phi(\mathbf{r},t) = \mathbf{r}\cdot\mathbf{n} - ct$ mennyiséget a hullám fázisának nevezzük. Azon pontok mértani helyét a térben, amelyekben a fázis rögzített, állandó értéket vesz fel, **fázisfelületnek** nevezzük. A fázisfelületek egyenlete:

$$\Phi(\mathbf{r},t) = \mathbf{r}\cdot\mathbf{n} - ct = \text{ áll.} \tag{1.3.3}$$

Ezek tehát a síkhullám esetében $\mathbf{n}$ normálisú síkok. Ezért nevezzük a síkhullámot síkhullámnak. A fázisfelületek $\mathbf{c} = c\mathbf{n}$ sebességgel mozognak. Ennek belátásához vezessük be a helyzetvektor $\mathbf{n}$ irányú vektorkomponensét, $\mathbf{r}_n = (\mathbf{r}\cdot\mathbf{n})\mathbf{n}$. Segítségével írhatjuk, hogy

$$\mathbf{n}(\mathbf{r}\cdot\mathbf{n}) - c\mathbf{n}t = \mathbf{r}_n - \mathbf{c}t = \text{ áll. }, \tag{1.3.4}$$

amit idő szerint differenciálva kapjuk, hogy a fázisfelületek sebessége, a **fázissebesség**:

$$\mathbf{v}_f = \frac{d\mathbf{r}_n}{dt} = \mathbf{c}. \tag{1.3.5}$$

Gömbhullám. Egy másik példa hullámokra a **gömbhullám**:

$$\psi(r,t) = f(r \pm ct), \tag{1.3.6}$$

ahol r egy gömbi polárkoordinátarendszerben a sugárirányú koordináta, c =áll.> 0. Azon pontok mértani helyének egyenlete, amelyekben a hullámmennyiség fázisa, $r \pm ct$ azonos értéket vesz fel,

$$r(t) = r_0 \mp ct \tag{1.3.7}$$

minden adott pillanatban egy gömbfelület egyenlete. A fázisfelületek gömbfelületek. A hullám (1.3.6) kifejezésében a minusz (plusz) előjel azt jelenti, hogy az idő múlásával a fázisfelületek egyre nagyobb (kisebb) sugarú gömbök, azaz az origóból kifutó (az origóba befutó) gömbhullámról van szó.

Lineáris és nem lineáris hullámjelenségek. Fontos megkülönböztetni a lineáris hullámjelenségeket a nem-lineáris hullámjelenségektől. A lényegi eltérés abban van, hogy mi történik, ha két hullám $\psi_1(\mathbf{r},t)$ és $\psi_2(\mathbf{r},t)$ találkozik. Milyen lesz az eredő $\psi_e(\mathbf{r},t)$ hullám, ami kialakul? **Lineáris hullámjelenségről beszélünk, ha érvényes a lineáris szuperpozíció elve:** bármely két hullám összege (általánosabban lineáris kombinációja) is egy lehetséges hullám,

$$\psi_e(\mathbf{r},t) = \psi_1(\mathbf{r},t) + \psi_2(\mathbf{r},t). \tag{1.3.8}$$

Nem-lineáris hullámjelenségről beszélünk, ha a lineáris szuperpozíció elve nem igaz. Ilyenkor két találkozó hullám eredője általában nem a két hullám összege (lineáris kombinációja),

$$\psi_e(\mathbf{r},t) \neq \psi_1(\mathbf{r},t) + \psi_2(\mathbf{r},t). \tag{1.3.9}$$

Először víz felszínén észleltek nem-lineáris hullámokat. A furcsaságuk az, hogy sokkal messzebbre terjedhetnek változatlan alakkal, gyengítetlenül, mint a lineáris hullámok. Manapság az optika egy egész fejezete, a **nem-lineáris optika** foglalkozik a nem-lineáris hullámjelenségekkel és állítja azokat eredményesen a technika, többek között a fizikai úton történő információtovábbítás szolgálatába (pl. fényvezetők).

Periodikus hullámok. Alább részletesen a lineáris síkhullámokkal foglalkozunk. (Az elmondottak általánosíthatók gömbhullámokra is.) Válasszuk egyszerűség kedvéért a koordinátarendszerünk x tengelyét a hullám terjedési irányában, ekkor a síkhullám alakja:

$$\psi(x,y,z,t) = f(x \pm ct), \tag{1.3.10}$$

ahol a negatív (pozitív) előjel jobbra (balra) haladó hullámnak felel meg. A továbbiakban elhagyjuk a hullámmennyiség argumentumából az y és z koordinátától való függés jelölését, hiszen nincsen ilyen függés. A hullámok egy fontos csoportját képezik a **periodikus hullámok**, amikor a hullámmennyiség a térben és az időben periodikusan változik. Ilyenkor létezik egy olyan legkisebb távolság, a λ **hullámhossz** és egy olyan legkisebb időtartam, a T **periódusidő,** amelyekre nézve a hullámot megadó függvény periodikus:

$$\psi(x,t) = \psi(x+\lambda,t) = \psi(x,t+T). \tag{1.3.11}$$

Felhasználva az (1.3.10) alakot, az adódik, hogy a periódusidő és a hullámhossz nem függetlenek:

$$\lambda = cT. \tag{1.3.12}$$

Bevezethetjük a periodikus hullám **frekvenciáját,** $\nu = 1/T$, ami azt méri, hogy időegységre hány periódus esik.

A matematikának van egy fontos állítása, ami azt mondja, hogy minden (kellően jó tulajdonságú) periodikus függvény, $f(x) = f(x+a)$ egyértelműen sorba fejthető szinusz- és koszinusz-függvények szerint, az ún. Fourier-sorba:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\Big[a_n\cos(k_n x) + b_n\sin(k_n x)\Big]. \tag{1.3.13}$$

A Fourier-sor tagjai a $k_n = n\frac{2\pi}{a}$ $(n = 0,1,2,3,\ldots)$ paraméterű szinusz- ill. koszinuszfüggvények, és az együtthatók:

$$a_n = \frac{2}{a}\int_0^a f(x)\cos(k_n x)dx, \qquad b_n = \frac{2}{a}\int_0^a f(x)\sin(k_n x)dx. \tag{1.3.14}$$

A lineáris hullámokra érvényes a lineáris szuperpozíció elve. Ezért mondhatjuk, hogy a periodikus hullámot a Fourier-tétel segítségével koszinusz- és szinusz-hullámok összegére bontjuk. **A szinusz- és koszinusz-hullámokat közös néven harmonikus hullámoknak nevezzük.** A Fourier-sor tagjai a $\nu_n = n\nu$ frekvenciákhoz, vagyis a ν (alap)frekvencia egészszámú többszöröseihez, az úgynevezett felharmonikus frekvenciákhoz tartozó harmonikus hullámok. A periodikus hullámok megértéséhez elegendő tehát a harmonikus hullámok vizsgálatára szorítkoznunk.

A hullámokkal kapcsolatos egyik fontos mennyiség **a hullám intenzitása, ami a hullámmennyiség négyzetének egy periódusidőre vett időátlaga:**

$$I = <\psi^2(x,t)> = \frac{1}{T}\int_0^T \psi^2(x,t)dt. \tag{1.3.15}$$

Mivel periodikus hullámokra alkalmazható a Fourier-tétel, érvényes rájuk a Fourier-sorokra vonatkozó Parseval-féle egyenlőség is, amelynek következtében:

$$I \propto \sum_{n=0}^{\infty} a_n^2 + \sum_{n=1}^{\infty} b_n^2. \tag{1.3.16}$$

Ennek értelmében **a periodikus hullám intenzitása egyenlő az összetevő harmonikus hullámok intenzitásainak összegével.**

Harmonikus hullámok. Nézzük a harmonikus hullám általános alakját:

$$\psi(x,t) = A\sin(\pm k(x \pm ct) + \alpha) = A\sin(\omega t \pm kx + \alpha), \tag{1.3.17}$$

ahol figyelembe vettük, hogy a helytől és az időtől való függésnek (1.3.10) alakúnak kell lenni. A $\pm k$ tényezőt dimenzionális okból kellett beírnunk; A **a hullám amplitudója,** $\omega = kc$ a **körfrekvenciája.** A szinusz-függvény $\omega t \pm kx + \alpha$ argumentumát **a hullám fázisának** nevezzük, α az állandó **fáziseltolódás.** További fontos összefüggések:

$$v_f = c = \frac{\omega}{k}, \qquad \omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi\nu, \qquad k = \frac{2\pi}{\lambda}. \tag{1.3.18}$$

A k mennyiséget **hullámszámnak** nevezzük. Megjegyezzük, hogy $\alpha = -\pi/2$ választás esetén megkapjuk a fáziseltolódás nélküli koszinusz-hullámot. Az (1.3.17) egyenlet tehát valóban a harmonikus hullámok általános alakja.

Állóhullám. Vizsgáljuk meg két, azonos frekvenciájú, fáziseltolódás nélküli síkhullám szuperpozícióját, ha amplitudóik azonosak és fázissebességeik ellentétes irányúak:

$$\psi_1(x,t) = A\sin(kx - \omega t), \qquad \psi_2(x,t) = A\sin(kx + \omega t). \tag{1.3.19}$$

Ekkor az eredő hullám

$$\begin{aligned} \psi(x,t) &= \psi_1(x,t) + \psi_2(x,t) = A\Big[\sin(kx - \omega t) + \sin(kx + \omega t)\Big] \\ &= 2A\sin(kx)\cos(\omega t), \end{aligned} \tag{1.3.20}$$

amely térben is és időben is periodikus, de a helyfüggése és az időfüggése szeparált. A kapott hullám ún. állóhullám. **Állóhullámról akkor beszélünk, ha a térmennyiség a tér különböző pontjaiban azonos fázisban rezeg, csak a rezgések amplitudója függ a helytől. Az állóhullám tehát egy kollektív jelenség, mert a tér minden pontjában összehangoltan, azonos fázisban rezeg a térmennyiség.**

Interferencia. Lineáris harmonikus hullámok lineárisan szuperponálódnak. Ennek eredménye lehet **interferencia**. **Interferenciáról akkor beszélünk, ha a hullámmennyiség négyzetében, a $\psi^2(x,t)$ mennyiségben a tér- és az időfüggés szeparálódik: $\psi^2(x,t) = u(t)v(x)$. Ekkor az időben átlagolt**

$$I =< \psi^2(x,t) >= \frac{1}{T}\int_0^T \psi^2(x,t)dt \propto v(x) \tag{1.3.21}$$

mennyiséget, az intenzitást mérő megfigyelő időtől független „interferenciaképet" lát, $I \propto v(x)$, ami csak a helytől függ. Periodikusan váltakozó erősítési és gyengítési helyeket tartalmaz. **Az interferencia feltétele, hogy**

1. **a szuperponálódó hullámok frekvenciája egyezzen meg, és**
2. **a szuperponálódó hullámok állandó fáziskülönbséggel találkozzanak.**

Az interferencia illusztrálására szuperponáljunk két azonos frekvenciájú, de δ =áll. fáziseltolódással rendelkező síkhullámot, amelyek fázissebessége azonos:

$$\begin{aligned} \psi(x,t) &= A_1 \sin(\omega t - kx) + A_2 \sin(\omega t - kx + \delta) = \mathrm{Re}\Big[A_1 e^{i(\omega t - kx)} + A_2 e^{i(\omega t - kx + \delta)}\Big] \\ &= A\mathrm{Re}\Big[e^{i(\omega t - kx + \epsilon)}\Big] = \frac{A}{2}\Big[e^{i(\omega t - kx + \epsilon)} + e^{-i(\omega t - kx + \epsilon)}\Big], \end{aligned} \tag{1.3.22}$$

ahol a helytől és időtől független tényezőt

$$A_1 + A_2 e^{i\delta} = A e^{i\epsilon} \tag{1.3.23}$$

alakba írtuk át, ami azt jelenti, hogy

$$A^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos\delta. \tag{1.3.24}$$

Felhasználtuk a komplex számok Euler-féle előállítását,

$$z = x + iy = |z|e^{i\varphi}, \quad |z| = \sqrt{x^2+y^2}, \quad e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi, \tag{1.3.25}$$

ahol $i = +\sqrt{-1}$, ill. hogy

$$\cos\varphi = \frac{1}{2}\Big(e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}\Big), \qquad \sin\varphi = \frac{1}{2i}\Big(e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}\Big), \tag{1.3.26}$$

mivel

$$\Big(e^{i\varphi}\Big)^* = e^{-i\varphi} = \cos\varphi - i\sin\varphi. \tag{1.3.27}$$

Képezzük a hullámmennyiség négyzetét (valós szám négyzete egyenlő az abszolút értékének a négyzetével):

$$\psi^2 = |\psi|^2 = \frac{A^2}{4}\Big[2 + e^{2i(\omega t - kx + \epsilon)} + e^{-2i(\omega t - kx + \epsilon)}\Big]. \tag{1.3.28}$$

Ezt kell a periódusidőre átlagolni, amikor az intenzitást számoljuk. Az átlagolást (integrálást) tagonként végezzük el. A periodikus tagok átlaga zérus, úgyhogy az eredmény:

$$I = \langle\psi^2\rangle = \frac{A^2}{2} = \frac{1}{2}\Big(A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos\delta\Big). \tag{1.3.29}$$

Az intenzitás ebben a speciális esetben a helytől sem függ és értékét a találkozó hullámok $\delta =$áll. fáziseltolódása döntően befolyásolja. Ha a hullámok fáziseltolódás nélkül ($\delta = 0$) találkoznak, akkor maximális erősítést kapunk. Ha a hullámok $\delta = \pi$ fáziseltolódással találkoznak, akkor maximális gyengítést észlelünk az interferencia eredményeképpen. Ha a hullámok amplitudói egyenlők, akkor a $\delta = \pi$ esetben teljes kioltást kapunk.

2 DINAMIKA

A dinamika meghatározza a mozgás törvényeit, a mozgásegyenleteket ill. megfogalmazza a legkisebb hatás elvét, azt az első elvet, amelyből a mozgástörvények következnek. Megmutatja, hogy a szabad mozgást a tér és az idő szimmetriái teljesen meghatározzák. Meghatározza, hogy a szimmetriák mennyiben szorítják meg a kölcsönhatási törvényeket. A szimmetriák következményeiként megmaradási törvényeket fogalmaz meg.

2.1 A klasszikus mechanika elvei

A klasszikus mechanika alapját a legkisebb hatás elve és a Galilei-féle relativitási elv képezi. A legkisebb hatás elve szolgáltatja a mozgásegyenleteket. A Galilei-féle relativitási elv pedig rámutat a tér és az idő szimmetriáinak szerepére a klasszikus mechanikai mozgások során, megszorítást jelent a mozgástörvényekre nézve.

2.1.1 A legkisebb hatás elve

A legkisebb hatás elve értelmében

1. **minden mechanikai rendszernek létezik az** L **Lagrange-függvénye, amely a rendszer** $q = (q_1, q_2, \ldots, q_s)$ **általános koordinátáinak és** $\dot{q} = (\dot{q}_1, \dot{q}_2, \ldots, \dot{q}_s)$ **általános sebességeinek** (s a rendszer szabadsági fokainak száma), **valamint a** t **időnek a függvénye** $L(q, \dot{q}, t)$, **és ennek az idő szerinti integrálja rögzített kezdeti** t_k **és végső** t_v **időpontok között az** $S[q(t)]$ **hatás,**

$$S[q(t)] = \int_{t_k}^{t_v} L(q(t'), \dot{q}(t'), t')dt'; \tag{2.1.1}$$

   és

2. **a hatásnak a ténylegesen megvalósuló fizikai mozgás** $q_{\rm val}(t)$ **pályájára kiszámított értéke extremális,**

$$S[q_{\rm val}(t)] = \text{ extremum} \tag{2.1.2}$$

   az összes olyan elképzelt $q(t)$ **pályákra kiszámolt hatásértékek között, amelyeknek kezdő- és végpontjai rögzítettek és megegyeznek a valóságos mozgás pályájának kezdő és végpontjával:** $q(t_k) = q_k$, $q(t_v) = q_v$.

Részletezzük az elvben megfogalmazott állításokat. A legkisebb hatás elve egyrészt posztulálja a Lagrange-függvény, ill. az annak idő szerinti integrálásával értelmezett hatás létezését. Másrészt, kimondja, hogy a mozgás úgy, olyan pályán valósul meg adott kezdeti és végpont között, hogy a hatás értéke extremális legyen. Ebből világos, hogy a hatás, pontosabban a Lagrange-függvény tényleges (explicit) alakja határozza meg, hogy milyen lesz a mozgás. A Lagrange-függvény, ill. a hatás tartalmazza a rendszerre vonatkozó összes dinamikai információt. A legkisebb hatás elve azt mondja meg, hogyan kell a mozgásra vonatkozó információt a hatásból kiolvasni: meg kell keresni azt a $q_{\rm val}(t)$ pályát, amelyre a hatás extremális értéket vesz fel. Ugyanakkor az elv arról semmit nem mond, milyen a Lagrange-függvény explicit alakja.

A Lagrange-függvény változói az általános koordináták, $q \equiv (q_1, q_2, \ldots, q_s)$ és a hozzájuk tartozó általános sebességek $\dot{q} \equiv (\dot{q}_1, \dot{q}_2, \ldots, \dot{q}_s)$, valamint a Lagrange-függvény a

t időtől is függhet explicit módon. Azzal, hogy az általános koordináták mellett csak azok idő szerinti első deriváltjait szerepeltetjük a Lagrange-függvényben, azt posztuláljuk, hogy a mechanikai rendszer állapotának egyértelmű megadásához az általános koordinátáknak és a hozzájuk tartozó általános sebességeknek a meghatározása szükséges és elegendő. Látni fogjuk, hogy ennek a következménye, hogy a mozgásegyenletek másodrendű differenciálegyenletek. Egy s szabadsági fokú rendszer esetén a Lagrange-függvény s darab általános koordinátától és azok idő szerinti első deriváltjaitól függ.

A hatás **lokális**: a Lagrange-függvény t pillanatban felvett értéke csak az általános koordinátáknak és az általános sebességeknek a t pillanatban felvett értékeitől függ és független attól, hogy azok milyen értékeket vettek fel a korábbi időpillanatokban.

A hatás a Lagrange-függvény idő szerinti integrálja. Matematikai értelemben az értéke, ami egy valós szám, attól függ, hogy milyen $q(t) \equiv (q_1(t), q_2(t), \ldots, q_s(t))$ függvényeket helyettesítünk be az integrandusba. A hatás tehát a $q(t) \equiv (q_1(t), q_2(t), \ldots, q_s(t))$ függvényekhez, az ún. elképzelt pályákhoz rendel valós számokat. **Az olyan leképezést, amely függvényekhez rendel valós számot a matematikában funkcionálnak nevezik. A hatás tehát funkcionál.**

A legkisebb hatás elvének alkalmazásakor a hatás szélsőértékét adó, ténylegesen megvalósuló pályát olyan elképzelt pályák között keressük, amelyeknek adott kezdeti és végső pillanathoz tartozó kezdő- és végpontjai le vannak rögzítve.

Minden mechanikai rendszerhez egyértelműen tartozik egy hatásfunkcionál. A Lagrange-függvény azonban nincsen egyértelműen maghatározva. Ha $L(q, \dot{q}, t)$ a rendszer egy lehetséges Lagrange-függvénye, akkor minden olyan $L'(q, \dot{q}, t)$ Lagrange-függvény vele egyenértékű, amelyet L-ből egy tetszőleges $f(q, t)$ függvény idő szerinti teljes deriváltjának hozzáadásával kapunk:

$$L'(q, \dot{q}, t) = L(q, \dot{q}, t) + \frac{df(q(t), t)}{dt}. \tag{2.1.3}$$

Ekkor ugyanis

$$S'[q(t)] = S[q(t)] + \int_{t_k}^{t_v} \frac{df(q(t), t)}{dt} dt = S[q(t)] + f(q(t_v), t_v) - f(q(t_k), t_k), \tag{2.1.4}$$

és mivel a mozgás tényleges pályájának keresése során a kezdőpont és a végpont le van rögzítve, az utolsó két tag jelenléte nem befolyásolja az extrémum helyét az elképzelt pályák ,,terében", hanem csak az extrémum értékét változtatja meg egy additív állandóval.

2.1.2 A mozgásegyenletek

A legkisebb hatás elve alapján le tudjuk vezetni a pontrendszer mozgásegyenleteit. **Az s szabadsági fokú rendszer esetén a mozgásegyenletek száma azonos a szabadsági fokok számával, vagyis s, és azok alakja:**

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0, \qquad i = 1, 2, \ldots, s \tag{2.1.1}$$

Ezek az s szabadsági fokú rendszer Euler-Lagrange-egyenletei. Az Euler--Lagrange-egyenletek s darab csatolt, közönséges, másodrendű differenciálegyenletből álló differenciálegyenlet-rendszert alkotnak.

A levezetést most az $s = 1$ esetre végezzük el. Az eljárás lényege hasonló, mint amikor egy $f(x)$ függvény szélsőértékét keressük. Idézzük fel először ennek a módját. Megnézzük a függvény infinitezimális megváltozását egy tetszőleges x hely környezetében, ha x-et infinitezimálisan, tetszőleges h-val megváltoztatjuk:

$$\begin{aligned}\delta f(x) &= f(x+h)-f(x)\approx f(x)+h\frac{df(x)}{dx}+\frac{1}{2}h^2\frac{d^2f(x)}{dx^2}+\ldots-f(x)\\ &= h\frac{df(x)}{dx}+\frac{1}{2}h^2\frac{d^2f(x)}{dx^2}+\mathcal{O}(h^3).\end{aligned}\tag{2.1.2}$$

Ha $x=x_0$ szélsőértékhelyen vagyunk, akkor ez a különbség h-ban első rendben, tetszőleges h esetén eltűnik, azaz

$$\left.\frac{df(x)}{dx}\right|_{x=x_0}=0,\tag{2.1.3}$$

ami a szélsőérték létezésének szükséges feltétele. A $\mathcal{O}(h^2)$ rendű tag pozitív vagy negatív előjele pedig azt mutatja meg, hogy a szélsőérték rendre minimum, vagy maximum. A szélsőérték szükséges feltételét jelentő (2.1.3) egyenletet megoldva kapjuk meg a szélsőérték x_0 helyét (ha létezik ennek az egyenletnek megoldása).

Most ehhez hasonló logikával keressük meg a hatásfunkcionál szélsőértékét, ill. azt a $q_{\mathrm{val}}(t)$ pályát, amelyre a hatás a szélsőértékét felveszi. Vegyünk ezért egy tetszőleges $q(t)$ függvényt, legyen a hatás ezen elképzelt pályán felvett értéke $S[q(t)]$. Változtassuk meg ezután a $q(t)$ pályát az infinitezimális értékeket felvevő, tetszőleges $h(t)$ függvénnyel, $q(t)+h(t)$, azaz számoljuk ki a hatás értékét erre a megváltoztatott pályára vonatkozóan: $S[q(t)+h(t)]$. Képezzük most a megváltoztatott és az eredeti pályán vett hatásértékek különbségét:

$$\begin{aligned}\delta S[q(t)] &= S[q(t)+h(t)]-S[q(t)]\\ &= S[q(t)]+\int_{t_k}^{t_v}\left[\left.\frac{\partial L}{\partial q}\right|_{q(t)}h(t)+\left.\frac{\partial L}{\partial \dot q}\right|_{q(t)}\frac{dh(t)}{dt}+\mathcal{O}(h^2)\right]dt-S[q(t)]\\ &= \int_{t_k}^{t_v}\left[\left.\frac{\partial L}{\partial q}\right|_{q(t)}h(t)+\left.\frac{\partial L}{\partial \dot q}\right|_{q(t)}\frac{dh(t)}{dt}+\mathcal{O}(h^2)\right]dt.\end{aligned}\tag{2.1.4}$$

A legkisebb hatás elve értelmében eljárásunk során még azt kell figyelembe venni, hogy a $q(t)$ és a tetszőlegesen megváltoztatott $q(t)+h(t)$ pályák kezdő- ill. végpontjai megegyeznek, rögzítettek, azaz $h(t_k)=h(t_v)=0$. Ha a $q(t)=q_{val}(t)$ pálya a hatás szélsőértékhelye, akkor ott a hatás intinitezimális megváltozása $\mathcal{O}(h)$ rendben tetszőleges infinitezimális $h(t)$ függvény esetén eltűnik, ez a szélsőérték szükséges feltétele:

$$\int_{t_k}^{t_v}\left[\left.\frac{\partial L}{\partial q}\right|_{q(t)}h(t)+\left.\frac{\partial L}{\partial \dot q}\right|_{q(t)}\frac{dh(t)}{dt}\right]_{q_{\mathrm{val}}(t)}dt=0,\tag{2.1.5}$$

ahol $h(t)$ tetszőleges, infinitezimális értékű függvény. Ebből az egyenletből, azaz a szélsőérték szükséges feltételéből kell kiolvasnunk a mozgás tényleges $q_{\mathrm{val}}(t)$ pályáját. Ehhez még el kell távolítanunk az egyenletből a tetszőleges $h(t)$ függvényt. Hajtsunk ezért végre parciális integrálást a bal oldal második tagjában:

$$\begin{aligned}&\int_{t_k}^{t_v}\left[\frac{\partial L}{\partial q}-\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot q}\right]_{q_{\mathrm{val}}(t)}h(t)dt+\left[\frac{\partial L}{\partial \dot q}h(t)\right]_{t_k}^{t_v}\\ =&\int_{t_k}^{t_v}\left[\frac{\partial L}{\partial q}-\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot q}\right]_{q_{\mathrm{val}}(t)}h(t)dt=0,\end{aligned}\tag{2.1.6}$$

ahol a második egyenlőség felírásakor kihasználtuk, hogy $h(t_k)=h(t_v)=0$. A matematika variációszámítás nevű fejezetének egyik nevezetes tétele értelmében az

$$\int_{t_k}^{t_v}f(t)h(t)dt\tag{2.1.7}$$

alakú határozott integrál (kellően jó viselkedésű $f(t)$ függvényt feltételezve) akkor és csak akkor tűnhet el tetszőleges $h(t)$ függvény esetén, ha $f(t) = 0$ azonosan teljesül. Ezt a tételt felhasználva azt kapjuk, hogy a ténylegesen megvalósuló mozgás $q_{\text{val}}(t)$ pályája a

$$\frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = 0 \tag{2.1.8}$$

egyenlet megoldása. Ezt akartuk bebizonyítani.

Az s szabadsági fokú rendszer esetén a mozgásegyenletek levezetése hasonló gondolatmenettel történik.

2.1.3 A kezdőfeltételek

Az s szabadsági fokú pontrendszer Euler-Lagrange-féle mozgásegyenletei s darab csatolt, közönséges, másodrendű differenciálegyenletet jelentenek. A keresett s darab függvény a $q_i(t)$ $(i = 1, 2, \ldots, s)$ s darab általános koordináta mint az idő függvénye. A differenciálegyenletek elméletéből ismert, hogy ezen egyenletek egyértelmű megoldásához pontosan $2s$ darab kezdeti feltételre van szükség. Ezek az általános koordináták és az általános sebességek kezdőértékei valamely tetszőlegesen választott t_0 kezdeti pillanatban:

$$q_i(t_0) = q_{i0}, \qquad \dot{q}_i(t_0) = \dot{q}_{i0}, \qquad i = 1, 2, \ldots, s \tag{2.1.1}$$

Minden kezdőfeltételhez pontosan egy megoldás tartozik. Ez biztosítja, hogy adott kezdőfeltétel esetén a megoldás egyértelmű. Mivel a fenti $2s$ darab kezdőfeltétel a mozgás teljes időbeli lefolyását meghatározza a mozgásegyenlet alapján, azért azt mondhatjuk, hogy adott pillanatban a pontrendszer fizikai állapotát ez a $2s$ adat szükséges és elegendő módon jellemzi. A pontrendszer állapotának megadásához pontosan ezt a $2s$ darab adatot kell meghatározni.

Miután a hatásban nem engedtük meg az általános koordináták elsőnél magasabb rendű deriváltjainak fellépését, azért lettek a mozgásegyenletek másodrendű differenciálegyenletek, és azért szükséges és elegendő az egyértelmű megoldáshoz a fenti $2s$ darab kezdőfeltétel a koordinátákra és első deriváltjaikra vonatkozóan. Így van „beépítve a Lagrange-függvénybe, ill. a hatásba, hogy pontosan ezekkel az adatokkal tudjuk a pontrendszer mechanikai állapotát meghatározni. Ha a hatásban az általános koordináták idő szerinti magasabb deriváltjai is szerepelnének, akkor mindez megváltozna.

Figyeljünk fel arra, hogy a mozgásegyenleteket általánosan a Lagrange-függvény parciális deriváltjainak segítségével tudtuk felírni. Bármilyen konkrét pontrendszerre alkalmazzuk azonban ezeket az egyenleteket, akkor a Lagrange-függvény explicit alakját először meg kell adjuk. Ezután a parciális deriválások elvégezhetők és a kapott egyenletek a keresett általános koordinátáknak, mint az idő függvényeinek legfeljebb csak a második deriváltjait tartalmazzák. Pontosan a Lagrange-függvény, ill. a hatás explicit alakja az, aminek alapján tudjuk, hogy milyen konkrét fizikai rendszerről beszélünk. Matematikailag végtelen sokféle Lagrange-függvényt el lehet képzelni, hiszen adott számú általános koordinátából és sebességből végtelen sok matematikai kifejezést lehet alkotni. Ezek közül azonban csak néhány fog valóságos, a természetben megvalósuló fizikai rendszernek megfelelni. Szokás ezért azt is mondani, hogy ha egy mechanikai rendszer fizikai modelljét keressük, akkor a neki megfelelő Lagrange-függvényt keressük.

2.1.4 Determinisztikus és kaotikus mozgás. A kezdőfeltételek pontossága

A pontrendszer mozgásegyenleteinek az tehát az egyik fontos vonása, hogy ha ismerjük a rendszer mechanikai állapotát valamely $t = t_0$ pillanatban, akkor ebből a mozgásegyenletek megoldása útján egyértelműen meg tudjuk határozni a rendszer állapotát bármely későbbi vagy korábbi pillanatban. Azt jelenti-e ez, hogy meg tudjuk a rendszer pillanatnyi állapotának ismeretében annak bármilyen későbbi állapotát korlátlan pontossággal előre mondani? Ha a kezdőfeltételeket korlátlan pontossággal ismernénk, akkor a differenciálegyenletek elmélete szerint igen.

A gyakorlatban ez mégsem mindig van így. A kezdőfeltételek mérések eredményei. Így azokat mindig véges pontossággal ismerjük. A kérdést helyesen tehát úgy kell feltenni, hogy meg tudjuk-e előre mondani a mozgás eredményeként tetszőleges későbbi időpillanatban előálló mechanikai állapotot legalább olyan pontossággal, mint amilyen pontosan a kezdőfeltételeket ismerjük. Ha ez így van, akkor tetszőleges pontossággal tudjuk előre megmondani, hogy milyen lesz tetszőleges idő múlva a mechanikai rendszer állapota. **A klasszikus mechanikai rendszerek alapvetően kétfélék lehetnek: determinisztikusak és kaotikusak.**

1. *Determinisztikus klasszikus mechanikai rendszer.* **Akkor mondjuk, hogy a mechanikai rendszer determinisztikus, ha a mozgásegyenletek kezdőfeltételeiben elkövetett hibával azonos nagyságrendű hibával tudjuk megadni a mozgás eredményét tetszőleges későbbi időpillanatban.** Legyen a kezdőfeltételek hibája $\mathcal{O}(\epsilon)$. Képzeljük el, hogy megoldjuk a mozgásegyenleteket különböző kezdőfeltételekkel, amelyek azonban csak $\mathcal{O}(\epsilon)$ rendben különböznek egymástól. A különböző kezdőfeltételekhez más-más megoldások tartoznak, úgyhogy a különböző megoldásoknak megfelelően tetszőleges $\tau = t - t_0$ idővel később más és más lehet a mechanikai rendszer állapota. Ha a kezdőfeltételek $\mathcal{O}(\epsilon)$ rendű megváltoztatása a megoldást tetszőleges későbbi pillanatban is csak $\mathcal{O}(\epsilon)$ rendben változtatja meg, akkor determinisztikus rendszerről beszélünk.

2. *Kaotikus klasszikus mechanikai rendszer.* A fizikai rendszerek másik típusa, amikor az $\mathcal{O}(\epsilon)$ mértékben különböző kezdőfeltételekhez tartozó megoldások $\tau = t - t_0$ idővel később $\mathcal{O}(e^{\alpha\tau})$ mértékben különböznek, ahol $\alpha > 0$. Ilyenkor a kicsit különböző kezdeti feltételekhez tartozó pályák az eltelt idővel exponenciális mértékben növekedve fognak különbözni. Teljesen nyilvánvaló, hogy ilyenkor nem lehet korlátlan időre, előre tetszőleges pontossággal megjósolni, hogy milyen lesz a mechanikai rendszer állapota valamely tetszőleges későbbi pillanatban. Az ilyen fizikai rendszereket kaotikusnak nevezzük.

Az egy- és a két szabadsági fokú rendszer mindig determinisztikus. A kettőnél több szabadsági fokú rendszer mutathat kaotikus viselkedést, ha a mozgásegyenletek nem lineárisak. **A mozgásegyenleteket nem lineárisaknak nevezzük, ha a keresett általános koordinátáknak és azok deriváltjainak nem lineáris kifejezései lépnek fel bennük.** A természetben előforduló mechanikai rendszerek szinte mindig nem-lineáris mozgásegyenleteknek tesznek eleget. Ezért a kaotikus viselkedés a természetben nagyon gyakori. Az a néhány iskolapélda, amellyel a félév során találkozni fogunk a determinisztikus rendszerek sokkal szűkebb családjába fog tartozni.

2.1.5 Inerciarendszerek. Newton I. törvénye

A vonatkoztatási rendszerek végtelen sokféleképpen választhatók meg. Ha nem vagyunk körültekintőek, akkor bennük a vizsgált anyagi pont mozgását és az azt meghatározó törvényeket nagyon bonyolultnak láthatjuk. Vannak azonban olyan vonatkoztatási rendszerek, amelyekben a mozgásokat meghatározó törvények viszonylag egyszerű alakúak. Ez az egyszerűség annak a következménye, hogy ezekben a rendszerekben sem a térben, sem az időben nincsen semmi kitüntetettség. **Az olyan vonatkoztatási rendszert, amelyből**

nézve a tér homogén és izotróp, az idő pedig homogén, inerciarendszernek nevezzük. Newton I. törvénye kimondja, hogy létezik inerciarendszer.

A térnek és az időnek az inerciarendszer definíciójában említett tulajdonságait csak önmagára hagyott, szabad mechanikai rendszer segítségével lehet vizsgálni. Ha ugyanis a rendszer nem szabad, hanem kölcsönhat más testekkel, akkor mozgása már nem, vagy nem csak a tér és az idő tulajdonságait jellemzi. Vegyük sorra, hogy mit is jelentenek a tér és az idő fenti tulajdonságai.

1. *A tér homogén.* **A tér homogén, ha nincsen benne kitüntetett pont, minden pontja egyenértékű egy önmagára hagyott mechanikai rendszer, pl. anyagi pont mozgása szempontjából.** Ez pl. azt jelenti, hogy ha az inerciarendszerben bárhol helyezünk is el egy zérus kezdősebességű anyagi pontot, az egyformán nyugalomban marad. (Ennek ellentéte lenne, ha a tér bizonyos pontjaiban nyugalomban maradna, más pontjaiban meg nem. Ekkor nem lenne homogén a tér.)

2. *A tér izotróp.* **A tér izotróp, ha nincsen benne kitüntetett irány.** Egy önmagára hagyott mechanikai rendszer segítségével nem lehet a tér irányai között különbséget tenni. Pl. a tér adott pontjában zérus kezdősebességgel elhelyezett és önmagára hagyott anyagi pont nyugalomban marad és nem indul el valamilyen irányban, ami bizonyítaná, hogy van egy kitüntetett irány a térben. Másik példa, ha a tér tetszőleges pontjában nem zérus kezdősebességgel helyezünk el egy szabad anyagi pontot, akkor az megőrzi sebességét, mert ha nem így lenne, akkor a részecske kezdeti gyorsulása kijelölne egy irányt a térben, amit - kölcsönhatás hiányában - a tér kitüntetett irányának kellene tekintenünk.

3. *Az idő homogén.* **Az idő homogén, ha nincsen kitüntetett időpillanat.** Például a tér tetszőleges pontjában zérus kezdősebességgel elhelyezett szabad anyagi pont egyformán nyugalomban marad, bármelyik időpillanatban helyezzük is oda.

A fentiekből tehát következik, hogy **inerciarendszerben egy magára hagyott (pontszerű) test megtartja egyenesvonalú egyenletes mozgását, ill. nyugalmi állapotát.** Az utóbbi állítást tekinthetjük az inerciarendszer másik, kevésbé elvont definíciójának is.

Kérdés, hogy létezik-e inerciarendszer? A tapasztalat szerint ilyen rendszerek jó közelítéssel találhatók, pl. az állócsillagokhoz rögzített vonatkoztatási rendszer. Ezt a tapasztalatot fogalmazza meg Newton I. törvénye. Ha létezik egy darab K inerciarendszer, akkor végtelen sok inerciarendszer létezik: a sebességösszeadás szabálya szerint valamennyi, a K-hoz képest állandó $\mathbf{V}$ sebességgel mozgó vonatkoztatási rendszerben a magára hagyott anyagi pont állandó sebességgel fog mozogni, vagyis meg fogja őrizni egyenesvonalú egyenletes mozgását. **Tehát egy inerciarendszerhez képest állandó sebességgel mozgó valamennyi vonatkoztatási rendszer inerciarendszer.**

2.1.6 A Galilei-féle relativitási elv

Arról már beszéltünk, hogy a mechanika törvényei inerciarendszerekben a legegyszerűbbek. Láttuk azt is, hogy a szabad anyagi pont azonos módon mozog minden inerciarendszerben. Feltehetjük a kérdés, hogy azonosak-e általában is a mechanika törvényei minden inerciarendszerben? **A Galilei-féle relativitási elv kimondja, hogy a mechanika törvényei a különböző inerciarendszerekben azonosak.** Ez azt is jelenti, hogy az inerciarendszerek a mechanikai törvények szempontjából egyenértékűek. Mechanikai kísérletek segítségével nem lehet egyik inerciarendszert sem kitüntetni a többihez képest. Ez többek között azt is jelenti, hogy nincsen abszolút nyugalomban levő inerciarendszer.

A mechanika törvényei implicit alakban a hatásfunkcionálban foglaltatnak benne. A Galilei-féle relativitási elv ezért azt jelenti, hogy a hatásfunkcionál alakja minden inerciarendszerben azonos. Pontosabban, a mechanikai rendszer Lagrange-függvénye különböző inerciarendszerekben legfeljebb csak egy függvény idő szerinti teljes deriváltjában különbözhet. **Azt a matematikai transzformációt, amely megadja, hogy hogyan kell az időt és a helyzetvektorokat transzformálni, ha egy tetszőleges K inerciarendszerről áttérünk egy tetszőleges másik, a K-hoz képest $\mathbf{V}$ sebességgel mozgó K' inerciarendszerre, valódi Galilei-transzformációnak nevezzük. A Galilei-elv értelmében, az önmagára hagyott** (más testekkel kölcsön nem ható) **mechanikai rendszer hatásfunkcionálja invariáns a Galilei-transzformációkkal szemben. A szabad rendszer hatásfunkcionáljának a Galilei-transzformációk szimmetriái.**

Keressük meg a Galilei-transzformációk matematikai alakját. A továbbiakban egységesebb matematikai tárgyalást jelent, ha egy adott inerciarendszeren belül felvett különböző koordinátarendszereket is mint különböző inerciarendszereket fogjuk kezelni. Ezt is figyelembe véve, a K inerciarendszerből az alábbi transzformációkkal kaphatunk más K' inerciarendszert:

1. **Eltolás a térben.** Ha a K' rendszer a K-hoz képest nyugalomban van ($\mathbf{V} = 0$), a rendszeridők azonosak, $t = t'$, de a K' rendszert úgy kapjuk, hogy K minden pontját $\mathbf{b}$=áll. vektorral toljuk el. Ekkor tetszőleges P pont K-ban és K'-ben vett helyzetvektoraira
$$\mathbf{r} = \mathbf{r}' + \mathbf{b}, \qquad \mathbf{r}' = \mathbf{r} - \mathbf{b}. \tag{2.1.1}$$
A térbeli eltolást a $\mathbf{b}$ vektor, azaz annak 3 darab b_x, b_y, b_z komponense, 3 valós paraméter határozza meg, amelyek értéke $b_i \in (-\infty, +\infty)$ tetszőleges lehet.

2. **Elforgatás a térben.** K és K' egymáshoz képest nyugalomban van, a rendszeridők azonosak, $t = t'$, és K'-t úgy kapjuk K-ból, hogy K-t a origójában felvett $\mathbf{n}$ egységvektor mint irány körül α szöggel elforgatjuk. Forgassuk el a koordinátarendszert az (origóban felvett) $\mathbf{n}$ irány körül infinitezimális $d\alpha$ szöggel. Ekkor tetszőleges P pont K-beli $\mathbf{r}$ helyzetvektorához K'-ben az
$$\mathbf{r}' = \mathbf{r} - \mathbf{n}d\alpha \times \mathbf{r} \tag{2.1.2}$$
helyzetvektor tartozik. Az elforgatást 3 valós paraméter határozza meg, az $\mathbf{n}$ egységvektor irányát meghatározó $\theta \in [0, \pi]$, $\varphi \in [0, 2\pi]$ polár- és azimutszög és az elforgatás $\alpha \in [0, \pi]$ szöge.

Két tetszőleges $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ vektor vektoriális szorzatán olyan $\mathbf{c} = \mathbf{a} \times \mathbf{b}$ vektort értünk, amelynek Descartes-komponenseit
$$c_x = a_y b_z - a_z b_y, \qquad c_y = a_z b_x - a_x b_z, \qquad c_z = a_x b_y - a_y b_x \tag{2.1.3}$$
utasítással kell meghatározni. A fenti relációkat tömören
$$c_i = \sum_{j,k=1}^{3} \epsilon_{ijk} a_j b_k, \qquad i = 1, 2, 3 \tag{2.1.4}$$
alakba írhatjuk, ha az $a_1 = a_x$, $a_2 = a_y$, $a_3 = a_z$, stb. jelöléseket és a Levi-Civita-féle ϵ_{ijk} szimbólumot használjuk:
$$\epsilon_{ijk} = \begin{pmatrix} 1, & \text{ha} & (i,j,k) = (1,2,3), (2,3,1), (3,1,2) \\ -1, & \text{ha} & (i,j,k) = (3,2,1), (2,1,3), (1,3,2) \\ 0, & \text{egyébként} & \end{pmatrix}. \tag{2.1.5}$$
A vektori szorzat néhány tulajdonsága:

(a) A vektori szorzat eredménye a tényező vektorokra merőleges vektor: $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{a} = (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{b} = 0$.

(b) A vektori szorzat eredménye olyan vektor, amely a tényező vektorokkal az $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ sorrendben jobbsodrású rendszert alkot, és amelynek hossza egyenlő tényező vektorok hosszainak és az általuk bezárt α szög szinuszának a szorzatával:

$$|\mathbf{a} \times \mathbf{b}| = |\mathbf{a}||\mathbf{b}| \sin \alpha. \tag{2.1.6}$$

3. **Eltolás az időben.** A K és a K' vonatkoztatási rendszer csak abban különbözik, hogy a K'-beli rendszeridő nullapontja a K-beli rendszeridő nullapontjához képest τ=áll. értékkel el van tolva. Ekkor

$$\mathbf{r}' = \mathbf{r}, \qquad t' = t - \tau. \tag{2.1.7}$$

A eltolást az időben 1 darab valós paraméter, $\tau \in (-\infty, +\infty)$ határozza meg.

4. **Valódi Galilei-transzformáció.** A K és a K' rendszerekben azonos a rendszeridő, a $t = 0$ pillanatban origóik és Descartes-féle koordinátatengelyeik is egybeesnek, és K' a K-hoz képest $\mathbf{V}$ =áll. sebességgel mozog:

$$\mathbf{r}' = \mathbf{r} - \mathbf{V}t, \qquad t' = t. \tag{2.1.8}$$

A valódi Galilei-transzformációt 3 darab valós paraméter, a K' rendszer K-hoz képesti $\mathbf{V}$ sebességének 3 Descartes-komponense határozza meg. Értékük a $(-\infty, +\infty)$ intervallumban tetszőleges lehet.

Ezeket a transzformációkat közös néven **általános Galilei-transzformációknak** nevezzük. **A környező testekkel kölcsön nem ható rendszer hatásfunkcionálja tehát invariáns az általános Galilei-transzformációkkal szemben.** Közöttük a nem valódi Galilei-transzformációkkal szemben mutatott invariancia a tér és az idő szimmetriáinak a következménye.

A fentieken túl a mechanikai törvények még további szimmetriákat is mutatnak. Ilyen további szimmetriatranszformációk:

1. **Tértükrözés.** Valamennyi koordinátatengely irányítását megfordítjuk:

$$\mathbf{r} \to \mathbf{r}' = -\mathbf{r}. \tag{2.1.9}$$

2. **Időtükrözés.** Az idő irányát megfordítjuk: $t' = -t$.

Néhány további fontos megjegyzés a fenti szimmetriákkal kapcsolatban.

1. Az f fizikai mennyiséget **skalárnak** nevezzük, ha a térbeli forgatások és a tértükrözés során nem transzformálódik.

2. Az f fizikai mennyiséget **pszeudoskalárnak** nevezzük, ha térbeli forgatások során nem változik, de tértükrözés során előjelet vált.

3. Azokat a 3 Descartes-komponenssel rendelkező, irányított mennyiségeket, amelyek térbeli forgatások és a tértükrözés hatására ugyanúgy transzformálódnak, mint a helyzetvektor, **poláris vektoroknak** nevezzük.

4. Azokat a 3 Descartes-komponenssel rendelkező, irányított mennyiségeket, amelyek térbeli forgatások során ugyanúgy transzformálódnak mint a helyzetvektor, de értükrözés során változatlanul maradnak, **axiális vektoroknak** nevezzük. Axiális vektor például két poláris vektor vektori szorzata.

5. Poláris vektorok skalárszorzata skalár. Poláris vektor és axiálvektor skalárszorzata pszeudoskalár. Axiálvektorok skalárszorzata skalár.

6. Az elmondottak alapján egy anyagi pont helyzetvektora, sebességvektora és gyorsulásvektora poláris vektorok. A helyzetvektor eltoláskor additívan változik meg, a sebesség és a gyorsulás eltoláskor változatlanok maradnak.

7. Az $\mathbf{r}$ helyzetvektor és az $\mathbf{a}$ gyorsulásvektor az időtükrözéssel szemben invariáns, ugyanakkor a sebességvektor időtükrözés során előjelet vált.

2.1.7 Szabad részecske Lagrange-függvénye

Ebben a fejezetben megmutatjuk, hogy a Galilei-invariancia követelménye a hatás explicit alakjára olyan erős megszorítást jelent, hogy meghatározza a legegyszerűbb mechanikai rendszerek, a szabad anyagi pont és a szabad részecskékből álló pontrendszer hatásfunkcionáljának inerciális vonatkoztatási rendszerben érvényes, explicit alakját.

1. *Szabad részecske.* Egy anyagi pont szabad mozgást végez, ha nem áll kölcsönhatásban semmiféle más testtel, azaz semmilyen más test nem befolyásolja az anyagi pont mozgásállapotát. Válasszunk inerciális vonatkoztatási rendszert a szabad anyagi pont (szabad részecske) leírására. Egyszerűség kedvéért válasszuk általános koordinátáknak a részecske $\mathbf{r}(t)$ helyzetvektorának $r_i(t)$ $(i = 1, 2, 3)$ Descartes-koordinátáit valamely, tetszőlegesen választott Descartes-féle koordinátarendszerben. Akkor a megfelelő általános sebességek a $\mathbf{v}(t) = \frac{d\mathbf{r}(t)}{dt} = \dot{\mathbf{r}}(t)$ sebességvektor megfelelő $v_i(t) = \frac{dr_i(t)}{dt}$ $(i = 1, 2, 3)$ Descartes-összetevői. A legkisebb hatás elve értelmében a Lagrange-függvény az r_i és $\dot{r}_i$ $(i = 1, 2, 3)$ változók függvénye. Miután időbeli eltolással szemben a hatásnak invariánsnak kell lennie, ezért az L Lagrange-függvény az időtől explicit módon nem függhet. A hatás a térbeli eltolásokkal szemben invariáns, ezért a Lagrange-függvény nem függhet a részecske helyzetvektorától. Tehát a Lagrange-függvény csak a részecske sebességétől függ. A hatásnak a térbeli elforgatások során sem szabad megváltoznia, ezért a Lagrange-függvény nem függhet a sebesség irányától, csak annak a nagyságától, azaz $L = L(\mathbf{v}^2)$. Használjuk ki végül, hogy a hatásnak invariánsnak kell lennie a valódi Galilei-transzformációkkal szemben, azaz a Lagrange-függvény valódi Galilei-transzformáció során legfeljebb csak egy olyan additív taggal változhat meg, amely az teljes, idő szerinti derivált alakjában írható fel. Infinitezimális, valódi Galilei-transzformáció során a sebesség transzformációja
$$\mathbf{v} = \mathbf{v}' + \delta\mathbf{V} \tag{2.1.1}$$
ahol $\mathbf{v}$ ill. $\mathbf{v}'$ a részecske sebessége a K ill. a K' rendszerben, és $\delta\mathbf{V}$ a K' rendszer állandó, infinitezimális sebessége a K rendszerhez képest. Ezért
$$\begin{aligned} L(\mathbf{v}^2) &= L\Big((\mathbf{v}' + \delta\mathbf{V})^2\Big) = L\Big(\mathbf{v}'^{\,2} + 2\mathbf{v}'\cdot\delta\mathbf{V} + \mathcal{O}((\delta\mathbf{V})^2)\Big) \\ &= L(\mathbf{v}'^{\,2}) + \frac{\partial L(\mathbf{v}'^{\,2})}{\partial \mathbf{v}'^{\,2}} 2\mathbf{v}'\cdot\delta\mathbf{V} + \mathcal{O}((\delta\mathbf{V})^2) \end{aligned} \tag{2.1.2}$$

egyenlőség áll fenn tetszőleges, infinitezimális, valódi Galilei-transzformáció esetén, ahol $\delta\mathbf{V}$ a K' inerciarendszer K inerciarendszerhez képesti, tetszőleges, infinitezimális sebessége. Itt a második tag akkor és csak akkor ölti idő szerinti teljes derivált alakját, ha

$$\frac{\partial}{\partial\mathbf{v}^2}\frac{\partial L(\mathbf{v}^2)}{\partial\mathbf{v}^2}=0, \tag{2.1.3}$$

ami azt jelenti, hogy a Lagrange-függvény arányos a sebesség négyzetével. A szabad részecske hatásfunkcionáljának az explicit alakja tehát

$$L=\frac{1}{2}m\mathbf{v}^2, \tag{2.1.4}$$

ahol az m arányossági tényezőt **a részecske tehetetlen tömegének** nevezzük.

2. *Kölcsönhatásmentes pontrendszer.* A szabad részecskére vonatkozó hatás általánosítása olyan részecskerendszerre, amelyben a részecskék nem hatnak kölcsön sem egymással, sem külső testekkel, azaz valamennyien szabadok, kézenfekvő. Ilyenkor ugyanis egyetlen, tetszőlegesen kiszemelt részecske mozgásegyenleteiben sem szerepelhetnek a többi részecskék koordinátái és sebességei. Mivel az Euler-Lagrange-egyenletek a Lagrange-függvényt lineárisan tartalmazzák, azért a különböző részecskékhez tartozó mozgásegyenletek szétcsatolódása csak úgy lehetséges, ha a Lagrange-függvényhez minden részecske saját szabad mozgásának megfelelő, additív járulékot ad:

$$S=\int_{t_k}^{t_k}Ldt,\qquad L=\sum_{a=1}^{N}\frac{1}{2}m_a\mathbf{v}_a^2, \tag{2.1.5}$$

ahol az egyes részecskék m_a tehetetlen tömege természetesen különböző lehet. Mivel az egyes részecskék Lagrange-függvényeit szabad közös állandóval szorozni, hiszen az úgyis kiesik a mozgásegyenletből, azért csak az m_a tehetetlen tömegek arányainak van közvetlen fizikai jelentése. Az összes Lagrange-függvénynek ugyanazzal a számmal való szorzása annak felel meg, hogy megváltoztatjuk a tehetetlen tömeg mértékegységét.

2.1.8 A kölcsönhatás

A Lagrange-függvény kölcsönhatási tagja. Ha egy test befolyásolja a másik mozgásállapotát, akkor ez a tapasztalat szerint megfordítva is igaz. Azt szoktuk mondani, hogy ilyenkor a két test kölcsönhatásban van egymással. A kölcsönhatás egyik fontos jellemzője a tapasztalat szerint, hogy minél távolabb van a két test egymástól, annál kevésbé tudják befolyásolni egymást. Elvileg, ha a két test végtelen távolra kerülne egymástól, akkor a kölcsönhatásuk is megszűnne. Ilyenkor az A test mozgásegyenletei nem tartalmazhatják a B test általános koordinátáit és sebességeit, és viszont a B test mozgásegyenletei sem tartalmazhatják az A test általános koordinátáit és impulzusait. A mozgásegyenletek ugyanakkor a Lagrange-függvényt lineárisan tartalmazzák. A változók szeparációja tehát csak úgy lehetséges, ha aszimptotikusan

$$L_{A\cup B}\to L_A+L_B \tag{2.1.1}$$

teljesül az A és B testekből álló $A\cup B$ rendszer Lagrange-függvényére, ahol L_A ill. L_B a szabad mozgást végző A ill. B rendszer Lagrange-függvénye. Ez tehát így addig igaz, amíg az A test bármelyik részecskéjének a B test bármelyik részecskéjétől mért távolsága végtelenhez tart. Ha az A és B rendszer véges távolságra kerülnek egymástól, akkor a Lagrange-függvényben figyelembe kell venni a kölcsönhatást. Erre az a lehetőség kínálkozik, hogy a szabad részrendszerek Lagrange-függvényeinek összegéhez hozzáadunk még egy L_{AB} tagot, amelyik természetesen egyaránt függ az A és a B test általános koordinátáitól és általános sebességeitől. Csak annyit tudunk róla, hogy $L_{AB} \to 0$, ha az A és a B test között a kölcsönhatás megszűnik.

Szigorú értelemben zárt rendszer Lagrange-függvénye. **Tegyük fel, hogy az N-részecskés A rendszer semmilyen más testtel nem áll kölcsönhatásban. Ekkor azt mondjuk, hogy az A rendszer (szigorú értelemben, vagy fizikailag) zárt.** A szokásos szóhasználat erre az, hogy **a fizikai rendszer zárt.** Később találkozni fogunk egy enyhébb megszorítást jelentő zártság, az úgynevezett **mechanikai zártság** fogalmával, amiről mindig úgy fogunk beszélni, hogy hozzátesszük a mechanikai jelzőt. A fentiek alapján a (szigorú értelemben) zárt, N részecskés rendszer Lagrange-függvényének általános alakja:

$$\begin{aligned} L(\mathbf{r}_1,\ldots,\mathbf{r}_N,\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_N;t) &= \sum_{a=1}^{N}\frac{1}{2}m_a\mathbf{v}_a^2 - V(\mathbf{r}_1,\ldots,\mathbf{r}_N,\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_N;t) \\ &= T - V. \end{aligned} \tag{2.1.2}$$

A T és a V mennyiségeket a rendszer **kinetikus energiájának** ill. **általánosított potenciális energiájának** nevezzük. A (szigorú értelemben) zárt rendszer hatásfunkcionálja a térbeli eltolásokkal szemben invariáns. Ezért az V általánosított potenciális energia csak az $\mathbf{r}_{a,b} = \mathbf{r}_a - \mathbf{r}_b$ relatív helyzetvektorok révén függhet a helyzetvektoroktól. Az időbeli eltolással szembeni szimmetria miatt az általánosított potenciális energia a t időtől sem függhet explicit módon (szigorú értelemben) zárt rendszer esetén. Szigorú értelemben **zárt rendszer Lagrange-függvényének legáltalánosabb alakja** tehát:

$$\begin{aligned} L(\mathbf{r}_1,\ldots,\mathbf{r}_N,\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_N) = &\sum_{a=1}^{N}\frac{1}{2}m_a\mathbf{v}_a^2 \\ &-V(\mathbf{r}_{1,2},\ldots,\mathbf{r}_{1,N},\mathbf{r}_{2,3},\ldots,\mathbf{r}_{2,N},\ldots,\mathbf{r}_{N-1,N},\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_N). \end{aligned} \tag{2.1.3}$$

Ha V nem függ a részecskék sebességeitől, akkor V-t **potenciális energiának** nevezzük.

Párkölcsönhatás és több-test kölcsönhatások. A továbbiakban csak olyan esettel fogunk foglalkozni, amikor a kölcsönhatási tag független a sebességektől. Gondoljuk végig, hogy hogyan tevődik össze a részecskék közti kölcsönhatás. Vizsgáljuk ehhez először az $N = 2$ esetet. Nyilvánvalóan, ha a két részecske kölcsönhat, akkor a rendszer Lagrange-függvénye:

$$L(\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2,\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2) = \sum_{a=1}^{2}\frac{1}{2}m_a\mathbf{v}_a^2 - V(\mathbf{r}_{1,2}), \tag{2.1.4}$$

ahol a potenciális energia csak a két részecske relatív helyzetvektorától függ. A természetben számos példát ismerünk ilyen kölcsönhatásra:

1. *A gravitációs kölcsönhatás potenciális energiája:*

$$V = -\gamma\frac{m_{s1}m_{s2}}{r_{1,2}}, \tag{2.1.5}$$

ahol γ a gravitációs állandó, m_{s1}és m_{s2} a kölcsönható részecskék súlyos tömegei, $r_{1,2} = |\mathbf{r}_{1,2}|$ a kölcsönható részecskék távolsága.

2. *A rugalmas kölcsönhatás potenciális energiája:*

$$V = \frac{1}{2} D r_{1,2}^2, \tag{2.1.6}$$

ami egy-dimenziós rendszer esetén

$$V = \frac{1}{2} D x^2 \tag{2.1.7}$$

alakot ölt, ha az egyik részecske az origóban van rögzítve és a másik kitérése x. A D állandó az ún. visszatérítő erő.

3. *A Coulomb-kölcsönhatás potenciális energiája:*

$$V = k \frac{Q_1 Q_2}{r_{1,2}}, \tag{2.1.8}$$

ahol Q_1 és Q_2 a kölcsönható részecskék elektromos töltése, k univerzális állandó. Ez a kölcsönhatás két nyugvó, elektromosan töltött részecske között lép fel.

4. *A bezáró kölcsönhatás potenciális energiája:*

$$V = \kappa r_{1,2}, \tag{2.1.9}$$

ahol κ univerzális állandó. Ez a kölcsönhatás nehéz kvarkok között lép fel.

Az 1 és 2 részecskék potenciális energiáját lássuk el a továbbiakban az $1,2$ alsó indeksszel. Vegyünk most egy harmadik részecskét a rendszerhez. A következő lehetőségek állnak fenn.

1. *Párkölcsönhatás* A harmadik részecske betevése a rendszerbe nem zavarja meg az 1 és 2 közötti kölcsönhatást: az $V_{1,2}(\mathbf{r}_{1,2})$ függvény alakja és járuléka a Lagrange-függvényhez változatlan marad. Ha bármely két részecske kölcsönhatása független attól, hogy jelen van-e a harmadik, akkor a Lagrange-függvény alakja:

$$\begin{aligned} L(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3) &= \sum_{a=1}^{3} \frac{1}{2} m_a \mathbf{v}_a^2 - V(\mathbf{r}_{1,2}, \mathbf{r}_{1,3}, \mathbf{r}_{2,3}), \\ V(\mathbf{r}_{1,2}, \mathbf{r}_{1,3}, \mathbf{r}_{2,3}) &= V_{1,2}(\mathbf{r}_{1,2}) + V_{1,3}(\mathbf{r}_{1,3}) + V_{2,3}(\mathbf{r}_{2,3}) \end{aligned} \tag{2.1.10}$$

Ilyenkor azt mondjuk, hogy a részecskék **párkölcsönhatásban** állnak egymással. A részecskék kölcsönhatásából származó potenciális energia az egyes részecske-párok kölcsönhatási potenciális energiáinak az összege.

2. 3-*test kölcsönhatás.* Tegyük most fel az előbbiek ellenkezőjét, hogy az 1 és 2 részecske kölcsönhatása pl. attól is függ, hogy a 3 részecske mit csinál. Ilyenkor azt mondjuk, hogy 3-test kölcsönhatások vannak a rendszerben, amelyet az $V_{1,2,3}(\mathbf{r}_{1,2}, \mathbf{r}_{1,3}, \mathbf{r}_{2,3})$ alakú potenciális-energia taggal lehet a Lagrange-függvényben figyelembe venni.

A 3-részecskés rendszer Lagrange-függvényének általános alakja tehát:

$$\begin{aligned} L(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3) &= \sum_{a=1}^{3} \frac{1}{2} m_a \mathbf{v}^2 - V(\mathbf{r}_{1,2}, \mathbf{r}_{1,3}, \mathbf{r}_{2,3}), \\ V(\mathbf{r}_{1,2}, \mathbf{r}_{1,3}, \mathbf{r}_{2,3}) &= \sum_{a=1, b>a}^{3} V_{a,b}(\mathbf{r}_{a,b}) + V_{1,2,3}(\mathbf{r}_{1,2}, \mathbf{r}_{1,3}, \mathbf{r}_{2,3}), \end{aligned} \tag{2.1.11}$$

amely figyelembe veszi hogy vannak párkölcsönhatások és 3-részecskés kölcsönhatások is.

Ugyanezt most már könnyű N-részecskés rendszerre általánosítani:

$$
\begin{aligned}
L(\mathbf{r}_1,\ldots,\mathbf{r}_N,\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_N) &= \sum_{a=1}^{N}\frac{1}{2}m_a\mathbf{v}_a^2 \\
&\quad -V(\mathbf{r}_{1,2},\ldots,\mathbf{r}_{1,N},\mathbf{r}_{2,3},\ldots,\mathbf{r}_{2,N},\ldots,\mathbf{r}_{N-1,N}),
\end{aligned}
\tag{2.1.12}
$$

ahol a potenciális energia

$$
\begin{aligned}
&V(\mathbf{r}_{1,2},\ldots,\mathbf{r}_{1,N},\mathbf{r}_{2,3},\ldots,\mathbf{r}_{2,N},\ldots,\mathbf{r}_{N-1,N}) \\
&= \sum_{a=1,b>a}^{N} V_{a,b}(\mathbf{r}_{a,b}) + \sum_{a=1,b>a,c>b}^{N} V_{a,b,c}(\mathbf{r}_{a,b},\mathbf{r}_{a,c},\mathbf{r}_{b,c}) + \ldots
\end{aligned}
\tag{2.1.13}
$$

Itt a jobb oldal első tagja a párkölcsönhatásokat, a második tagja a 3-test kölcsönhatásokat veszi figyelembe. A ... azért áll a kifejezés végén, mert elvileg elképzelhetők olyan rendszerek is, ahol 4-, 5-, stb. több-test kölcsönhatások is vannak. Egyszerű mechanikai rendszerekben a tapasztalat szerint párkölcsönhatás van. Pl. ilyen a szabadon eső kő esetén a kő és a Föld kölcsönhatása, ill. a kő részecskéinek a Föld részecskéivel való kölcsönhatása. De vannak olyan rendszerek, mint például az atomos gázok, ahol a több-test kölcsönhatások is jelentősek. Általában, ha a kölcsönhatást ténylegesen (vagy nagyon jó közelítéssel) pontszerűnek tekinthető részecskék között vizsgáljuk, akkor a tapasztalat azt mutatja, hogy párkölcsönhatással van dolgunk. A több-test kölcsönhatások akkor jelennek meg a fizikai leírásban, amikor a pontszerűnek tekintett részecskék a valóságban kiterjedtek. Hogy ne kelljen a kiterjedésüket explicit módon figyelembe venni, ezért azt az árat fizetjük, hogy több-test kölcsönhatásokat kell figyelembe vennünk.

Nyílt rendszerek. **Az A mechanikai rendszer nyílt, ha kölcsönhatásban áll más, külső testekkel.** Ha az A rendszer nyílt, akkor tulajdonképpen nincsen Lagrange-függvénye. Ilyenkor A mozgásának leírásához vennünk kell egy olyan nagy U rendszert, ami az alábbi feltételeknek tesz eleget:

1. az A test része az U rendszernek, $A \subset U$,
2. az U rendszer tartalmazza mindazokat a testeket, amelyek az A rendszerrel kölcsönhatnak,
3. és U elég nagy ahhoz, hogy az A test mozgása szempontjából elhanyagolható legyen az U rendszer további más testekkel való kölcsönhatása, azaz az U rendszer jó közelítéssel (fizikailag) zártnak legyen tekinthető.

Az $U = A \cup B$ rendszerbe A-n kívül belevett B testeket szokás **az A rendszer fizikai környezetének** nevezni. Ilyenkor az $U = A \cup B$ rendszerre, ami (fizikailag) zárt, írhatunk fel a (2.1.3) egyenlettel adotthoz hasonló alakú Lagrange-függvényt. Ez természetesen a korábban megbeszélt $L_{A\cup B} = L_A + L_B + L_{A,B}$ szerkezetű lesz, ahol L_A ill. L_B lenne az A ill. a B rendszer Lagrange-függvénye, ha nem működne az $L_{A,B}$ kölcsönhatás A és B között. Mivel van, az $L_{A,B}$ tag tartalmazza A és B koordinátáit és sebességeit egyaránt.

Mechanikai rendszer külső térben. Van egy speciális eset, amikor mégis beszélhetünk a nyílt A rendszer Lagrange-függvényéről. Ez az, amikor az A rendszer külső térben mozog. **Akkor mondjuk, hogy az A rendszer külső térben mozog, ha az A rendszer mozgása során csak elhanyagolható mértékben változtatja meg annak a B**

testnek (azoknak a testeknek) a mozgását, amellyel (amelyekkel) kölcsönhat. Ilyenkor úgy lehet venni, hogy a külső B test(ek) részecskéinek $\mathbf{r}_B(t)$ helyvektorai az időnek adott függvényei. Ezeket az adott függvényeket behelyettesítve az $L_{A\cup B}$ Lagrange-függvénybe,

$$L_{A\cup B} = L_A(\mathbf{r}_A, \dot{\mathbf{r}}_A) + L_{A,B}(\mathbf{r}_A, \mathbf{r}_B(t), \dot{\mathbf{r}}_A, \dot{\mathbf{r}}_B(t)) + L_B(\mathbf{r}_B, \dot{\mathbf{r}}_B) \equiv L'_A(\mathbf{r}_A, \dot{\mathbf{r}}_A, t) \quad (2.1.14)$$

alakú Lagrange-függvényhez jutunk, amely már csak a vizsgált A rendszer részecskéinek $\mathbf{r}_A$ helyzetvektoraitól és $\dot{\mathbf{r}}_A$ sebességeitől és az időtől függhet. Miután nem zárt rendszerről van szó, elveszett az $\mathbf{r}_B(t)$ külső tér jelenléte miatt a hatás térbeli és időbeli eltolási szimmetriája. Az A rendszer szempontjából most már a tér különböző pontjai és a különböző időpillanatok nem egyenértékűek. Különösen az az eset bír jelentőséggel, amikor a kölcsönhatás általánosított potenciális energiája

$$-L_{A,B} = V_{A,B} = \sum_{a=1}^{N} e_a \phi(\mathbf{r}_a, t) \quad (2.1.15)$$

alakú, ahol e_a az A rendszer egyes részecskéire jellemző tulajdonság (súlyos tömeg, elektromos töltés, stb.) és a $\phi(\mathbf{r}, t)$ térmennyiséget, mint a hely és az idő függvényét pedig teljes egészében a külső B test határozza meg. Ekkor azt mondjuk, hogy **a B test külső teret hoz létre, amelynek $\phi(\mathbf{r}, t)$ a potenciálja.** A potenciálról tehát akkor beszélhetünk, ha a potenciális energia felbontható egy, csak a külső térbe helyezett test által meghatározott mennyiség és egy másik, csak a külső teret keltő test által meghatározott térmennyiség szorzatára. Ekkor az utóbbi térmennyiség a külső tér, vagy **fizikai mező** potenciálja. **A potenciál a tér adott pontjában, adott pillanatban az oda helyezett nyugvó, egységnyi e_a tulajdonsággal (tömeggel, töltéssel, stb.) rendelkező, pontszerű próbatest potenciális energiája.** A próbatest szóhasználat arra utal, hogy olyan testről van szó, amelynek a B testre, azaz a potenciálra való visszahatása elhanyagolható. Ha az A test külső potenciáltérben mozog, akkor elfelejtkezhetünk az A test mozgásának vizsgálata során arról, hogy mi is a B test, ami a potenciál értékét a tér minden pontjában, minden pillanatban meghatározza. Azt szoktuk mondani, hogy a B test egy fizikai mezőt, másszóval teret (potenciálteret, erőteret) kelt. A fizikai mezőt jellemző potenciál olyan térmennyiség, amelynek létezéséhez nem kell feltételezzük folytonos anyageloszlású test jelenlétét a tér pontjaiban. **A fizikai mező fogalmának bevezetése lehetővé teszi, hogy a kölcsönhatást ne távolbahatásként értelmezzük.** A fizikai mező közvetíti az A és a B test kölcsönhatását: az A és a B test úgy hatnak kölcsön, hogy B fizikai mezőt, potenciálteret kelt és ez hat az A testre, az A test a fizikai mezőben potenciális energiával rendelkezik. Egy részecske potenciális energiája a fizikai mezőben adott helyen és időpillanatban a potenciálnak csak az ezen a helyen és ebben az időpillanatban felvett értékétől függ. Ez fejezi ki, hogy **a fizikai mező lokálisan (közelhatás révén) hat kölcsön a beléje helyezett részecskével.**

Külső potenciáltérben mozgó, N-részecskés rendszer Lagrange-függvényének általános alakja:

$$L = \sum_{a=1}^{N} \frac{1}{2} m_a \mathbf{v}_a^2 - \sum_{a=1, b>a}^{N} V_{a,b}(\mathbf{r}_{a,b}) - \sum_{a}^{N} e_a \phi(\mathbf{r}_a, t). \quad (2.1.16)$$

A jobb oldalon az első tag a rendszer részecskéinek kinetikus energiája, a második tag a rendszer részecskéi közötti párkölcsönhatásokból származó potenciális energia mínusz egyszerese, a harmadik tag pedig azon potenciális energiák összegének mínusz egyszerese, amivel az egyes részecskék a külső $\phi(\mathbf{r}, t)$ potenciáltérben rendelkeznek.

A természetben külső térben mozgó rendszerekre is ismerünk számos példát. Néhány közülük:

1. *Részecske a Föld nehézségi terében:*

$$V = m_s g z, \qquad \phi = g z, \tag{2.1.17}$$

ahol z a részecskének a Föld felszínétől mért távolsága, m_s a részecske súlyos tömege (a tapasztalat szerint azonos nagyságú a tehetetlen tömegével), g az ún. nehézségi gyorsulás.

2. *Részecske gravitációs mezőben:*

$$V = -\gamma \frac{M_s m_s}{r}, \qquad \phi = -\gamma \frac{M_s}{r} \tag{2.1.18}$$

ahol M_s a gravitációs külső teret létesítő anyagi pont (a B test, pl. Nap) súlyos tömege, m_s a vizsgált anyagi pont (az A test, pl. a Föld) súlyos tömege, r a vizsgált anyagi pontnak a külső teret létesítő anyagi ponttól mért távolsága.

2.2 Megmaradási törvények

Ebben a fejezetben megmutatjuk, hogy a tér és az idő szimmetriáinak köszönhetően megmaradó mennyiségeket tudunk értelmezni, amelyek zárt rendszerekben a mozgás során állandóak maradnak.

2.2.1 Az impulzus megmaradásának törvénye

Impulzusnak azt a fizikai mennyiséget nevezzük, amelyik a fizikai rendszer térbeli eltolásokkal szembeni szimmetriája következtében marad meg. Zárt mechanikai rendszer térbeli eltolási szimmetriával rendelkezik (inerciális vonatkoztatási rendszerben) a tér homogenitása miatt, ezért (szigorú értelemben) **zárt mechanikai rendszerben az impulzus megmarad. Ez az impulzus megmaradásának törvénye zárt rendszer esetén.** Egy fizikai rendszer akkor is rendelkezhet térbeli eltolási szimmetriával, ha nem zárt. A szigorú értelemben vett zártság tehát elégséges, de nem szükséges feltétele az impulzus megmaradásának. A későbbiekben látni fogjuk, hogy a rendszer mechanikai zártsága is elegendő feltétele annak, hogy a rendszer a térbeli eltolásokkal szemben invariáns maradjon, azaz hogy az impulzusa megmaradjon.

Az impulzus megmaradása tehát a mechanikai rendszer térbeli eltolási szimmetriájának a következménye, ha van ilyen szimmetria. A térben 3 független irányban, a három koordinátatengely irányában lehet a Descartes-féle koordinátarendszerben eltolást végezni; az eltolást ennek megfelelően 3 független paraméterrel lehet megadni. Az impulzus vetormennyiség. A zárt rendszernek a 3 független irányban végzett eltolással szemben mutatott szimmetriájához pontosan 3 darab megmaradó mennyiség, az impulzus 3 Descartes-komponense tartozik. A fenti állítások bizonyítása során alább megtaláljuk az impulzus explicit kifejezését.

Vizsgáljuk meg, hogyan változik meg formálisan a hatásnak a mozgás valóságos pályájára kiszámolt értéke, ha a térben felvett Descartes-koordinátarendszerünket önmagával párhuzamosan eltoljuk a tetszőlegesen választott, infinitezimális, konstans ϵ vektorral. Ekkor az egyes részecskék helyzetvektorainak transzformációja:

$$\mathbf{r}_a(t) \to \mathbf{r}_a(t) + \epsilon, \qquad (a = 1, 2, \ldots, N), \tag{2.2.1}$$

a sebességek pedig nem változnak:

$$\dot{\mathbf{r}}_a(t) \to \dot{\mathbf{r}}_a(t) + \dot{\epsilon} = \dot{\mathbf{r}}_a(t), \qquad (a = 1, 2, \ldots, N). \tag{2.2.2}$$

A hatás megváltozása:

$$\begin{aligned}
\delta S|_{val} &= \int_{t_k}^{t_v} L(\mathbf{r}_a(t) + \epsilon, \dot{\mathbf{r}}_a; t)dt - \int_{t_k}^{t_v} L(\mathbf{r}_a(t), \dot{\mathbf{r}}_a; t)dt \\
&= \int_{t_k}^{t_v} \left[L(\mathbf{r}_a(t), \dot{\mathbf{r}}_a; t) + \sum_{b=1}^{N} \frac{\partial L(\mathbf{r}_a(t), \dot{\mathbf{r}}_a; t)}{\partial \mathbf{r}_b} \cdot \epsilon + \mathcal{O}(\epsilon^2) - L(\mathbf{r}_a(t), \dot{\mathbf{r}}_a; t) \right] dt \\
&= \epsilon \cdot \int_{t_k}^{t_v} \sum_{b=1}^{N} \frac{\partial L(\mathbf{r}_a(t), \dot{\mathbf{r}}_a; t)}{\partial \mathbf{r}_b} dt. \qquad (2.2.3)
\end{aligned}$$

Itt használtuk a

$$\frac{\partial f(\mathbf{r})}{\partial \mathbf{r}} = \left(\frac{\partial f(x,y,z)}{\partial x}, \frac{\partial f(x,y,z)}{\partial y}, \frac{\partial f(x,y,z)}{\partial z} \right) \tag{2.2.4}$$

jelölést egy vektorokon értelmezett, tetszőleges, skalárértékű $f(\mathbf{r}) = f(x, y, z)$ függvény gradiensére. Ha az $\mathbf{r}_a(t)$ függvények helyére behelyettesítjük a valóságos mozgásnak megfelelő, vagyis a mozgásegyenleteket kielégítő pályákat, akkor az eltolási szimmetria következtében tetszőleges infinitezimális ϵ vektor esetén zérust kell kapnunk:

$$0 \quad = \quad \delta S|_{val} = \epsilon \cdot \int_{t_k}^{t_v} \sum_{b=1}^{N} \frac{\partial L(\mathbf{r}_a(t), \dot{\mathbf{r}}_a; t)}{\partial \mathbf{r}_b} dt = \epsilon \cdot \int_{t_k}^{t_v} \sum_{b=1}^{N} \left[\frac{d}{dt} \frac{\partial L(\mathbf{r}_a(t), \dot{\mathbf{r}}_a; t)}{\partial \dot{\mathbf{r}}_b} \right] dt, \tag{2.2.5}$$

ahol a második egyenletet az Euler-Lagrange-féle mozgásegyenletek felhasználásával kaptuk. A kapott egyenlőség akkor és csak akkor állhat fenn tetszőleges ϵ vektor esetén, ha

$$0 \quad = \quad \int_{t_k}^{t_v} \sum_{b=1}^{N} \left[\frac{d}{dt} \frac{\partial L(\mathbf{r}_a(t), \dot{\mathbf{r}}_a; t)}{\partial \dot{\mathbf{r}}_b} \right] dt = \left[\sum_{b=1}^{N} \frac{\partial L(\mathbf{r}_a(t), \dot{\mathbf{r}}_a; t)}{\partial \dot{\mathbf{r}}_b} \right]_{t_k}^{t_v}, \tag{2.2.6}$$

vagyis ha a

$$\mathbf{P} = \sum_{b=1}^{N} \frac{\partial L(\mathbf{r}_a(t), \dot{\mathbf{r}}_a; t)}{\partial \dot{\mathbf{r}}_b} \tag{2.2.7}$$

vektormennyiség a mozgás során állandó:

$$\mathbf{P}(t_v) = \mathbf{P}(t_k), \tag{2.2.8}$$

azaz megmarad.

A $\mathbf{P}$ vektormennyiséget nevezzük a pontrendszer teljes impulzusának. Látjuk, hogy a pontrendszer impulzusa additívan tevődik össze az egyes részecskék

$$\mathbf{p}_b = \frac{\partial L(\mathbf{r}_a(t), \dot{\mathbf{r}}_a; t)}{\partial \dot{\mathbf{r}}_b} \tag{2.2.9}$$

impulzusvektoraiból:

$$\mathbf{P} = \sum_{a=1}^{N} \mathbf{p}_a. \tag{2.2.10}$$

Szabad részecske esetén a Lagrange-függvény

$$L = \frac{1}{2} m \dot{\mathbf{r}}^2, \tag{2.2.11}$$

és az impulzus kifejezése:

$$\mathbf{p} = m\dot{\mathbf{r}} = m\mathbf{v}. \tag{2.2.12}$$

Egy szabad anyagi pont impulzusa tehát arányos a sebességével, az arányossági tényező a részecske tehetetlen tömege. Éppen ez a részecskék tehetetlen tömegének a fizikai jelentése: a részecske sebességét a részecske tehetetlen tömegével kell szorozni, hogy megmaradó mennyiséget kapjunk, a szabad részecske impulzusát.

Ha a részecske csak olyan kölcsönhatásban vesz részt, amelynek V potenciális energiája független a sebességektől, akkor az impulzusának kifejezése továbbra is ugyanaz, $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$ marad, mint a szabad részecskéé. Ilyenkor ugyanis A Lagrange-függvénye sebsség szerinti deriváltjához továbbra is csak a kinetikus energia-tag ad járulékot. Sebességfüggő kölcsönhatás esetén a részecske impulzusának kifejezése megváltozik.

Megjegyezzük, hogy olyan speciális rendszer is létezik, amelyik nem zárt, de a tér valamelyik irányában (irányaiban) vett eltolással (eltolásokkal) szemben invariáns. Ekkor az impulzusnak a megfelelő irányú komponensére (komponenseire) áll csak fenn megmaradási törvény.

2.2.2 Az impulzusmomentum megmaradásának törvénye

Az impulzusmomentum az a fizikai mennyiség, ami a mechanikai rendszer térbeli forgatásokkal szemben mutatott szimmetriájának következtében marad meg. A (szigorú értelemben) zárt mechanikai rendszer invariáns a térbeli elforgatásokkal szemben (inerciális vonatkoztatási rendszerben), ezért a **zárt mechanikai rendszer impulzusmomentuma megmarad. Ez az impulzusmomentum megmaradásának zárt rendszerre vonatkozó törvénye.** A mechanikai rendszer szigorú értelemben vett zártság elégséges, de nem szükséges feltétele annak, hogy a rendszer az elforgatásokkal szemben invariáns legyen, azaz hogy az impulzusmomentuma megmaradjon. Később látni fogjuk, hogy az ún. mechanikai zártság feltételeinek teljesülése is elégséges ahhoz, hogy a mechanikai rendszer impulzusa megmaradjon.

Az impulzusmomentum axiálvektor. Ennek mindhárom komponense megmaradó, ami azzal kap[csolatos, hogy a térben 3 független forgatás létezik, pl. a Descartes-féle koordinátarendszer egyes tengelyei körüli forgatások; egy általános elforgatást tehát 3 független paraméterrel lehet megadni. A zárt mechanikai rendszernek a 3, független elforgatással szemben mutatott szimmetriái következtében maradnak meg az impulzusmomentum megfelelő Descartes-komponensei.

Határozzuk meg formálisan, hogy mennyivel változik meg a hatásnak a mozgás valóságos pályájára számolt értéke, ha a koordinátarendszerünket $\mathbf{n}$ rögzített irány körül tetszőleges, infinitezimális ϵ szöggel elforgatjuk. Ekkor a helyzetvektorok és a sebességvektorok transzformációja:

$$\begin{aligned}
\mathbf{r}_a &\to \mathbf{r}_a + \delta\mathbf{r}_a, \qquad \delta\mathbf{r}_a = \epsilon\mathbf{n}\times\mathbf{r}_a,\\
\dot{\mathbf{r}}_a &\to \dot{\mathbf{r}}_a + \delta\mathbf{v}_a, \qquad \delta\mathbf{v}_a = \frac{d\delta\mathbf{r}_a}{dt} = \epsilon\mathbf{n}\times\dot{\mathbf{r}}_a.
\end{aligned} \tag{2.2.1}$$

A hatás megváltozása:

$$\begin{aligned}
\delta S|_{val} &= \int_{t_k}^{t_v} L(\mathbf{r}_a+\delta\mathbf{r}_a, \dot{\mathbf{r}}_a+\delta\mathbf{v}_a; t)dt - \int_{t_k}^{t_v} L(\mathbf{r}_a, \dot{\mathbf{r}}_a; t)dt\\
&= \int_{t_k}^{t_v} \sum_{b=1}^{N}\left[\frac{\partial L(\mathbf{r}_a,\dot{\mathbf{r}}_a;t)}{\partial \mathbf{r}_b}\cdot\delta\mathbf{r}_b + \frac{\partial L(\mathbf{r}_a,\dot{\mathbf{r}}_a;t)}{\partial \dot{\mathbf{r}}_b}\cdot\frac{d}{dt}\delta\mathbf{r}_b\right]dt\\
&= \int_{t_k}^{t_v} \sum_{b=1}^{N}\left[\left(\frac{\partial L(\mathbf{r}_a,\dot{\mathbf{r}}_a;t)}{\partial \mathbf{r}_b} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L(\mathbf{r}_a,\dot{\mathbf{r}}_a;t)}{\partial \dot{\mathbf{r}}_b}\right)\cdot\delta\mathbf{r}_b + \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L(\mathbf{r}_a,\dot{\mathbf{r}}_a;t)}{\partial \dot{\mathbf{r}}_b}\cdot\delta\mathbf{r}_b\right)\right]dt\\
&= \sum_{b=1}^{N}\int_{t_k}^{t_v}\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L(\mathbf{r}_a,\dot{\mathbf{r}}_a;t)}{\partial \dot{\mathbf{r}}_b}\cdot\delta\mathbf{r}_b\right)dt\\
&= \left[\sum_{b=1}^{N}\frac{\partial L(\mathbf{r}_a,\dot{\mathbf{r}}_a;t)}{\partial \dot{\mathbf{r}}_b}\cdot\delta\mathbf{r}_b\right]_{t_k}^{t_v}\\
&= \left[\sum_{b=1}^{N}\frac{\partial L(\mathbf{r}_a,\dot{\mathbf{r}}_a;t)}{\partial \dot{\mathbf{r}}_b}\cdot(\epsilon\mathbf{n}\times\mathbf{r}_b)\right]_{t_k}^{t_v}\\
&= \epsilon\mathbf{n}\sum_{b=1}^{N}\left[\mathbf{r}_b\times\frac{\partial L(\mathbf{r}_a,\dot{\mathbf{r}}_a;t)}{\partial \dot{\mathbf{r}}_b}\right]_{t_k}^{t_v}.
\end{aligned} \tag{2.2.2}$$

A harmadik egyenlőség felírásakor kihasználtuk, hogy a mozgás igazi pályájára fennállnak az Euler-Lagrange-egyenletek. Az utolsó egyenlőséget a vegyesszorzatra vonatkozó azonosság,

$$\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{c}) = \mathbf{b}\cdot(\mathbf{c}\times\mathbf{a}) = \mathbf{c}\cdot(\mathbf{a}\times\mathbf{b}) = -\mathbf{c}\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{a}) = -\mathbf{b}\cdot(\mathbf{a}\times\mathbf{c}) = -\mathbf{a}\cdot(\mathbf{c}\times\mathbf{b}) \tag{2.2.3}$$

segítségével kaptuk meg. Ha a mechanikai rendszer térbeli elforgatási szimmetriával rendelkezik, akkor a hatás fenti, formális megváltozása zérus kell legyen,

$$0 = \delta S|_{val} = \epsilon \mathbf{n} \sum_{b=1}^{N} \left[\mathbf{r}_b \times \frac{\partial L(\mathbf{r}_a, \dot{\mathbf{r}}_a; t)}{\partial \dot{\mathbf{r}}_b} \right]_{t_k}^{t_v}, \tag{2.2.4}$$

tetszőleges $\mathbf{n}$ egységvektor és ϵ infinitezimális elforgatási szög esetén. Ez akkor és csak akkor lehetséges, ha az

$$\mathbf{L} = \sum_{b=1}^{N} \mathbf{r}_b \times \frac{\partial L(\mathbf{r}_a, \dot{\mathbf{r}}_a; t)}{\partial \dot{\mathbf{r}}_b} = \sum_{b=1}^{N} \mathbf{r}_b \times \mathbf{p}_b \tag{2.2.5}$$

mennyiség idő szerinti első deriváltja nulla, vagyis ez a mennyiség megmarad a mozgás során:

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = 0, \quad \mathbf{L}(t_v) = \mathbf{L}(t_k). \tag{2.2.6}$$

Az $\mathbf{L}$ mennyiséget nevezzük a rendszer teljes impulzusmomentumának. A mechanikai rendszer teljes $\mathbf{L}$ impulzusmomentuma az egyes részecskék $\mathbf{l}_a$ impulzusmomentumaiból additiv módon tevődik össze. Egy részecske impulzusmomentuma, $\mathbf{l}_a = \mathbf{r}_a \times \mathbf{p}_a$ két polárvektor vektori szorzata, ezért axiálvektor. Az impulzusmomentum tehát axiálvektor: térbeli forgatások során ugyanúgy transzformálódik mint a vektorok, de tértükrözés során nem vált előjelet.

Az $\mathbf{l} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$ impulzusmomentum a részecske pályamozgásából származik, ezért pályaimpulzusmomentumnak nevezzük. A klasszikus mechanikában csak ilyen impulzusmomentum fordul elő. A tapasztalat szerint a természetben a szerkezet nélküli részecskék, pl. az elektronok, a kvarkok, a fotonok, stb. rendelkeznek „saját" impulzusmomentummal is, amely nem a részecskék pályamozgásából, és nem is az őket alkotó részecskék pályamozgásából adódik. Ez a **spin.** A klasszikus mechanika a spin létezésére nem tud magyarázatot adni.

Előfordul olyan fizikai rendszer, amelyik csak egy (vagy két) meghatározott irány körüli elforgatással szemben invariáns. Ekkor csak az impulzusmomentum megfelelő irányú komponensére (komponenseire) áll fenn megmaradási törvény. (Erre példa egy tengelyszimmetrikus test szimmetriatengely körüli forgása.)

2.2.3 Az energia megmaradásának törvénye

Az energia az a fizikai mennyiség, ami a fizikai rendszer időbeli eltolási szimmetriájának következtében marad meg. Szigorú értelemben zárt mechanikai rendszer az időbeli eltolással szemben invariáns (inerciális vonatkoztatási rendszerben), ezért zárt rendszer energiája megmarad. Ez az energia megmaradásának zárt rendszerre vonatkozó törvénye. A mechanikai rendszer akkor is rendelkezhet időbeli eltolási szimmetriával, ha nem zárt, pl. mechanikai rendszer időtől független külső potenciáltérben. A rendszer energiája ekkor is megmarad az időbeli eltolásokkal szembeni szimmetria következtében.

Az időbeli eltolást egyetlen valós paraméter határozza meg, s ennek megfelelően az energia egy-komponensű mennyiség, skalár.

Ha a rendszer az időbeli eltolással szemben invariáns, akkor a Lagrange-függvény nem függ explicit módon a t időtől. Tegyük fel, hogy az időmérés kezdetét tetszőleges ϵ, infinitezimális időtartammal eltoljuk: $t \to t' = t - \epsilon$. Ekkor a hatás megváltozása:

$$\delta S_{\mathrm{val}} = \int_{t_k - \epsilon}^{t_v - \epsilon} L(\mathbf{r}(t' + \epsilon), \dot{\mathbf{r}}(t' + \epsilon)) dt' - \int_{t_k}^{t_v} L(\mathbf{r}(t), \dot{\mathbf{r}}(t)) dt$$

$$
\begin{aligned}
&= -\epsilon\, L\big|_{t_k}^{t_v} + \int_{t_k}^{t_v} \sum_{a=1}^{N} \left[\frac{\partial L(\mathbf{r}(t),\dot{\mathbf{r}}(t))}{\partial \mathbf{r}_a}\cdot \dot{\mathbf{r}}_a \epsilon + \frac{\partial L(\mathbf{r}(t),\dot{\mathbf{r}}(t))}{\partial \dot{\mathbf{r}}_a}\cdot \ddot{\mathbf{r}}_a \epsilon\right] dt \\
&= \int_{t_k}^{t_v} \sum_{a=1}^{N} \left[\frac{\partial L(\mathbf{r}(t),\dot{\mathbf{r}}(t))}{\partial \mathbf{r}_a}\cdot \dot{\mathbf{r}}_a - \dot{\mathbf{r}}_a \cdot \frac{d}{dt}\frac{\partial L(\mathbf{r}(t),\dot{\mathbf{r}}(t))}{\partial \mathbf{r}_a}\right. \\
&\quad \left. + \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L(\mathbf{r}(t),\dot{\mathbf{r}}(t))}{\partial \dot{\mathbf{r}}_a}\cdot \dot{\mathbf{r}}_a\right)\right] \epsilon dt - \epsilon\, L\big|_{t_k}^{t_v}. \qquad (2.2.1)
\end{aligned}
$$

Az utolsó egyenlőséget parciális integrálással kaptuk. Az integrandus első két tagja az Euler-Lagrange-egyenletek értelmében kiejti egymást. Ekkor, az időbeli eltolási szimmetria következtében

$$
0 = \delta S_{\mathrm{val}} = \epsilon \left[\sum_{a=1}^{N} \mathbf{p}_a \cdot \dot{\mathbf{r}}_a - L\right]_{t_k}^{t_v} \qquad (2.2.2)
$$

egyenlőségnek kell tetszőleges ϵ esetén fennállnia. Ez akkor és csak akkor lehetséges, ha a

$$
H = \sum_{a=1}^{N} \mathbf{p}_a \cdot \dot{\mathbf{r}}_a - L, \qquad (2.2.3)
$$

vagy általános koordinátákkal kifejezve, a

$$
H = \sum_{i=1}^{s} p_i \dot{q}_i - L(q,\dot{q}), \qquad \left(p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) \qquad (2.2.4)
$$

mennyiség értéke a mozgás során állandó marad.

A H mennyiséget **Hamilton-függvénynek** nevezzük. **A Hamilton-függvénynek a valódi mozgás pályáján felvett értékét nevezzük a rendszer energiájának:** $E = H_{\mathrm{val}}$. A

$$
p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \qquad (2.2.5)
$$

mennyiséget **általános impulzusnak**, vagy másképpen a q_i **általános koordinátához kanonikusan konjugált impulzusnak** nevezzük.

Ha tehát a rendszer az időbeli eltolásokkal szemben invariáns, akkor a rendszer energiája megmarad.

Kinetikus és potenciális energia. A fizikailag zárt rendszerre értelmeztük a H Hamilton-függvényt, amelynek a valóságos mozgás pályáján felvett értéke a zárt rendszer megmaradó energiáját adja. Felhasználva a Lagrange-függvény

$$
L = T - V, \qquad T = \sum_{a=1}^{N} t_a = \sum_{a=1}^{N} \frac{1}{2} m_a \mathbf{v}_a^2 \qquad (2.2.6)
$$

alakját, kapjuk, hogy az energia

$$
E = \sum_{a=1}^{N} \mathbf{p}_a \cdot \mathbf{v}_a - L = \sum_{a=1}^{N} \frac{1}{2} m_a \mathbf{v}_a^2 + V = T + V \qquad (2.2.7)
$$

alakban írható, azaz **a rendszer E energiája a rendszer T kinetikus energiájának és V potenciális energiájának összege.** Sebességfüggő kölcsönhatások esetén V az általánosított potenciális energia. Itt

$$
t_a = \frac{1}{2} m_a \mathbf{v}_a^2 \qquad (2.2.8)
$$

lenne az a részecske energiája, ha nem állna kölcsönhatásban más részecskékkel. A szabad a részecske azért rendelkezik a t_a energiával, mert mozog, mert nem nulla a $\mathbf{v}_a$ sebessége. Ezért nevezzük a t_a energiát **mozgási, vagy kinetikus energiának**. A rendszer teljes T kinetikus energiája az egyes részecskék kinetikus energiáiból additív móden tevődik össze:

$$T = \sum_{a=1}^{N} t_a = \sum_{a=1}^{N} \frac{1}{2} m_a \mathbf{v}_a^2. \tag{2.2.9}$$

Ez lenne az N részecskés rendszer energiája, ha a részecskék nem hatnának kölcsön egymással. A kölcsönhatás módosítja a rendszer teljes energiáját. **Az energia kölcsönhatásból származó tagját nevezzük potenciális energiának (sebességfüggő esetben általánosított potenciális energiának).**

2.3 Newton törvényei. Mérlegegyenletek nyílt mechanikai rendszerben

Ebben a fejezetben nyílt rendszerekkel foglalkozunk, amelyeknek a teljes impulzusa, impulzusmomentuma és energiája általában nem marad meg. Ezen mennyiségek időbeli változására vonatkozó mérlegegyenleteket vezetünk le. Egyúttal megmutatjuk, hogy a legkisebb hatás elve alapján megfogalmazott mechanikában visszakapjuk Newton törvényeit.

2.3.1 Newton törvényei

Newton II. törvénye. Az Euler-Lagrange-egyenleteket,

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0, \qquad i = 1, 2, \dots, s \tag{2.3.1}$$

írjuk a kanonikusan konjugált impulzusok segítségével

$$\frac{dp_i}{dt} = \frac{\partial L}{\partial q_i} \tag{2.3.2}$$

alakba. Ez **Newton II. törvényének legáltalánosabb alakja.** Azt mondja, hogy az impulzus idő szerinti első deriváltja a részecskék általános koordinátáinak és sebességeinek adott függvénye:

$$\frac{\partial L(q, \dot{q})}{\partial q_i} \equiv F_i(q, \dot{q}). \tag{2.3.3}$$

Az

$$F_i = \frac{dp_i}{dt} \tag{2.3.4}$$

mennyiséget **általános erőnek,** az $F_i(q, \dot{q})$ függvénykapcsolatot **erőtörvénynek** nevezzük. Descartes-koordinátákat használva, Newton II. törvényének szokásos alakját kapjuk:

$$\mathbf{F}_a \equiv \frac{d\mathbf{p}_a}{dt} = \frac{\partial L(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}})}{\partial \mathbf{r}_a} \tag{2.3.5}$$

ahol $\mathbf{F}_a$ az a részecskére ható erő.

Belső és külső erő. Tegyük fel, hogy a Lagrange-függvény az A vizsgált rendszert és annak B környezetét írja le, ahol B elég nagyra van választva ahhoz, hogy A mozgása szempontjából az $A \cup B$ teljes rendszert zártnak lehessen tekinteni. Ekkor az $L_{A\cup B} = L_A + L_B + L_{A,B}$ Lagrange-függvény alapján az a részecskére ható erő

$$\mathbf{F}_a = \frac{\partial L_{A\cup B}}{\partial \mathbf{r}_a} = \mathbf{F}_a^{\mathrm{b}} + \mathbf{F}_a^{\mathrm{k}} \tag{2.3.6}$$

alakba írható, ahol

$$\mathbf{F}_a^{\mathrm{b}} = \frac{\partial L_A}{\partial \mathbf{r}_a} \tag{2.3.7}$$

az a részecskére az A rendszer többi részecskéi által kifejtett **belső erő**,

$$\mathbf{F}_a^{\mathrm{k}} = \frac{\partial L_{A,B}}{\partial \mathbf{r}_a} \tag{2.3.8}$$

pedig az a részecskére a B környezet részecskéi által kifejtett **külső erő.** Newton II. törvényének alakja tehát a vizsgált A rendszer bármely $a = 1, 2, \ldots, N$ részecskéjére:

$$\frac{d\mathbf{p}_a}{dt} = \mathbf{F}_a^{\mathrm{b}} + \mathbf{F}_a^{\mathrm{k}}. \tag{2.3.9}$$

Ha az A vizsgált rendszerben csak párkölcsönhatások vannak, akkor az A rendszer zárt (szigorú értelemben), akkor a Lagrange-függvénye

$$L_A = \sum_{a=1}^{N} \frac{1}{2} m_a \mathbf{v}_a^2 - \sum_{a=1}^{N} \sum_{b>a}^{N} V_{a,b}(\mathbf{r}_{a,b}), \qquad \mathbf{r}_{a,b} = \mathbf{r}_a - \mathbf{r}_b \tag{2.3.10}$$

és az $a \in A$ részecskére ható erő

$$\mathbf{F}_a \quad = \quad -\sum_{b=1}^{N} \frac{\partial V_{a,b}(\mathbf{r}_{a,b})}{\partial \mathbf{r}_a} = \sum_{b=1}^{N} \mathbf{F}_{b \to a}, \tag{2.3.11}$$

az egyes $b \neq a$, $b \in A$ részecskék által az a részecskére kifejtett

$$\mathbf{F}_{b \to a} = -\frac{\partial V_{a,b}(\mathbf{r}_{a,b})}{\partial \mathbf{r}_a} \tag{2.3.12}$$

erők összege.

Erőtér. Potenciál. Térerősség. Abban a speciális esetben, ha a környezet külső teret hoz létre, amelyben az A rendszer részecskéi mozognak, a külső erő a külső térben mozgó rendszer potenciális energiájából származik. Ekkor $L_{A,B} = -\sum_{a=1}^{N} e_a \phi(\mathbf{r}_a)$ és az a részecskére ható külső erő:

$$\mathbf{F}_a^{\mathrm{k}} = -e_a \frac{\partial \phi(\mathbf{r}_a)}{\partial \mathbf{r}_a}. \tag{2.3.13}$$

Az egységnyi tömegű, töltésű, stb. (e_a tulajdonságú) próbatestre a külső térben ható erőt a fizikai mező térerősségének nevezzük. A külső potenciáltér térerőssége a potenciál negatív gradiense:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = -\frac{\partial \phi(\mathbf{r})}{\partial \mathbf{r}}. \tag{2.3.14}$$

Néhány példa a természetben előforduló erőterekre:

1. *A Föld nehézségi erőtere:*

$$\phi = gz, \qquad E_x = E_y = 0, \quad E_z = -\frac{\partial \phi}{\partial z} = -g, \tag{2.3.15}$$

ahol x, y a vízszintes síkban, z a függőleges irányban (felfelé) felvett Descartes-koordináták, g az ún. nehézségi gyorsulás. Tehát az m tehetelen tömegű részecskére ható $\mathbf{F} = m\mathbf{E}$ erő komponensei:

$$F_x = F_y = 0, \quad F_z = -mg. \tag{2.3.16}$$

Ez az erőtér **homogén**, a térerősség a geometriai tér minden pontjában azonos (nagyság és irány szerint).

2. *Gravitációs mező:*

$$\phi = -\gamma \frac{M_s}{r}, \quad E_\theta = E_\varphi = 0, \quad E_r = -\frac{\partial \phi}{\partial r} = -\gamma \frac{M_s}{r^2}, \tag{2.3.17}$$

ahol M_s a gravitációs külső teret létesítő anyagi pont (pl. a Nap) súlyos tömege, γ a Newton-féle gravitációs állandó, r, θ, ϕ gömbi polárkoordináták, a koordinátarendszer origóját a teret létesítő anyagi pont helyén választottuk. Az m_s súlyos tömegű részecskére ható erő

$$\mathbf{F} = m_s \mathbf{E} = -\frac{m_s M_s}{r^2} \mathbf{e}_r, \tag{2.3.18}$$

és ennek komponensei a gömbi polárkoordinátarendszerben:

$$F_\theta = F_\varphi = 0, \quad F_r = -\gamma \frac{m_s M_s}{r^2}. \tag{2.3.19}$$

Pontszerű objektum gravitációs erőtere **inhomogén**, a térerősség helyről helyre más. Ennél többet is állíthatunk: a pontszerű objektum gravitációs tere **centrálszimmetrikus:** a térerősség sugárirányban, a a teret létesítő anyagi pont helyétől kifelé mutat és nagysága csak az anyagi ponttól mért távolságtól függ.

Gömbi polárkoordinátákban egy tetszőleges $\phi(\mathbf{r})$ skalármező gradiensének, grad $\phi(\mathbf{r}) = \frac{\partial \phi(\mathbf{r})}{\partial \mathbf{r}}$, komponenseit az alábbi szabály szerint kell meghatározni:

$$\text{grad}_{\,r} = \mathbf{e}_r \cdot \text{ grad } \phi(\mathbf{r}) = \frac{\partial \phi}{\partial r}, \qquad \text{grad}_{\,\theta} = \mathbf{e}_\theta \cdot \text{ grad } \phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{r}\frac{\partial \phi}{\partial \theta},$$
$$\text{grad}_{\,\varphi} = \mathbf{e}_\varphi \cdot \text{ grad } \phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{r \sin\theta}\frac{\partial \phi}{\partial \varphi}. \tag{2.3.20}$$

3. *Ponttöltés elektrosztatikus tere:*

$$\phi = k\frac{Q}{r}, \quad E_\theta = E_\varphi = 0, \quad E_r = -\frac{\partial \phi}{\partial r} = k\frac{Q}{r^2} \tag{2.3.21}$$

ahol Q az elektrosztatikus mezőt keltő, nyugvó ponttöltés, k univerzális állandó, a gömbi polárkoordinátarendszer origóját a teret keltő ponttöltés helyén választottuk és r, θ, φ gömbi polárkoordináták. A q nyugvó próbatöltésre ható Coulomb-erő tehát:

$$\mathbf{F} = q\mathbf{E} = \frac{qQ}{r^2}\mathbf{e}_r, \tag{2.3.22}$$

amelynek komponensei:

$$F_\theta = F_\varphi = 0, \quad F_r = k\frac{qQ}{r^2}. \tag{2.3.23}$$

A ponttöltés elektrosztatikus erőtere centrálszimmetrikus.

4. *Harmonikus oszcillátor potenciál:*

$$\phi = \frac{1}{2}\omega^2 r^2, \quad E_\theta = E_\varphi = 0, \quad E_r = -\frac{\partial \phi}{\partial r} = -\omega^2 r, \tag{2.3.24}$$

ahol ω a mező paramétere (a harmonikus oszcillátor potenciálba helyezett m tehetetlen tömegű részecske esetén a visszatérítő erő $D = m\omega^2$), a gömbi polárkoordinátarendszer origóját a mező középpontjában választottuk. A harmonikus oszcillátor potenciálban mozgó, m tehetetlen tömegű részecskére tehát

$$\mathbf{F} = m\mathbf{E} = -m\omega^2 r\mathbf{e}_r == -m\omega^2\mathbf{r} = -D\mathbf{r} \tag{2.3.25}$$

erő, az ún. kvázielasztikus erő hat, amelynek komponensei:

$$F_\theta = F_\varphi = 0, \quad F_r = -m\omega^2 r = -Dr. \tag{2.3.26}$$

A kvázielasztikus erőtér centrálszimmetrikus.

Egy-dimenziós esetben:

$$\phi = \frac{1}{2}\omega^2 x^2, \qquad E_x = -\omega^2 x, \tag{2.3.27}$$

és az m tehetetlen tömegű részecskére ebben a térben ható erő:

$$F_x = mE_x = -m\omega^2 x = -Dx. \tag{2.3.28}$$

Rendezett és rendezetlen külső erő. **Ha a külső erők külső tértől származnak, vagy a környező részecskék valamilyen más kollektív viselkedése következtében lépnek fel, akkor rendezett külső erőről beszélünk.** A rendezett erő erőtörvényében (pl. potenciális energia külső térben) kifejezésében már nem szerepelnek a külső erőt kifejtő test egyes részecskéinek helyzetvektorai, mert azoknak valamilyen kollektív mozgása hozza létre az egyes részecskék rendezetlen mozgásától már független külső erőt (vagy teret). Ezzel ellentétben, **ha a külső erők nem rendezettek, akkor rendezetlen külső erőkről beszélünk.** Ilyenkor csak annyit mondhatunk, hogy a környezet minden egyes részecskéje kifejt valamilyen erőt a vizsgált rendszer minden egyes részecskéjére, és ezen erők erőtörvényében természetesen a külső környezet részecskéinek helyzetvektorai explicit módon szerepelnek.

Az erőhatások függetlensége. Az a feltevésünk, hogy párkölcsönhatásokat tételeztünk fel, amelyeket meghatározó $V_{a,b}$ törvények nem függenek attól, hogy más részecskék vannak-e jelen és milyen a mozgásállapotuk, biztosítja, hogy az a részecskére ható belső erő kiszámolásakor úgy kell eljárni, hogy az egyes részecskék által kifejtett $\mathbf{F}_{b\to a}$ erőket a többi részecskétől független $V_{a,b}$ törvényből kell származtatni. Ez azt jelenti, hogy ezen erők ugyanekkorák lennének akkor is, ha a többi részecske nem is lenne jelen. Az eredő $\mathbf{F}_a^{\mathrm{b}}$ erőt az egyes párkölcsönhatások erőtörvényeiből független módon származtatott $\mathbf{F}_{b\to a}$ erők független, azaz egyszerű vektori összegzésével lehet megkapni. Ez **az erőhatások függetlenségének elve, Newton IV. törvénye.**

A hatás-ellenhatás törvénye. Könnyen beláthatjuk, hogy ha az A rendszerben a belső erők párkölcsönhatásból származnak, akkor az a részecske által a b részecskére kifejtett $\mathbf{F}_{a\to b}$ erő azonos nagyságú és ellentétes irányú a b részecske által az a részecskére kifejtett $\mathbf{F}_{b\to a}$ erővel:

$$\mathbf{F}_{a\to b} = -\mathbf{F}_{b\to a}. \tag{2.3.29}$$

Ez Newton III. törvénye, az ún. hatás-ellenhatás törvénye.

Tegyük fel ugyanis, hogy csak ez a két részecske van jelen és zárt rendszert alkotnak. Akkor csak ez a két erő hat, és a rendszer teljes impulzusa $\mathbf{p}_a + \mathbf{p}_b$ állandó, mert a rendszer zárt. Ekkor tetszőleges infinitezimális dt idő alatt az egyik részecske impulzusának megváltozása egyenlő a másik impulzusa megváltozásának minusz egyszeresével: $d\mathbf{p}_a = -d\mathbf{p}_b$. Ez viszont az egyes részecskékre ható ereők definíciója alapján azt jelenti, hogy

$$\mathbf{F}_{b\to a} = \frac{d\mathbf{p}_a}{dt} = -\frac{d\mathbf{p}_b}{dt} = -\mathbf{F}_{a\to b}. \tag{2.3.30}$$

Az erőhatások függetlenségének következtében ezen a reláción nem változtat az, hogy további részecskéket veszünk be a rendszerbe, vagy hogy a rendszer más rendszerek részecskéivel is kölcsönhat.

Az erőhatások függetlensége. Az a feltevésünk, hogy párkölcsönhatásokat tételeztünk fel, amelyeket meghatározó $V_{a,b}$ törvények nem függenek attól, hogy más részecskék vannak-e jelen és milyen a mozgásállapotuk, biztosítja, hogy az a részecskére ható belső erő kiszámolásakor úgy kell eljárni, hogy az egyes részecskék által kifejtett $\mathbf{F}_{b\to a}$ erőket a többi részecskétől független $V_{a,b}$ törvényből kell származtatni. Ez azt jelenti, hogy ezen erők ugyanekkorák lennének akkor is, ha a többi részecske nem is lenne jelen. Az eredő $\mathbf{F}_a^{\mathrm{b}}$ erőt az egyes párkölcsönhatások erőtörvényeiből független módon származtatott $\mathbf{F}_{b\to a}$ erők független, azaz egyszerű vektori összegzésével lehet megkapni. Ez **az erőhatások függetlenségének elve, Newton IV. törvénye.**

2.3.2 Impulzustétel. Tömegközéppont

Newton II. törvénye pontrendszerre. Vegyük megint azt az esetet, hogy az A nyílt rendszer a B környezettel hat kölcsön. Írjuk az A rendszer részecskéire vonatkozó Euler-Lagrange-féle mozgásegyenleteket

$$\frac{d\mathbf{p}_a}{dt} = \mathbf{F}_a^{\mathrm{b}} + \mathbf{F}_a^{\mathrm{k}} \tag{2.3.1}$$

alakba és adjuk ezeket össze az összes $a \in A$ részecskére:

$$\sum_{a=1}^{N} \frac{d\mathbf{p}_a}{dt} = \sum_{a=1}^{N} \mathbf{F}_a^{\mathrm{b}} + \sum_{a=1}^{N} \mathbf{F}_a^{\mathrm{k}}. \tag{2.3.2}$$

A jobb oldal első tagja a hatás-ellenhatás törvénye értelmében eltűnik:

$$\sum_{a=1}^{N} \mathbf{F}_a^{\mathrm{b}} = \sum_{a=1}^{N} \sum_{b>a}^{N} (\mathbf{F}_{b\to a} + \mathbf{F}_{a\to b}) = 0. \tag{2.3.3}$$

Az egyes részecskékre ható külső erők vektori összegét jelöljük $\mathbf{F}$-fel:

$$\mathbf{F} = \sum_{a=1}^{N} \mathbf{F}_a^{\mathrm{k}}. \tag{2.3.4}$$

Az egyenlet bal oldalát kifejezzük a rendszer teljes

$$\mathbf{P} = \sum_{a=1}^{N} \mathbf{p}_a \tag{2.3.5}$$

impulzusával. Ekkor az A rendszer teljes impulzusának időbeli változására ugyanolyan alakú mozgásegyenletet kapunk, mint az egyes részecskék mozgásegyenlete:

$$\frac{d\mathbf{P}}{dt} = \mathbf{F}. \tag{2.3.6}$$

A rendszer teljes impulzusának idő szerinti első deriváltja egyenlő a rendszerre ható külső erők vektori eredőjével. (Ezen összeg képzésekor teljesen mindegy, hogy az összegben szereplő egyes külső erők a rendszer melyik részecskéjére hatnak, azaz hol van a támadási pontjuk.) Az (2.3.6) egyenlet az A pontrendszerre vonatkozó **impulzustétel.**

Impulzusmérleg. A kapott (2.3.6) egyenlet egyúttal **az impulzus mérlegegyenlete.** Azt mondja, hogy az A nyílt rendszer impulzusa azért és csakis azért változhat meg, mert a rendszerre más testek kívülről erőt gyakorolnak. Az A nyílt rendszerre érvényes egyenlet:

$$\frac{d\mathbf{P}_A}{dt} = \mathbf{F}_{B\to A}. \tag{2.3.7}$$

Természetesen ugyanilyen alakú egyenlet érvényes a B környezetre is:

$$\frac{d\mathbf{P}_B}{dt} = \mathbf{F}_{A\to B}. \tag{2.3.8}$$

Vegyük figyelembe, hogy a B test által A-ra kifejtett $\mathbf{F}_{B\to A}$ erőt úgy kell kiszámolni, hogy összeadjuk vektorilag a B test b részecskéi által az A test a részecskéire gyakorolt valamennyi erőt:

$$\mathbf{F}_{B\to A} = \sum_{b\in B}\sum_{a\in A}\mathbf{F}_{b\to a}. \tag{2.3.9}$$

Hasonlóan,

$$\mathbf{F}_{A\to B} = \sum_{a\in A}\sum_{b\in B}\mathbf{F}_{a\to b}. \tag{2.3.10}$$

A hatás-ellenhatás törvénye értelmében azonban:

$$\mathbf{F}_{A\to B} = \sum_{a\in A}\sum_{b\in B}\mathbf{F}_{a\to b} = -\sum_{b\in B}\sum_{a\in A}\mathbf{F}_{b\to a} = -\mathbf{F}_{B\to A}. \tag{2.3.11}$$

Ez azt jelenti, hogy a B test (környezet) által az A testnek (nyílt rendszernek) Δt idő alatt átadott impulzus pontosan annak az impulzusnak az ellentettje, amelyet az A nyílt rendszer ad át Δt idő alatt a B testnek (környezetnek):

$$\Delta\mathbf{P}_A = \int_{t_0}^{t_0+\Delta t}\frac{d\mathbf{P}_A}{dt}dt = -\int_{t_0}^{t_0+\Delta t}\frac{d\mathbf{P}_B}{dt}dt = -\Delta\mathbf{P}_B. \tag{2.3.12}$$

Az impulzusátadás erőhatás révén történik. Másképpen fogalmazva: (szigorú értelemben) **zárt rendszer egyik részének tetszőleges Δt idő alatt bekövetkező impulzusváltozása egyenlő nagyságú és ellentétes irányú a zárt rendszer másik részének ugyanezen idő alatt bekövetkező impulzusváltozásával.**

Zártság és mechanikai zártság. A nyílt A rendszerre alkalmazott (2.3.6) egyenlet alapján látjuk, hogy a rendszer teljes $\mathbf{P}_A$ impulzusa megmarad, ha a rendszerre ható külső erők eredője zérus. Ez azonban nem feltétlenül jelenti, hogy az A rendszer szigorú értelemben zárt. Elegendő pl. az is, hogy a rendszerre ne hasson rendezett külső erő, és a rendszerre ható rendezetlen erők eredője pedig zérus legyen. (Ekkor még működhetnek egyenként zérustól különböző külső erők, amelyek pl. termikus vagy részecske-kicserélő kölcsönhatást eredményeznek.) **Mechanikai rendszer impulzusa tehát megmarad, ha a rendszerre ható külső erők vektori eredője nulla. Ezért be szokás vezetni a rendszer mechanikai zártságának a fogalmát, amelynek egyik feltétele, hogy a rendszerre ható külső erők eredője nulla legyen. Az impulzusmegmaradás törvénye nemcsak szigorú értelemben zárt, hanem mechanikai értelemben zárt rendszerben is érvényes: ha a mechanikai rendszerre ható erők vektori eredője nulla, akkor a rendszer impulzusa megmarad.** A mechanikai zártság további feltételével a következő fejezetben foglalkozunk. Az elmondottakból nyilvánvaló, hogy a mechanikai zártság követelménye kevésbé szigorú, mint a szigorú értelemben vett zártságé, amikoris - többek között - megköveteljük, hogy a rendszer egyetlen részecskéjére se hasson külső erő.

A tömegközéppont megmaradásának tétele. Tegyük fel, hogy az A rendszerre ható külső erők vektori eredője nulla. Ekkor a rendszer teljes impulzusa állandó:

$$\mathbf{P} = \sum_{a=1}^{N} m_a \mathbf{v}_a = \frac{d}{dt} \sum_{a=1}^{N} m_a \mathbf{r}_a = \text{ áll. } \equiv M\mathbf{V}, \tag{2.3.13}$$

ahol a teljes impulzus állandó vektoráról leválasztottuk az A rendszer teljes $M = \sum_{a=1}^{N} m_a$ tömegét. Így $\mathbf{V}$ egy állandó, sebesség-dimenziójú vektor: az A rendszernek, mint egyetlen objektumnak, a sebessége. A fenti egyenlet azonban azt is mutatja, hogy $\mathbf{V}$ az

$$\mathbf{R} = \frac{\sum_{a=1}^{N} m_a \mathbf{r}_a}{\sum_{a=1}^{N} m_a} \tag{2.3.14}$$

helyzetvektornak, az úgynevezett **tömegközéppont** helyzetvektorának idő szerinti első deriváltja:

$$\mathbf{V} = \frac{d\mathbf{R}}{dt} \tag{2.3.15}$$

Mivel mechanikailag zárt rendszer teljes impulzusa megmarad, azért a **mechanikailag zárt rendszer tömegközéppontjának a sebessége (inerciarendszerben!) állandó:**

$$\frac{d\mathbf{R}}{dt} = \mathbf{V} = \text{ áll.} \tag{2.3.16}$$

Ezt az egyenletet idő szerint integrálva azt kapjuk, hogy a tömegközéppont helyzetvektora

$$\mathbf{R}(t) = \mathbf{V}(t - t_0) + \mathbf{R}_0 \tag{2.3.17}$$

módon függ az időtől, ahol $\mathbf{R}_0 = \mathbf{R}(t_0)$ a TKP helyzetvektora a $t = t_0$ kezdeti időpillanatban. Ez az $\mathbf{R}_0$ helyzetvektorú ponton átmenő, $\mathbf{V}$ érintőjű egyenes egyenlete. **Mechanikailag zárt rendszer tömegközéppontja tehát inerciarendszerben egyenesvonalú egyenletes mozgást végez, vagy megtartja nyugalmi állapotát.** Összegezve, azt találtuk tehát, hogy **minden testnek van egy olyan pontja, a tömegközéppontja, amelyik egyenesvonalú egyenletes mozgást végez, ha a testre ható külső erők vektori eredője nulla. Ez a tömegközéppont megmaradásának tétele.**

A TKP mozgásegyenlete. Ha a rendszerre ható külső erők eredője nem nulla, akkor **Newton II. törvényének a pontrendszerre mint egyetlen objektumra történő alkalmazását kifejező (2.3.6) egyenlet éppen a rendszer tömegközéppontjának a mozgásegyenlete:**

$$\frac{d}{dt}\mathbf{P} \equiv \frac{d}{dt}(M\mathbf{V}) \equiv M\frac{d^2\mathbf{R}}{dt^2} = \mathbf{F}. \tag{2.3.18}$$

Ennek értelmében a tömegközéppont gyorsulása arányos a rendszerre ható külső erők vektori eredőjével. Az arányossági tényező a rendszer teljes M tehetetlen tömegének reciproka.

Tömegközépponti vonatkoztatási rendszer. Tegyük fel, hogy valamely K vonatkoztatási rendszerből nézve vizsgáljuk az A test mozgását. **Az A rendszer tömegközéppontjával együtt mozgó K' vonatkoztatási rendszert, amelynek minden pontja**

a TKP-tal egyező sebességgel mozog, tömegközépponti vonatkoztatási rendszernek nevezzük. Megkülönböztetésül a K renszert, amelyből megfigyeléseinket végezzük, és amelyet egy másik testhez (a szobához, a Földhöz, stb.) rögzítünk szokás **laboratóriumi vonatkoztatási rendszernek** nevezni. Mennyi a mechanikai rendszer teljes impulzusa abban a K' vonatkoztatási rendszerben, amely a tömegközéppontjával együtt mozog? Ebben a K' vonatkoztatási rendszerben természetesen a részecskék sebességeire, $\mathbf{v}'_a = \mathbf{v}_a - \mathbf{V}$ összefüggés érvényes. Így a tömegközépponti rendszerben a teljes impulzus:

$$\mathbf{P}' = \sum_{a=1}^{N} m_a \mathbf{v}'_a = \sum_{a=1}^{N} m_a(\mathbf{v}_a - \mathbf{V}) = \sum_{a=1}^{N} m_a \mathbf{v}_a - M\mathbf{V} = \mathbf{P} - \mathbf{P} = 0. \qquad (2.3.19)$$

Tömegközépponti rendszerben tehát a rendszer teljes impulzusa nulla.

Impulzusmomentum és energia inerciális TKP rendszerben. Tegyük fel, hogy a K laboratóriumi rendszer és a K' tömegközépponti rendszer is inerciális vonatkoztatási rendszer. Tanulságos ekkor kifejezni az A rendszer K laboratóriumi rendszerben mért impulzusmomentumát és energiáját is az A rendszer K' tömegközépponti vonatkoztatási rendszerben mért impulzusmomentumával és energiájával. Ehhez felhasználjuk, hogy

$$\mathbf{r}_a = \mathbf{r}'_a + \mathbf{R}, \qquad \mathbf{v}_a = \mathbf{v}'_a + \mathbf{V}. \qquad (2.3.20)$$

Az A mechanikai rendszer teljes impulzusmomentuma:

$$\begin{aligned}
\mathbf{L} &= \sum_{a=1}^{N} \mathbf{r}_a \times \mathbf{p}_a = \sum_{a=1}^{N} \mathbf{r}_a \times m_a \mathbf{v}_a = \sum_{a=1}^{N} (\mathbf{r}'_a + \mathbf{R}) \times m_a(\mathbf{v}'_a + \mathbf{V}) \\
&= \sum_{a=1}^{N} \mathbf{r}'_a \times m_a \mathbf{v}'_a + \mathbf{R} \times \sum_{a=1}^{N} m_a \mathbf{v}'_a + \sum_{a=1}^{N} m_a \mathbf{r}'_a \times \mathbf{V} + \mathbf{R} \times M\mathbf{V} \\
&= \mathbf{L}' + \mathbf{R} \times M\mathbf{V}, \qquad (2.3.21)
\end{aligned}$$

ahol felhasználtuk, hogy a tömegközépponti rendszerben a tömegközéppont helyzetvektora nullvektor, $\sum_{a=1}^{N} m_a \mathbf{r}'_a = 0$ és hogy a tömegközépponti rendszerben a tömegközéppont sebessége zérus, $\sum_{a=1}^{N} m_a \mathbf{v}'_a = 0$. Az eredmény fizikailag könnyen érthető: az A test laborrendszerben mért $\mathbf{L}$ impulzusmomentuma egyenlő az A test tömegközépponti rendszerben mért $\mathbf{L}'$ impulzusmomentumának és az A test tömegközéppontja $\mathbf{R} \times M\mathbf{V}$ pályaimpulzusmomentumának a vektori összegével. Nézzük most a tömegközépponti rendszerben mért és a laborrendszerben mért energia kapcsolatát. Legyen V^{b} az A mechanikai rendszernek a részecskéi kölcsönhatásából származó (belső) potenciális energiája. Ez a kölcsönhatásból származó energia K-ban és K'-ben is azonos, mert a Galilei-féle relativitási elv értelmében az erőtörvények a K és a K' inerciarendszerekben azonosak. Az A rendszer energiája tehát:

$$\begin{aligned}
E &= \sum_{a=1}^{N} \frac{1}{2} m_a \mathbf{v}_a^2 + V^{\mathrm{b}} = \sum_{a=1}^{N} \frac{1}{2} m_a \left(\mathbf{v}'_a + \mathbf{V}\right)^2 + V^{\mathrm{b}} \\
&= \sum_{a=1}^{N} \frac{1}{2} m_a (\mathbf{v}'_a)^2 + \sum_{a=1}^{N} m_a \mathbf{v}'_a \cdot \mathbf{V} + \frac{1}{2} M\mathbf{V}^2 + V^{\mathrm{b}'} \\
&= E' + \frac{1}{2} M\mathbf{V}^2. \qquad (2.3.22)
\end{aligned}$$

A laborrendszerben tehát az A test E energiája megegyezik a tömegközépponti rendszerben mért E' energiájának és a tömegközéppontja $\frac{1}{2}M\mathbf{V}^2$ kinetikus energiájának az összegével.

2.3.3 Impulzusmomentum-tétel. Forgatónyomaték

Az impulzusmomentumra vonatkozó mérlegegyenlet. Egy rendszer teljes impulzusmomentumának időbeli változására vonatkozóan is meg tudunk fogalmazni egy hasonló tételt, mint a teljes impulzusának változására. Induljunk ki ismét az A nyílt rendszer részecskéire vonatkozó Euler-Lagrange-féle egyenletek

$$\frac{d\mathbf{p}_a}{dt} = \mathbf{F}_a^{\mathrm{b}} + \mathbf{F}_a^{\mathrm{k}}, \qquad a \in A \tag{2.3.1}$$

alakjából. Szorozzuk az egyenlet mindkét oldalát vektorilag az $\mathbf{r}_a$ helyzetvektorral:

$$\mathbf{r}_a \times \frac{d\mathbf{p}_a}{dt} \equiv \frac{d}{dt}(\mathbf{r}_a \times \mathbf{p}_a) - \frac{d\mathbf{r}_a}{dt} \times \mathbf{p}_a = \mathbf{r}_a \times \mathbf{F}_a^{\mathrm{b}} + \mathbf{r}_a \times \mathbf{F}_a^{\mathrm{k}}. \tag{2.3.2}$$

A második egyenlet második tagja eltűnik, mert $-m_a\mathbf{v}_a \times \mathbf{v}_a = 0$ alakra hozható. Beírhatjuk továbbá az első tagba az egyes részecskék origóra vonatkoztatott $\mathbf{l}_a = \mathbf{r}_a \times \mathbf{p}_a$ impulzusmomentumát. Értelmezzük továbbá az a részecskére ható $\mathbf{F}_a$ erőnek az origóra vonatkoztatott forgatónyomatékát az

$$\mathbf{M}_a = \mathbf{r}_a \times \mathbf{F}_a \tag{2.3.3}$$

vektori szorzattal. Ekkor az egyenletünk az alábbi alakot ölti,

$$\frac{d\mathbf{l}_a}{dt} = \mathbf{M}_a^{\mathrm{b}} + \mathbf{M}_a^{\mathrm{k}} \tag{2.3.4}$$

ahol

$$\mathbf{M}_a^{\mathrm{b}} = \mathbf{r}_a \times \mathbf{F}_a^{\mathrm{b}} = \sum_{b=1}^{N} \mathbf{r}_a \times \mathbf{F}_{b\to a} = \sum_{b=1}^{N} \mathbf{M}_{b\to a} \tag{2.3.5}$$

az a részecskére ható belső erők forgatónyomatékainak vektori összege, és

$$\mathbf{M}_a^{\mathrm{k}} = \mathbf{r}_a \times \mathbf{F}_a^{\mathrm{k}} \tag{2.3.6}$$

az a részecskére ható külső erő forgatónyomatéka.

A (2.3.4) egyenlet azt mondja, hogy egy részecske pályaimpulzusmomentumának idő szerinti első deriváltja egyenlő a részecskékre ható erők forgatónyomatékainak vektori összegével. (Vigyázat! Ha az egyenletet alkalmazzuk, akkor a bal oldalon szereplő pályaimpulzusmomentumot és a jobb oldalon szereplő forgatónyomatékokat egyaránt ugyanarra a pontra (a tetszőlegesen választott origóra) kell vonatkoztatni.)

Adjuk most össze az A nyílt rendszer egyes a részecskéire felírt (2.3.4) egyenleteket:

$$\frac{d}{dt}\sum_{a=1}^{N} \mathbf{l}_a \equiv \frac{d\mathbf{L}}{dt} = \sum_{a=1}^{N} \mathbf{M}_a^{\mathrm{b}} + \sum_{a=1}^{N} \mathbf{M}_a^{\mathrm{k}}. \tag{2.3.7}$$

Ez az impulzusmomentum mérlegegyenlete. Azt fejezi ki, hogy az A test teljes impulzusmomentumának idő szerinti első deriváltja egyenlő a belső erők forgatónyomatékainak és a külső erők forgatónyomatékainak összegével.

Belső erők forgatónyomatéka. Centrális erők. Általában a belső erők forgatónyomatékainak összege nem nulla. Az összeg minden részecske pártól származóan

$$\mathbf{r}_a \times \mathbf{F}_{b\to a} + \mathbf{r}_b \times \mathbf{F}_{a\to b} = (\mathbf{r}_a - \mathbf{r}_b) \times \mathbf{F}_{b\to a} \tag{2.3.8}$$

alakú járulékot tartalmaz. Ezek akkor és csak akkor tűnnek el azonosan, **ha bármely két részecske között ható erő párhuzamos a két részecske relatív helyzetvektorával. Az ilyen erőt centrális erőnek nevezzük.** Emlékezzünk vissza, hogy párkölcsönhatás esetén

$$\mathbf{F}_{b\to a} = -\frac{\partial V_{a,b}(\mathbf{r}_{a,b})}{\partial \mathbf{r}_a}, \tag{2.3.9}$$

ami akkor ad a relatív helyzetvektorral párhuzamos erőt, ha a megfelelő $V_{a,b}$ potenciális energia csak a részecskék relatív helyzetvektorának nagyságától, azaz csak az $r_{a,b} = |\mathbf{r}_{a,b}| = |\mathbf{r}_a - \mathbf{r}_b|$ távolságtól függ, ekkor ugyanis:

$$\begin{aligned}\mathbf{F}_{b\to a} &= -\frac{\partial V_{a,b}(r_{a,b})}{\partial \mathbf{r}_a} = -\frac{\partial V_{a,b}(r_{a,b})}{\partial r_{a,b}}\frac{\partial\sqrt{\mathbf{r}_{a,b}^2}}{\partial \mathbf{r}_{a,b}} \\ &= -\frac{\partial V_{a,b}(r_{a,b})}{\partial r_{a,b}}\frac{2\mathbf{r}_{a,b}}{2\sqrt{\mathbf{r}_{a,b}^2}} = -\frac{\partial V_{a,b}(r_{a,b})}{\partial r_{a,b}}\frac{\mathbf{r}_{a,b}}{r_{a,b}}.\end{aligned} \tag{2.3.10}$$

Centrális erő potenciális energiája tehát csak a két kölcsönható részecske távolságától függ és független a részecskék relatív helyzetvektorának irányától.

Nem centrális erőkre példa, amikor két részecske úgy hat kölcsön, hogy erőpárt alkot az egyik által a másikra és a másik által az egyikre kifejtett erő.

Ha a rendszerben csak centrális erők hatnak, akkor a rendszerben a belső erők forgatónyomatékainak az összege nulla. Ekkor a rendszerre vonatkozó impulzusmomentum-tétel,

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \mathbf{M}, \tag{2.3.11}$$

azt mondja ki, hogy a rendszer teljes impulzsumomentumának idő szerinti első deriváltja egyenlő a rendszerre ható külső erők forgatónyomatékainak $\mathbf{M} = \sum_{a=1}^{N}\mathbf{M}_a^{\mathrm{k}}$ összegével. A test impulzusmomentuma tehát annak következtében változik meg, hogy a külső erők forgatónyomatékainak összege nem nulla. Ha a külső erők forgatónyomatékainak összege nulla, akkor a rendszer teljes impulzusmomentuma állandó. (Feltéve, hogy a rendszerben centrális erők hatnak.) Ezért a mechanikai zártság másik feltételének azt nevezzük, ha a rendszerre ható külső erők forgatónyomatékainak összege nulla.

Mechanikai zártság. **A pontrendszert akkor nevezzük mechanikai értelemben zártnak, ha a pontrendszerre ható külső erők és azok forgatónyomatékainak összege egyaránt nulla. Mechanikailag zárt rendszernek az impulzusa és (centrális belső erők esetén) az impulzusmomentuma is állandó.**

2.3.4 Az erő munkája. Munkatétel

Munka. Teljesítmény. **Az a részecskére ható $\mathbf{F}_a$ erő által az a részecskén végzett $d'W_a$ elemi munkán az $\mathbf{F}_a$ erő és az a részecske infinitezimális $d\mathbf{r}_a$ elmozdulásának a skaláris szorzatát értjük:**

$$d'W_a = \mathbf{F}_a \cdot d\mathbf{r}_a. \tag{2.3.1}$$

Az elemi munka infinitezimális mennyiség, hiszen a részecskének az infinitezimális elmozdulásával kapcsolatos. Ugyanakkor általában nem létezik a helyzetvektornak olyan függvénye, amelynek infinitezimális megváltozásaként lehetne az elemi munkát felfogni.

Ezért szerepel a vessző az elemi munka $d'W$ jelölésében. Ha a részecske $d\mathbf{r}_a$ elmozdulása dt idő alatt következett be, akkor

$$d'W_a = \mathbf{F}_a \cdot d\mathbf{r}_a = \mathbf{F}_a \cdot \mathbf{v}_a dt \tag{2.3.2}$$

alakban írható az elemi munka. **Az időegység alatt végzett munka**, azaz pontosabban az

$$\mathbf{F}_a \cdot \mathbf{v}_a \tag{2.3.3}$$

mennyiség, **a részecskére ható erő és a részecske sebességének skaláris szorzata az erő teljesítménye**.

Munkatétel. Vegyük észre, hogy az a testre ható eredő $\mathbf{F}_a$ erő teljesítménye azonos módon átírható az alábbi alakba:

$$\mathbf{F}_a \cdot \mathbf{v}_a = \frac{d\mathbf{p}_a}{dt} \cdot \mathbf{v}_a = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2} m_a \mathbf{v}_a^2\right) \tag{2.3.4}$$

Ebből következik, hogy **az a részecskére ható $\mathbf{F}_a$ (eredő) erőnek dt idő alatt az a részecskén végzett elemi munkája, $d'W_a$ egyenlő az a részecske kinetikus energiájának megváltozásával:**

$$d'W_a = d\left(\frac{1}{2} m_a \mathbf{v}_a^2\right) \equiv dt_a. \tag{2.3.5}$$

Ez az egyetlen részecskére vonatkozó munkatétel.

A munkatételt könnyen általánosíthatjuk N részecskéből álló pontrendszerre. Írjuk fel az A nyílt rendszer valamennyi részecskéjére a munkatételt és adjuk össze ezeket az egyenleteket:

$$dT \equiv \sum_{a=1}^{N} dt_a = \sum_{a=1}^{N} d'W_a = d'W \tag{2.3.6}$$

ahol dT a rendszer teljes kinetikus energiájának megváltozása, $d'W$ pedig részletesen kiírva,

$$\begin{aligned} d'W &= \sum_{a=1}^{N} d'W_a = \sum_{a=1}^{N} \mathbf{F}_a \cdot \mathbf{v}_a dt \\ &= \sum_{a=1}^{N} (\mathbf{F}_a^{\mathrm{b}} + \mathbf{F}_a^{\mathrm{k}}) \cdot \mathbf{v}_a dt = \sum_{a=1}^{N} \mathbf{F}_a^{\mathrm{b}} \cdot \mathbf{v}_a dt + \sum_{a=1}^{N} \mathbf{F}_a^{\mathrm{k}} \cdot \mathbf{v}_a dt \\ &= d'W^{\mathrm{b}} + d'W^{\mathrm{k}}, \end{aligned} \tag{2.3.7}$$

azaz a rendszerben ható belső erők $d'W^{\mathrm{b}} = \sum_{a=1}^{N} \mathbf{F}_a^{\mathrm{b}} \cdot \mathbf{v}_a dt$ munkájának és a rendszerre ható külső erők $d'W^{\mathrm{k}} = \sum_{a=1}^{N} \mathbf{F}_a^{\mathrm{k}} \cdot \mathbf{v}_a dt$ munkájának az összege.

Általában a belső erők munkája nem zérus. Ez azt jelenti, hogy egy fizikailag zárt rendszer teljes kinetikus energiája változhat a belső erők munkája révén. Ha a részecskerendszer egy merevtest, amelyben bármely két részecske távolsága állandó, és a részecskék között ható erők párkölcsönhatásból származnak és centrálisak, akkor a belső erők munkája zérus.

Az utóbbi állítást beláthatjuk, ha figyelembe vesszük, hogy a belső erők munkájához bármely részecske-pár

$$\mathbf{F}_{b\to a} \cdot \mathbf{v}_a dt + \mathbf{F}_{a\to b} \cdot \mathbf{v}_b dt = \mathbf{F}_{b\to a} \cdot (\mathbf{v}_a - \mathbf{v}_b) dt = \mathbf{F}_{b\to a} \cdot d\mathbf{r}_{a,b} \tag{2.3.8}$$

járulékot ad. Ha az $r_{a,b}$ távolság állandó, akkor a relatív helyzetvektor $d\mathbf{r}_{a,b}$ megváltozásának merőlegesnek kell lennie az $\mathbf{r}_{a,b}$ relatív helyzetvektorra. Centrális erők esetén azonban $\mathbf{F}_{b\to a}$ párhuzamos a relatív helyzetvektorral, s így a relatív helyzetvektor megváltozása merőleges az erőre, azaz bármely részecskepár zérus járulékot ad a belső erők munkájához.

2.3.5 Konzervatív erők

Konzervatív külső erő munkája. **Az a részecskére ható $\mathbf{F}_a$ külső erőt konzervatív erőnek nevezzük, ha külső potenciáltér hozza létre:**

$$\mathbf{F}_a = -\frac{\partial V(\mathbf{r}_a)}{\partial \mathbf{r}_a}. \tag{2.3.1}$$

A konzervatív külső erő a potenciális energia negatív gradiense. **A tér (fizikai mező) által a részecskére kifejtett $\mathbf{F}_a$ erőnek a részecskén dt idő alatt végzett elemi munkája,**

$$d'W_a = \mathbf{F}_a \cdot d\mathbf{r}_a = -\frac{\partial V(\mathbf{r}_a)}{\partial \mathbf{r}_a} \cdot d\mathbf{r}_a = -dV(\mathbf{r}_a), \tag{2.3.2}$$

egyenlő a részecske potenciális energiája megváltozásának minusz egyszeresével.

Konzervatív erő munkája független az úttól. Tegyük fel, hogy egyetlen anyagi pont potenciális energiáját vizsgáljuk külső térben. A külső tér által a részecskére kifejtett erő $\mathbf{F} = -\frac{\partial V(\mathbf{r})}{\partial \mathbf{r}}$, s ennek elemi munkája:

$$d'W = -dV(\mathbf{r}) = -\frac{\partial V(\mathbf{r})}{\partial \mathbf{r}} d\mathbf{r}, \tag{2.3.3}$$

ha a részecske $d\mathbf{r}$ elmozdulást szenved. Fontos: a külső tér munkája szempontjából mindegy, hogy a részecske $d\mathbf{r}$ elmozdulását a külső tér által kifejtett erő mellett milyen további erők okozzák. Számoljuk ki a fizikai mező által a részecskére kifejtett erő munkáját, amíg a részecske a P pontból tetszőleges pálya mentén a Q pontba jut:

$$W_{P\to Q} = -\int_P^Q \frac{\partial V(\mathbf{r})}{\partial \mathbf{r}} d\mathbf{r} = -[V(\mathbf{r}_Q) - V(\mathbf{r}_P)]. \tag{2.3.4}$$

Az eredményből az alábbiakat állapíthatjuk meg:

1. Csak a részecske különböző térbeli pontokban felvett potenciális energiái közötti különbségeknek van fizikai jelentése, hiszen az erő is és a munkavégzés is a potenciális energia különböző térbeli pontokban vett értékeinek különbségétől függ csak. Ez egyúttal azt is jelenti, hogy csak a potenciálkülönbségeknek van fizikai jelentésük.

2. A kapott összefüggést tekinthetjük a potenciális energia mérési utasításának. Írjuk ehhez át az egyenletet az alábbi alakba:

$$V(\mathbf{r}_P) - V(\mathbf{r}_Q) = W_{P\to Q} \tag{2.3.5}$$

A részecske (Q ponthoz viszonyított) potenciális energiája a fizikai mező tetszőleges P pontjában egyenlő azzal a munkával, amit a tér végez

a részecskén, amíg a részecskét a P pontból elvisszük a Q vonatkoztatási pontba. Ezt az állítást „meg is lehet fordítani": A részecske (Q ponthoz viszonyított) potenciális energiája a tér tetszőleges P pontjában egyenlő azzal a munkával, amit a részecskén kell végeznünk, hogy kvázisztatikusan elvigyük a Q vonatkoztatási pontból a P pontba. Az utóbbi állításban azért kell kvázisztatikus mozgatásról beszélni, hogy az általunk kifejtett erő éppen egyenlő és ellentétes irányú legyen a tér által kifejtett erővel.

3. Látjuk, hogy ez a munkavégzés csak attól függ, hogy mennyi a részecske potenciális energiája a kezdeti P és a végső Q pontban. A konzervatív erő munkája tehát nem függ attól, hogy a részecske milyen pályagörbe mentén jutott a P pontból a Q pontba. **Konzervatív erő munkája független a mozgás pályájától.**

Erőtér konzervativitásának feltétele. A fizikai mezőt nem csak a potenciális energiával (potenciállal) lehet jellemezni, mint a hely függvényével, hanem azzal az erőtérrel (térerősség-mezővel) is, amelyet a potenciális energia (potenciál) negatív gradienseként kapunk. A matematikában van egy tétel, amely kimondja, hogy

- egy tetszőleges $-\phi(\mathbf{r})$ skalármező $\mathbf{E}(\mathbf{r}) = -\frac{\partial\phi(\mathbf{r})}{\partial\mathbf{r}}$ gradiensének rotációja mindig zérus,
$$\mathrm{rot}\ \frac{\partial\phi(\mathbf{r})}{\partial\mathbf{r}} = 0 \tag{2.3.6}$$
- és, hogy ha egy tetszőleges $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ vektormező rotációja zérus,
$$\mathrm{rot}_i\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \sum_{j,k=1}^{3} \epsilon_{ijk}\frac{\partial E_k}{\partial r_j} = 0, \qquad (i = 1, 2, 3), \tag{2.3.7}$$
akkor mindig létezik olyan $-\phi(\mathbf{r})$ skalármező, amelynek gradienseként az $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ vektormező előállítható.

Tetszőleges $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ vektormező rotációján olyan rot $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ vektormezőt értünk, amelynek Descartes-komponensei:

$$\mathrm{rot}_i\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \left(\frac{\partial}{\partial\mathbf{r}} \times \mathbf{E}\right)_i = \sum_{j,k=1}^{3} \epsilon_{ijk}\frac{\partial E_k}{\partial r_j}, \qquad i = 1, 2, 3. \tag{2.3.8}$$

A tételt a konzervatív fizikai mező potenciáljára és erőterére alkalmazva mondhatjuk, hogy **annak a szükséges és elégséges feltétele, hogy az $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ erőtér konzervatív legyen, az hogy az $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ vektormező rotációja azonosan eltűnjön, azaz rot $\mathbf{E}(\mathbf{r}) = 0$ legyen az egész térben. Az erőtér által a részecskén végzett munka ekkor és csak ekkor független az úttól.**

Részecske energiájának megmaradása konzervatív erőtérben. Vizsgáljuk egy részecske mozgását külső potenciáltérben, hogy lássuk, mit őriz meg, mit konzervál a konzervatív erő. A részecske Lagrange-függvénye:

$$L = \frac{1}{2}m\mathbf{v}^2 - V(\mathbf{r}). \tag{2.3.9}$$

Mivel a részecskére csak a konzervatív $\mathbf{F} = -\frac{\partial V(\mathbf{r})}{\partial \mathbf{r}}$ erő hat, más erő nem, ezért ezen erő $d'W$ elemi munkája egyúttal a részecske kinetikus energiájának dT megváltozásával is egyenlő a munkatétel értelmében. Következésképpen:

$$d'W = dT = -dV, \tag{2.3.10}$$

azaz

$$0 = dT + dV = d(T + V) = dE. \tag{2.3.11}$$

Tehát **konzervatív erőtérben mozgó részecske energiája (kinetikus és potenciális energiájának az összege) állandó marad a mozgás során. Ez az energiamegmaradás törvénye konzervatív erőtérben mozgó részecskére.** A konzervatív erő tehát az energiát őrzi meg.

Konzervatív belső erők munkája. Tegyük fel, hogy az a (ill. a b) részecske által a b (ill. az a) részecskére kifejtett erő potenciális energiából származtatható, amely csak a két részecske $\mathbf{r}_{a,b} = \mathbf{r}_a - \mathbf{r}_b$ relatív helyzetvektorától függ. Ekkor a Lagrange-függvény kölcsönhatási tagjához az a, b részecskepár járuléka $-V_{a,b}(\mathbf{r}_{a,b})$ alakú. Egyszerűség kedvéért valamennyi részecskepár között ugyanolyan kölcsönhatást, ugyanazt az erőtörvényt fogjuk feltételezni. Ezért elhagyjuk az $V_{a,b}$ potenciális energia a, b alsó indexét. **Megállapodás szerint azt fogjuk mondani, hogy $V(\mathbf{r}_{a,b})$ az a potenciális energia, amivel az a (ill. a b) részecske rendelkezik a b (az a) részecske jelenlétében.** Azt is fogjuk mondani, hogy az a (ill. a b) részecske potenciálteret kelt, amelyben a b (ill. az a) részecskének potenciális energiája van. **A potenciális energiából származtatható erőt konzervatív erőnek nevezzük.** Láttuk, hogy a b részecske által az a részecskére kifejtett erő erőtörvényét a $V(\mathbf{r}_{a,b})$ potenciális energia meghatározza:

$$\mathbf{F}_{b\to a} = -\frac{\partial V(\mathbf{r}_{a,b})}{\partial \mathbf{r}_{a,b}} = -\frac{\partial V(\mathbf{r}_{a,b})}{\partial \mathbf{r}_a}. \tag{2.3.12}$$

Az a részecskére ható erő tehát a potenciális energiának az a részecske helyzetvektora szerinti negatív gradiense. Rövidebben, az erő a potenciális energia negatív gradiense, ha származtatható potenciális energiából.

Számoljuk ki a b részecske által az a részecskére kifejtett $\mathbf{F}_{b\to a}$ erőnek az a részecskén végzett elemi munkáját:

$$d'W_{b\to a} = \mathbf{F}_{b\to a} \cdot d\mathbf{r}_a = -\frac{\partial V(\mathbf{r}_{a,b})}{\partial \mathbf{r}_a} \cdot d\mathbf{r}_a. \tag{2.3.13}$$

Hasonlóan, a a részecske által a b részecskén végzett elemi munka ugyanazon dt idő alatt

$$d'W_{a\to b} = -\frac{\partial V(\mathbf{r}_{a,b})}{\partial \mathbf{r}_b} \cdot d\mathbf{r}_b = \frac{\partial V(\mathbf{r}_{a,b})}{\partial \mathbf{r}_a} \cdot d\mathbf{r}_b. \tag{2.3.14}$$

Az (a, b) két-részecskés rendszerben a konzervatív belső erők elemi munkája tehát:

$$d'W_{b\to a} + d'W_{a\to b} = -\frac{\partial V(\mathbf{r}_{a,b})}{\partial \mathbf{r}_{a,b}} \cdot d\mathbf{r}_{a,b}, \tag{2.3.15}$$

azaz egyenlő a részecskepár potenciális energiája megváltozásának negatívjával.

Az egyes részecskepárokra vonatkozó ilyen típusú egyenleteket összeadva azt kapjuk, hogy konzervatív belső erők munkája egyenlő a részecske rendszer belső kölcsönhatásokból származó V^{b} potenciális energiája megváltozásának mínusz egyszeresével: $d'W^{\mathrm{b}} = -dV^{\mathrm{b}}$. Ha nincsenek külső erők jelen, akkor tehát

$$dT = d'W^{\mathrm{b}} = -dV^{\mathrm{b}}, \qquad dT + dV^{\mathrm{b}} = 0, \tag{2.3.16}$$

azaz a konzervatív rendszer energiája (kinetikus energiájának és belső kölcsönhatásokból származó potenciális energiájának összege) állandó. Ez nem más, mint speciális esete az energia megmaradása (szigorú értelemben) zárt rendszerre vonatkozó törvényének. Utóbbi akkor is igaz, ha az erők nem konzervatívak.

2.3.6 Az energiamegmaradás potenciáltérben mozgó rendszerre vonatkozó törvénye

Tegyük fel, hogy olyan N részecskés rendszert vizsgálunk, amely csak konzervatív külső erőknek van alávetve. Ekkor a rendszer teljes energiája

$$\begin{aligned} E &= \sum_{a=1}^{N} \mathbf{p}_a \cdot \mathbf{v}_a - L(\mathbf{r}_1, \ldots, \mathbf{v}_1, \ldots) = \sum_{a=1}^{N} \mathbf{p}_a \cdot \mathbf{v}_a - \sum_{a=1}^{N} \frac{1}{2} m_a \mathbf{v}_a^2 + V^{\mathrm{b}} + V^{\mathrm{k}} \\ &= \sum_{a=1}^{N} \frac{1}{2} m_a \mathbf{v}_a^2 + V^{\mathrm{b}} + V^{\mathrm{k}} = T + V^{\mathrm{b}} + V^{\mathrm{k}}, \end{aligned} \tag{2.3.1}$$

ahol a rendszer potenciális energiája a részecskéi közötti kölcsönhatásból származó

$$V^{\mathrm{b}} = \sum_{a=1}^{N} \sum_{b>a}^{N} V_{a,b} \tag{2.3.2}$$

potenciális energia és a részecskéinek a külső térrel való kölcsönhatásából származó

$$V^{\mathrm{k}} = \sum_{a=1}^{N} V_a \tag{2.3.3}$$

potenciális energiának az összege. A rendszer teljes energiája megmarad, mert a Lagrange-függvény nem függ az időtől explicit módon, s így a hatás invariáns az időbeli eltolással szemben. Tehát a rendszer energiájának tetszőleges dt idő alatt bekövetkező megváltozása zérus:

$$0 = dE = dT + dV^{\mathrm{b}} + dV^{\mathrm{k}}. \tag{2.3.4}$$

Tehát konzervatív külső térben mozgó rendszer kinetikus és teljes potenciális energiájának összege állandó a mozgás során. Ez az energia megmaradásának a külső potenciáltérben mozgó rendszerre érvényes törvénye.

2.3.7 Nyílt rendszer energiamérlege. Az első főtétel

Tegyük fel, hogy az A test kölcsönhat a B környezetével, de a külső erők és a külső forgatónyomatékok összege egyaránt zérus. Ekkor az A rendszer K tömegközépponti rendszere inerciarendszer. Tegyük fel továbbá, hogy a belső erők az A rendszerben centrálisak, és hogy az A rendszernek a tömegközéppontra vonatkoztatott impulzusmomentuma nulla (az A rendszer, mint egész, nem forog).

Írjuk fel az A rendszerre a munkatételt a K tömegközépponti rendszerben. A munkatétel értelmében az A test energiájának dt idő alatt bekövetkezett megváltozása egyenlő a rendszerben ható belső erők munkájának és a rendszerre ható külső erők munkájának az összegével:

$$dT = d'W^{\mathrm{b}} + d'W^{\mathrm{k}}. \tag{2.3.1}$$

A centrális (tehát konzervatív) belső erők munkája:

$$d'W^{\mathrm{b}} = -d\Big(\sum_{a=1}^{N}\sum_{b>a}^{N} V(r_{a,b})\Big). \tag{2.3.2}$$

Ekkor értelmezhetjük a K inerciális tömegközépponti rendszerben (a nem forgó) A rendszer U_A **,,belső energiáját"**, mint kinetikus és belső, kölcsönhatási potenciális energiájának az összegét:

$$U_A = T + \sum_{a=1}^{N}\sum_{b>a}^{N} V(r_{a,b}). \tag{2.3.3}$$

A munkatétel így az alábbi alakba írható:

$$dU_A = dT + d\Big(\sum_{a=1}^{N}\sum_{b>a}^{N} V(r_{a,b})\Big) = dT - d'W^{\mathrm{b}} = d'W^{\mathrm{k}}. \tag{2.3.4}$$

Azaz az A nyílt rendszer ,,belső" energiájának megváltozása egyenlő a külső erőknek az A rendszeren végzett munkájával. Ha nincsenek jelen rendezett külső erők, akkor a külső erők munkája rendezetlen munkavégzés, $d'W^{\mathrm{k}} = d'W^{\mathrm{k}}_{\mathrm{rendezetlen}}$. **A rendezetlen külső erők munkavégzését hőközlésnek nevezzük, és a rendezetlen külső erőknek a rendszeren végzett pozitív ill. negatív munkáját a környezet által a rendszerrel közölt hőnek, ill. a rendszer által a környezetnek leadott hőnek nevezzük. A szokásos jelölés**

$$d'W^{\mathrm{k}}_{\mathrm{rendezetlen}} = d'Q, \tag{2.3.5}$$

ahol $d'Q$ a környezet által a rendszernek átadott (előjeles) hő (hőmennyiség). Azt a környezetet, amely csak rendezetlen munkavégzés révén tud energiát átadni a nyílt rendszernek, hőtartálynak nevezzük. A hőközléssel járó folyamatok törvényszerűségeinek vizsgálatával a statisztikus fizika ill. a termodinamika foglalkozik. A munkatétel fenti alakja azt állítja, hogy a hőtartályba helyezett rendszer belső energiájának megváltozása egyenlő (a hőtartály által) a rendszerrel közölt hővel, ha nincsenek jelen rendezett külső erők. Ha rendezett külső erők is vannak jelen, akkor azok munkáját is figyelembe kell venni a munkatételben, azaz a külső erők munkája a hőközlés és a rendezett külső erők $d'W^{\mathrm{k}}_{\mathrm{rendezett}}$ munkájának összege,

$$d'W^{\mathrm{k}} = d'W^{\mathrm{k}}_{\mathrm{rendezetlen}} + d'W^{\mathrm{k}}_{\mathrm{rendezett}} = d'Q + d'W^{\mathrm{k}}_{\mathrm{rendezett}}. \tag{2.3.6}$$

A nyílt rendszerre vonatkozó munkatétel így az alábbi alakot ölti,

$$dU_A = d'Q + d'W^{\mathrm{k}}_{\mathrm{rendezett}}. \tag{2.3.7}$$

Az A rendszer belső energiájának megváltozása egyenlő a rendszerrel közölt hőnek és a rendezett külső erőknek a rendszeren végzett munkája összegével. Ez a nyílt rendszerek dinamikai folyamataira érvényes első főtétel, ami egy nyugvó ($\mathbf{P} = 0$) és nem forgó ($\mathbf{L} = 0$) nyílt rendszer energiamérlegének legáltalánosabb alakban megfogalmazott egyenlete.

2.4 A Hamilton-egyenletek

Ebben a fejezetben megmutatjuk, hogy a mechanikai rendszerek mozgásegyenletei ekvivalens módon megfogalmazhatók mind a Lagrange-függvény, mind a Hamilton-függvény alapján. Párhuzamot vonunk a kétféle leírásmód között és röviden elmondjuk, hogyan lehet a klasszikus mechanikát úgy általánosítani, hogy megkapjuk a kvantummechanikát.

2.4.1 Legendre-transzformáció

A bevezetett Hamilton-függvény és a Lagrange-függvény érdekes matematikai kapcsolatban állnak egymással. A Hamilton-függvény

$$H(q,p) = \sum_{i=1}^{s} p_i \dot{q}_i - L(q,\dot{q}) \tag{2.4.1}$$

definíciója és az általános impulzus

$$p_i = \frac{\partial L(q,\dot{q})}{\partial \dot{q}_i} \tag{2.4.2}$$

definíciója együtt a matematikában a Legendre-transzformáció elnevezésre hallgat. Ennek eredménye, hogy az L Lagrange-függvényből Legendre-transzformációval kapott H Hamilton-függvény csak az általános koordináták és a megfelelő általános impulzusok függvénye,

$$H = H(q_i, p_i) \tag{2.4.3}$$

és az általános sebességek kifejezhetők a

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i} \tag{2.4.4}$$

alakban.

A bizonyítást végezzük el $s = 1$ szabadsági fokú rendszerre. Ha feltesszük, hogy a Lagrange-függvény az általános sebességnek konvex függvénye, akkor az általános impulzust definiáló

$$p = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \equiv p(q,\dot{q}) \tag{2.4.5}$$

egyenlet invertálható az általános sebességre, azaz létezik a

$$\dot{q} \equiv f(q,p) \tag{2.4.6}$$

függvény, amit behelyettesítve H definíciójába, látjuk, hogy a Hamilton-függvény kifejezhető csak a q és p változókkal: $H \equiv H(q,p)$.

A Hamilton-függvénynek az általános koordinátákkal és a nekik megfelelő általános impulzusokkal kifejezett alakját a Hamilton-függvény kanonikus alakjának nevezzük. Az egyes általános koordinátákhoz tartozó általános impulzusokat pedig az adott általános koordinátához kanonikusan konjugált impulzusnak nevezzük.

A bizonyításból még az van hátra, hogy megmutassuk, az általános sebesség a Hamilton-függvény p szerinti parciális deriváltja.

$$\frac{\partial H}{\partial p} = \frac{\partial}{\partial p}\Big(pf(q,p) - L(q, f(q,p))\Big) = \dot{q} + p\frac{\partial f}{\partial p} - \frac{\partial L}{\partial f}\frac{\partial f}{\partial p} \tag{2.4.7}$$

Itt a két utolsó tag a kanonikusan konjugált impulzus definíciója értelmében kiejti egymást, és megkapjuk a keresett

$$\frac{\partial H}{\partial p} = \dot{q} \tag{2.4.8}$$

összefüggést.

2.4.2 A Hamilton-féle mozgásegyenletek

Képezzük az i-edik általános impulzus idő szerinti első deriváltját. Az Euler-Lagrange mozgásegyenleteket is felhasználva:

$$\begin{aligned} \dot{p}_i &= \frac{d}{dt}\frac{\partial L(q,\dot{q})}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial L(q,\dot{q})}{\partial q_i} \\ &= -\frac{\partial H(q,p)}{\partial q_i} - \sum_{j=1}^{s} \frac{\partial H(q,p)}{\partial p_j}\frac{\partial p_j(q,\dot{q})}{\partial q_i} + \sum_{j=1}^{s}\frac{\partial p_j(q,\dot{q})}{\partial q_i}\dot{q}_j = -\frac{\partial H(q,p)}{\partial q_i}. \end{aligned} \tag{2.4.1}$$

Fontos: ügyeljünk arra, hogy a parciális deriválásokat mindig úgy kell elvégezni valamelyik változó szerint, hogy *a függvény argumentumában szereplő* többi változó maradjon rögzített értéken! A (2.4.4) és (2.4.1) egyenletek rendszere együttesen alkotják a mechanikai rendszer úgynevezett Hamilton-féle mozgásegyenleteit:

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H(q,p)}{\partial p_i}, \qquad \dot{p}_i = -\frac{\partial H(q,p)}{\partial q_i}, \qquad i = 1, 2, \ldots, s \tag{2.4.2}$$

Látjuk, hogy ezek az egyenletek egyértelműen következnek az Euler-Lagrange-egyenletekből. Valójában ennél több is igaz. **Az Euler-Lagrange-féle és a Hamilton-féle mozgásegyenletek ekvivalensek.** A mozgás két, különböző lehetséges leírását jelentik.

Valóban, induljunk ki a Hamilton-egyenletekből és mutassuk meg, hogy következnek belőlük az Euler-Lagrange-féle mozgásegyenletek.

Először megmutatjuk, hogy ha a Lagrange-függvény konvex az általános sebességekben, akkor a Hamilton-függvény konvex az általános impulzusokban. Ehhez elegendő belátni, hogy a második deriváltak mátrixai egymás inverzei:

$$\sum_{j=1}^{s} \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_i \partial \dot{q}_j}\frac{\partial^2 H}{\partial p_j \partial p_k} = \delta_{i,k}. \tag{2.4.3}$$

Képezzük ehhez az alábbi triviális deriváltat:

$$\delta_{i,k} = \frac{\partial p_i}{\partial p_k} = \frac{\partial}{\partial p_k}\left.\frac{\partial L(q,\dot{q})}{\partial \dot{q}_i}\right|_{\dot{q}=\dot{q}(q,p)} = \sum_{j=1}^{s}\frac{\partial}{\partial \dot{q}_j}\frac{\partial L(q,\dot{q})}{\partial \dot{q}_i}\frac{\partial \dot{q}_j}{\partial p_k} = \sum_{j=1}^{s}\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_i \partial \dot{q}_j}\frac{\partial}{\partial p_k}\frac{\partial H}{\partial p_j}. \tag{2.4.4}$$

Ez éppen a keresett reláció. Ha mármost adott a Hamilton-függvény és az impulzus-változókban konvex, akkor az általános sebességeket definiáló (2.4.4) egyenletek kölcsönösen egyértelműen feloldhatók az általános impulzusokra, mint az általános sebességek függvényeire: $p_i = p_i(q, \dot{q})$. Utóbbit behelyettesítve a Lagrange-függvényt meghatározó $L = \sum_{j=1}^{s} p_j \dot{q}_j - H$ kifejezés jobb oldalába, megkapjuk a Lagrange-függvényt mint a $q, \dot{q}$ változók függvényét. Közvetett deriválással meggyőződhetünk róla, hogy a végrehajtott inverz Legendre-transzformáció, amelyet a (2.4.1) és (2.4.4) egyenletek határoznak meg, maga után vonja a (2.4.2) egyenletek fennállását:

$$\frac{\partial L(q,\dot q)}{\partial \dot q_i} = p_i - \sum_{j=1}^{s} \frac{\partial H}{\partial p_j}\frac{\partial p_j}{\partial \dot q_i} + \sum_{j=1}^{s} \frac{\partial p_j}{\partial \dot q_i}\dot q_j = p_i. \tag{2.4.5}$$

Ezután számoljuk ki H segítségével az alábbi deriváltat:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\frac{\partial L(q,\dot q)}{\partial \dot q_i} = \dot p_i &= -\frac{\partial H(q,p)}{\partial q_i} = \frac{\partial}{\partial q_i}\left(L(q,\dot q(q,p)) - \sum_{j=1}^{s} p_j \dot q_j\right) \\
&= \frac{\partial L(q,\dot q)}{\partial q_i} + \sum_{j=1}^{s} \frac{\partial L(q,\dot q)}{\partial \dot q_j}\frac{\partial \dot q_j(q,p)}{\partial q_i} - \sum_{j=1}^{s} p_j \frac{\partial \dot q_j(q,p)}{\partial q_i} \\
&= \frac{\partial L(q,\dot q)}{\partial q_i}.
\end{aligned} \tag{2.4.6}$$

Tehát a Hamilton-egyenletekből kiindulva megkaptuk az Euler-Lagrange-féle mozgásegyenleteket.

Érdemes párhuzamot vonni a kétféle, de egymással ekvivalens leírásmód között.

Lagrange-függvény $L(q,\dot q)$ $L = \sum_i p_i \dot q_i - H(q,p)$	Hamilton-függvény $H(q,p)$ $H = \sum_i p_i \dot q_i - L(q,\dot q)$
Euler-Lagrange-egyenletek $\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot q_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0$ s darab közönséges, másodrendű diff.egy.	Hamilton-egyenletek $\dot q_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \dot p_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}$ $2s$ darab közönséges, elsőrendű diff.egy.
Mechanikai állapot $2s$ adat $(q_1,\ldots,q_s,\dot q_1,\ldots \dot q_s)$ $t=t_0$-ban	Mechanikai állapot $2s$ adat $(q_1,\ldots,q_s,p_1,\ldots,p_s)$ $t=t_0$-ban

Fázistér. Fázistrajektória. A Hamilton-egyenletek megoldása adott kezdőfeltételek esetén egyértelmű: $q_i(t), p_i(t)$ $(i=1,2,\ldots,s)$. Adott pillanatban a megoldás ábrázolható a $2s$ dimenziós állapottér pontjaként. Képzeljünk el egy $2s$ dimenziós derékszögű koordinátarendszert, amelynek tengelyeire az egyes általános koordináták és impulzusok értékeit mérjük fel. Az így kapott ponthalmaz **a mechanikai rendszer fázistere. A fázistérben a mechanikai rendszer minden egyes állapotának egy pont felel meg.** A rendszer állapottere lehet szűkebb mint a fázistér, mert esetleg a koordináták és az impulzusok nem vehetnek fel $-\infty$ és ∞ között minden értéket. A mozgásegyenletek adott kezdőfeltétele tehát egy pont a fázistérben, ami egyúttal a lehetséges állapotok halmazának is pontja. A mozgásegyenletek megoldása pedig megadja, hogy a fizikai rendszer állapotát ábrázoló pont hogyan mozog a fázistérben, ahogy az idő múlik és a rendszer állapota változik. A megoldást ábrázoló görbét nevezzük **fázistrajektóriának.**

2.4.3 Irány: a kvantummechanika

Kérdezhetnénk, hogy mi értelme volt egész fáradozásunknak, ha a mechanikai mozgások kapott Hamiltoni leírása egyenértékű a Lagrange-függvényen alapuló leírással. Az egyik haszon technikai jellegű. Numerikusan egyszerűbb elsőfokú közönséges differenciálegyenletek rendszerét megoldani, mint az ekvivalens másodfokú differenciálegyenletek rendszerét.

Van azonban egy további nagy nyereség a fizika szempontjából. A Hamilton-egyenletek, pontosabban azoknak egy kicsit ügyesebb alakba történő átírása, a mozgásnak olyan tárgyalását adják, amely alkalmas az általánosításra. Nevezetesen, ezeket az egyenleteket lehetett - nem kis intuicióval - úgy általánosítani, hogy a mikrovilág részecskéinek mozgását is leíró fizikai elméletet nyerjünk: a kvantummechanikát. Az út a kvantummechanikához a Hamiltoni egyenletek Poisson-zárójelek segítségével történő átírásán, majd a Poisson-zárójeleknek kommutátorokként, azaz operátor-relációkként való értelmezésén át vezetett.

A Hamilton-egyenletek segítségével tetszőleges $f(q,p)$ fizikai mennyiség időbeli változása

$$\frac{df(q(t),p(t))}{dt}=\sum_{i=1}^{s}\Big[\frac{\partial f}{\partial q_i}\dot{q}_i+\frac{\partial f}{\partial p_i}\dot{p}_i\Big]=\sum_{i=1}^{s}\Big[\frac{\partial f}{\partial q_i}\frac{\partial H}{\partial p_i}-\frac{\partial f}{\partial p_i}\frac{\partial H}{\partial q_i}\Big]. \tag{2.4.1}$$

alakba írható. Vezessük be tetszőleges $f(q,p)$ és $g(q,p)$ fizikai mennyiségek **Poisson-zárójelét** az alábbi definícióval:

$$\{f,g\}_P=\sum_{i=1}^{s}\Big[\frac{\partial f}{\partial q_i}\frac{\partial g}{\partial p_i}-\frac{\partial f}{\partial p_i}\frac{\partial g}{\partial q_i}\Big]. \tag{2.4.2}$$

Ekkor triviálisan a legegyszerűbb Poisson-zárójelek:

$$\{q_i,q_j\}_P=\{p_i,p_j\}_P=0,\qquad \{q_i,p_j\}_P=\delta_{i,j}. \tag{2.4.3}$$

A fizikai mennyiségekre vonatkozó mozgásegyenletek pedig mind:

$$\frac{df}{dt}=\{f,H\}_P. \tag{2.4.4}$$

alakot öltenek (ha f nem függ explicit módon is az időtől). Ez mutatja, hogy a dinamikát teljes egészében a Hamilton-függvény határozza meg. A fenti mozgásegyenletek között maguk a Hamilton-egyenletek is ott vannak:

$$\dot{q}_i=\{q_i,H\}_P=\frac{\partial H}{\partial p_i},\qquad \dot{p}_i=\{p_i,H\}_P=-\frac{\partial H}{\partial q_i}. \tag{2.4.5}$$

Az f (időtől explicit módon nem függő) fizikai mennyiség akkor és csak akkor mozgásállandó, ha rá $\{f,H\}_P=0$, azaz ha a Hamilton-függvénnyel képezett Poisson-zárójele eltűnik. A mechanika ilyen megfogalmazásának számos további szépsége van. Az talán a legfontosabb, hogy a mozgásegyenletek alakja nem kötődik az általános koordináták és a hozzájuk kanonikusan konjugált impulzusok valamilyen speciális megválasztásához. Végtelen sok olyan ún. kanonikus transzformáció létezik, amellyel a régi koordinátákból és impulzusokból olyan újakra lehet áttérni, amelyekben a mozgásegyenletek alakja változatlan marad.

A **kvantummechanika** irányában történő általánosítást Heisenberg tette meg. Feltette, hogy

1. a fizikai mennyiségeknek, így maguknak a koordinátáknak és az impulzusoknak is operátorokat kell megfeleltetni, amelyek a rendszer állapotainak terén hatnak,

2. ezek az operátorok úgy vannak értelmezve, hogy a megfelelő Poisson-zárójeleket kommutátorokra kell cserélni,

$$\{\ldots,\ldots\}\to\frac{1}{i\hbar}[\ldots,\ldots] \tag{2.4.6}$$

és a Descartes-féle koordináták és impulzuskomponensek operátorai között

$$[\hat{q}_i, \hat{q}_j] = [\hat{p}_i, \hat{p}_j] = 0, \qquad [\hat{q}_i, \hat{p}_j] = i\hbar\delta_{i,j} \tag{2.4.7}$$

relációkat kell kiróni. Itt $\hbar = \frac{h}{2\pi}$, ahol h a Planck-állandó, és tetszőleges $\hat{f}$ és $\hat{g}$ operátorok kommutátorát az

$$[\hat{f}, \hat{g}] = \hat{f}\hat{g} - \hat{g}\hat{f} \tag{2.4.8}$$

összefüggés definiálja.

Ekkor a Hamilton-függvényből is az állapotok terén ható operátor, Hamilton operátor lesz: $\hat{H} = H(\hat{q}, \hat{p})$. A mozgásegyenletek pedig tetszőleges fizikai mennyiség operátorára a

$$\frac{d\hat{f}}{dt} = \frac{1}{i\hbar}[\hat{f}, \hat{H}] \tag{2.4.9}$$

operátor-egyenlet alakját öltik. A fizikai mennyiségek lehetséges értékeit a hozzájuk tartozó operátorok sajátértékei jelentik.

Az elmélet kifejlesztése és a tapasztalattal való összevetése révén bebizonyosodott, hogy az így kapott kvantummechanika a mikrorészecskék (elektronok, atomok, molekulák, stb.) helyes elmélete. Sőt, azt is sikerült megmutatni, hogy a kvantummechanika speciális esetként tartalmazza a klasszikus mechanikát.

2.5 Speciális mechanikai rendszerek

Alább néhány speciális mechanikai rendszer mozgását vizsgáljuk meg. A példákat, a teljesség igénye nélkül, igyekeztünk úgy kiválasztani, hogy azok egyrészt fontos, gyakorlati jelentőséggel bíró mechanikai rendszereket ismertetnek, másrészt olyan idealizált rendszerekre vonatkoznak, amelyek bonyolult jelenségek egyszerű mechanikai modelljeiként gyakran használatosak a fizikában.

2.5.1 Szabadesés. Hajítás

Szabadesésről akkor beszélünk, ha egy test, példánkban az egyszerűség kedvéért részecske, a Föld gravitációs vonzásának hatására, a Föld felszínének közeléből valamekkora magasságból leesik. Szabadon esik le, így mondjuk, ha a Föld gravitációs erején kívül semmilyen más erő nem hat rá. A Föld felszínének egy kiszemelt pontja kicsiny környezetében, a felszín vízszintes síknak tekinthető. A Newton-féle, a Föld középpontja felé mutató

$$F_r = -\gamma \frac{M_s m_s}{R+r} \approx -\gamma \frac{M_s m_s}{R} + \mathcal{O}(\frac{r}{R}) \tag{2.5.1}$$

gravitációs erő, amely egy a középponttól $R{+}r$ távolságra levő m_s súlyos tömegű részecskére hat, pedig közelítőleg állandónak tekinthető nagyság és irány szerint a Földfelszín kiszemelt pontjának kicsiny környezetében (R a Föld sugara, M_s a Föld súlyos tömege). Ezért a Föld felszínéhez rögzített Descartes-féle koordinátarendszerben, amelynek z tengelyét függőlegesen felfelé irányítjuk, írhatjuk, hogy a nehézségi erő:

$$F_z = -m_s \frac{\gamma M_s}{R} \equiv -m_s g, \tag{2.5.2}$$

ahol $g = \frac{\gamma M_s}{R}$ a Föld által okozott **nehézségi gyorsulás**, amely a Föld felszínének egy kiszemelt pontja (a Descartes koordinátarendszer origója) kicsiny környezetében közelítőleg állandó. Ez az erő származtatható az $V = m_s g z$ potenciális energiából: $-\frac{\partial V}{\partial z} = -m_s g$. A szabadon eső anyagi pont Lagrange-függvénye tehát:

$$L = \frac{1}{2} m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) - V(z) = \frac{1}{2} m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) - m_s g z. \tag{2.5.3}$$

Ez a Lagrange-függvény leírja az anyagi pont mozgását az $F_z = -mg$ nehézségi erő terében. A nehézségi erőtér konzervatív és homogén. A mozgás lehet **szabadesés, ha a részecske kezdősebessége függőleges** és lehet **ferde hajítás, ha a részecske kezdősebessége szöget zár be a függőlegessel.**

Az Euler-Lagrange-egyenletek felírásához szükségünk van a

$$\begin{aligned} &\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\dot{x}, \quad \frac{\partial L}{\partial \dot{y}} = m\dot{y}, \quad \frac{\partial L}{\partial \dot{z}} = m\dot{z}, \\ &F_x = \frac{\partial L}{\partial x} = 0, \quad F_y = \frac{\partial L}{\partial y} = 0, \quad F_z = \frac{\partial L}{\partial z} = -m_s g \end{aligned} \tag{2.5.4}$$

mennyiségekre. Segítségükkel:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial L}{\partial x} = 0, \quad &\Rightarrow \quad m\ddot{x} = 0, \\ \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{y}} - \frac{\partial L}{\partial y} = 0, \quad &\Rightarrow \quad m\ddot{y} = 0, \\ \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{z}} - \frac{\partial L}{\partial z} = 0, \quad &\Rightarrow \quad m\ddot{z} = -m_s g. \end{aligned} \tag{2.5.5}$$

Látjuk, hogy a különböző irányú mozgások szétcsatolódnak. A mozgás vetületeire független differenciálegyenleteket kaptunk. Az x- és az y-irányban a mozgás vetülete nagyon egyszerű, a megfelelő mozgásegyenleteket integrálva kapjuk, hogy

$$\dot{x} = v_{x0}, \quad \dot{y} = v_{y0},$$
$$x = v_{x0}(t - t_0) + x_0, \quad y = v_{y0}(t - t_0) + y_0, \tag{2.5.6}$$

ahol v_{x0}, v_{y0}, x_0 és y_0 rendre a részecske kezdeti sebességének és helyének megfelelő koordinátái a t_0 kezdeti időpillanatban. A z-irányú mozgás egyenlete:

$$\ddot{z} = -\frac{m_s}{m} g, \tag{2.5.7}$$

ami azt mondja, hogy egy anyagi pont gyorsulásának nagysága a nehézségi erőtérben arányos a test súlyos és tehetetlen tömegének hányadosával. **Fontos kísérleti tapasztalat, hogy vákuumban minden részecske ugyanazzal a gyorsulással esik szabadon. Ez akkor és csak akkor lehetséges, ha a súlyos és a tehetelen tömeg hányadosa minden részecskére ugyanaz az univerzális állandó. Ez a súlyos és tehetetlen tömeg ekvivalenciájának törvénye,** amelyet először Eötvös Loránd bizonyított be kísérletileg, nagy pontossággal. **Ha a kétféle tömeg hányadosa minden részecskére ugyanaz az univerzális állandó, akkor választhatjuk a súlyos tömeg egységét azonosnak a tehetetlen tömeg egységével és akkor mondhatjuk, hogy $m_s = m$ minden részecskére (és minden testre!).** A súlyos és a tehetetlen tömeg ekvivalenciáját figyelembe véve a mozgásegyenlet

$$\ddot{z} = -g \tag{2.5.8}$$

alakúra egyszerűsödik. Ezért mondjuk, hogy a g állandó a nehézségi gyorsulás: minden részecske ugyanazzal a g nagyságú gyorsulással esik szabadon a Föld felszínének közelében. A z-irányú mozgásra integrálással

$$\dot{z} = -g(t - t_0) + v_{z0}, \quad z = -\frac{1}{2} g (t - t_0)^2 + v_{z0}(t - t_0) + z_0 \tag{2.5.9}$$

adódik, ahol v_{z0} és z_0, rendre a t_0 kezdeti pillanatban a részecske z irányú sebessége és helykoordinátája.

Ugyanezeket az eredményeket kapjuk, ha a Hamilton-féle mozgásegyenleteket oldjuk meg. A Hamilton-függvény kanonikus alakja:

$$H = \mathbf{p} \cdot \mathbf{v} - L = \frac{p_x^2 + p_y^2 + p_z^2}{2m} + mgz \tag{2.5.10}$$

A mozgásegyenletek:

$$\dot{p}_x = -\frac{\partial H}{\partial x} = 0, \quad \dot{p}_y = -\frac{\partial H}{\partial y} = 0, \quad \dot{p}_z = -\frac{\partial H}{\partial z} = -mg,$$
$$\dot{x} = \frac{\partial H}{\partial p_x} = \frac{p_x}{m}, \quad \dot{y} = \frac{\partial H}{\partial p_y} = \frac{p_y}{m}, \quad \dot{z} = \frac{\partial H}{\partial p_z} = \frac{p_z}{m}. \tag{2.5.11}$$

A $\dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial r_i}$ $(i = 1, 2, 3)$ mozgásegyenletek közül az impulzus vízszintes, p_x és p_y összetevőire vonatkozóknak a megoldása helyett felhasználhatjuk, hogy a Lagrange-függvény és a Hamilton-függvény független a részecske x és y koordinátájától. Ez kifejezi, hogy a rendszer invariáns az x és az y-irányú eltolásokkal szemben. Ennek következtében az impulzus vízszintes komponensei megmaradnak: p_x =áll.= mv_{x0}, p_y =áll.= mv_{y0}. Ez megengedi, hogy koordinátarendszerünket a függőleges z-tengely körül úgy forgassuk el, hogy az impulzus y-irányú összetevője nulla legyen: $p_y = mv_{y0} = 0$. Ekkor az $\dot{y}$-ra vonatkozó egyenletből $y = y_0$ adódik. Eltolhatjuk a koordinátarendszerünket úgy, hogy a részecske tartózkodási helyének vízszintes koordinátái a t_0 kezdeti pillanatban $x_0 = y_0 = 0$ legyenek. Ekkor $y = 0$ marad a mozgás során, azaz a mozgás az (x, z)-síkban zajlik le. A részecske az x-irányban egyenesvonalú egyenletes mozgást végez:

$$\dot{x} = v_{x0}, \qquad x = v_{x0}(t - t_0), \tag{2.5.12}$$

a függőleges z irányban pedig egyenesvonalú egyenletesen gyorsuló mozgást,

$$\dot{p}_z = -mg, \qquad p_z = -mg(t - t_0) + p_{z0} = m\Big[v_{z0} - g(t - t_0)\Big],$$

$$\dot{z} = \frac{p_z}{m} = v_{z0} - g(t - t_0), \qquad z = -\frac{1}{2}g(t - t_0)^2 + v_{z0}(t - t_0) + z_0, \tag{2.5.13}$$

ahol v_{z0} és z_0 a részecske kezdeti z-irányú sebessége és kezdeti z-koordinátája a t_0 időpillanatban. Behelyettesítéssel meggyőződhetünk róla, hogy a részecske kinetikus és potenciális energiájának összege állandó (az energia megmaradásának törvénye konzervatív erőtérben mozgó anyagi pont esetén):

$$\begin{aligned}
E &= H\Big(x(t), y(t), z(t), p_x(t), p_y(t), p_z(t)\Big) = \frac{p_x^2(t) + p_y^2(t) + p_z^2(t)}{2m} + mgz(t) \\
&= \frac{p_{x0}^2(t)}{2m} + \frac{p_{y0}^2(t)}{2m} + \frac{\Big[p_{z0} - mg(t - t_0)\Big]^2}{2m} + mg\Big[-\frac{1}{2}g(t - t_0)^2 + \frac{p_{z0}}{m}(t - t_0)\Big] \\
&= \frac{\mathbf{p}_0^2}{2m} + mgz_0 = \text{ áll.}
\end{aligned} \tag{2.5.14}$$

A kapott megoldások birtokában a mozgással kapcsolatos bármilyen kérdés megválaszolható. Például határozzuk meg, hogy a kiindulási helyétől mért milyen L távolságra és mennyi T idő elteltével esik le a Föld felszínéről, $z_0 = 0$ magasságból eldobott kő. A választott speciális koordinátarendszerben a becsapódás helye: $x(t_0+T) = L$ és $z(t_0+T) = 0$, ahonnan

$$x(t_0 + T) = v_{x0}T = L, \qquad z(t_0 + T) = -\frac{1}{2}gT^2 + v_{z0}T = 0, \tag{2.5.15}$$

ill.

$$T = \frac{2v_{z0}}{g}, \qquad L = \frac{2v_{x0}v_{z0}}{g}. \tag{2.5.16}$$

A becsapódás sebessége pedig:

$$v_x(T) = v_{x0}, \qquad v_z(T) = v_{z0} - gT = -v_{z0}. \tag{2.5.17}$$

Látjuk, hogy a becsapódáskor a kő sebessége ugyanakkora, mint amikor eldobtuk, csak a függőleges komponensének az iránya változott ellentétesre. Az impulzus vízszintes komponensének megmaradása és az energia megmaradása alapján ennek valóban így kell lenni. A részecske kezdeti és végső potenciális energiája nulla, így kezdeti és végső kinetikus energiája megegyezik. A kinetikus energiának a vízszintes irányú mozgásból származó tagja változatlan a mozgás során az impulzus vízszintes komponensének megmaradása miatt. Ez azt jelenti, hogy a részecskének a függőleges irányú mozgásból származó kinetikus energiája kezdetben és a talajba való becsapódáskor megegyezik, ami azt is jelenti, hogy a sebességének függőleges komponense kezdetben és a becsapódáskor azonos nagyságú.

2.5.2 Lineáris harmonikus oszcillátor

A lineáris harmonikus oszcillátor az egyik legfontosabb mechanikai modell, amely a fizikában széleskörben alkalmazást nyer. Legegyszerűbb konkrét megvalósítása az $F_x = -Dx$ lineáris erőtörvényű, egyik végén rögzített, légpárnás asztalon elhelyezett, vízszintes rugóra erősített kicsiny (pontszerű) test kisrezgései, ahol x a rugó kitérése az egyensúlyi állapotához képest, az x-tengely vízszintes D a rugó visszatérítő ereje. Ez az modell használható azonban minden olyan egy-dimenziós mozgásra, amikor egy részecske a potenciális energia minimumhelye környezetében kis amplitudójú rezgéseket, ún. **kisrezgéseket** végez.

Tegyük fel, hogy a részecske $V(q)$ potenciális energiájának a q általános koordináta függvényében minimuma van a $q = q_0$ helyen, kinetikus energiája pedig $\frac{1}{2}a(q)\dot{q}^2$ alakú az általános koordinátával és sebességgel kifejezve. Ekkor a részecskének a legkisebb energiájú állapota az, amikor nem mozog, azaz $\dot{q} = 0$, hanem a potenciális energia minimumhelyén „ül" nyugalomban: $q(t) \equiv q_0$. Ha adunk a részecskének nagyon kis kezdeti sebességet, akkor kimozdul a q_0 egyensúlyi helyzetéből. Az energia megmaradásának törvénye miatt azonban kicsiny $\dot{q}_0$ kezdeti sebesség esetén $x \equiv q - q_0$ kitérésének nagysága legfeljebb akkora A értékű lehet, hogy kezdeti teljes kinetikus energiája potenciális energiává alakuljon:

$$\frac{1}{2}a(q_0)\dot{q}_0^2 = V(q_0 \pm A) - V(q_0) \approx \frac{1}{2}A^2 \left.\frac{d^2V}{dq^2}\right|_{q=q_0} + \mathcal{O}(A^3). \tag{2.5.1}$$

azaz kicsiny kezdősebesség esetén annyira kicsi marad a maximális kitérés, hogy a potenciális energia egyensúlyi helyzet körüli sorfejtésében szabad a legalacsonyabb el nem tűnő járuléknál megállni. Ha a részecske elérte ezt a maximális kitérést, akkor a sebessége éppen nullává válik és elkezd újra az egyensúlyi helyzete felé gyorsulni a potenciálból származó és mindig az egyensúlyi helyzet felé mutató erő hatására. A részecske tehát kis amplitudójú rezgéseket fog az egyensúlyi helyzete körül végezni. Az egyensúlyi helyzete körül kis ampliudójú rezgéseket végző részecske Lagrange-függvényét közelítőleg az alábbi alakba írhatjuk ($\dot{q} = \dot{x}$):

$$L = \frac{1}{2}a(q_0)\dot{x}^2 - \frac{1}{2}\left.\frac{d^2V}{dq^2}\right|_{q=q_0} x^2 + \mathcal{O}(x^3) \equiv \frac{1}{2}m\dot{x}^2 - \frac{1}{2}Dx^2 + \mathcal{O}(x^3) \tag{2.5.2}$$

ahol a kitérésben magasabb rendű tagokat elhanyagoljuk, ill. ugyancsak elhanyagoljuk az $a(q)$ együttható q-függéséből adódó magasabb rendű járulékokat. Így a Lagrange-függvény lényegében olyan alakú, mint egy m tehetetlen tömegű részecske Lagrange-függvénye, amelyik a $V(x) = \frac{1}{2}Dx^2$ harmonikus oszcillátor potenciálban mozog. **Az egy-dimenziós harmonikus oszcillátort nevezzük lineáris harmonikus oszcillátornak. A lineáris harmonikus oszcillátor mechanikai modellje minden olyan egy-dimenziós mozgásnak, amikor egy részecske egyensúlyi helyzete körül kisrezgéseket végez.** Ha a kitérések nagyobbak, akkor figyelembe kell venni a kitérésben harmad- vagy magasabb rendű tagokat is a potenciálban. Ekkor a modellt **anharmonikus oszcillátornak** nevezzük. Ezzel az esettel nem fogunk foglalkozni. A lineáris harmonikus oszcillátor még alá lehet vetve külső, az idő adott függvényeként változó, úgynevezett **gerjesztő erőnek.** Ekkor a Lagrange-függvénye:

$$L = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 - \frac{1}{2}Dx^2 + \mathcal{O}(x^3) + xf(t), \tag{2.5.3}$$

ahol $f(t)$ az idő adott függvénye. Képezzük a részecskére ható erőt:

$$F_x = \frac{\partial L}{\partial x} = -Dx + f(t), \tag{2.5.4}$$

és látjuk, hogy az részben a kitéréssel arányos, az egyensúlyi helyzet felé mutató erőnek, az úgynevezett **kvázielasztikus erőnek,** és a külső $f(t)$ gerjesztő erőnek az összege. A részecske impulzusának x komponense:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\dot{x}. \tag{2.5.5}$$

A részecske kitérését, mint az idő függvényét meghatározó Euler-Lagrange-egyenlet:

$$m\ddot{x} = -Dx + F(t). \tag{2.5.6}$$

Lineáris harmonikus oszcillátor szabad rezgései. Első lépésben tegyük fel, hogy nem hat gerjesztő erő. Ekkor a mozgásegyenlet az

$$\ddot{x} = -\omega_0^2 x, \quad \omega_0^2 = \frac{D}{m} > 0 \tag{2.5.7}$$

alakot ölti, amelynek megoldása ω_0 körfrekvenciájú harmonikus rezgő mozgás. Ezt már részletesen tárgyaltuk a 1.2.3 fejezetben. A differenciálegyenlet ún. homogén, közönséges másodrendő differenciálegyenlet, amelynek két lineárisan független megoldása van: $x_1 = \sin(\omega t)$ és $x_2 = \cos(\omega t)$. Az általános megoldás ezek lineáris kombinációja, $x(t) = A_1 x_1(t) + A_2 x_2(t) = A\cos(\omega t + \alpha)$ alakú ahol az A_1, A_2, ill. A és α állandókat a kezdőfeltételek határozzák meg.

Lineáris harmonikus oszcillátor kényszerrezgései. Oldjuk meg ezután a mozgásegyenletet periodikus külső gerjesztő erő, $f(t) \equiv \frac{F(t)}{m} = f_0 \cos(\omega t)$ esetén. Technikai fogás az $x(t)$ kitérést a $\xi(t)$ komplex változó valós részének tekinteni, $x(t) = \operatorname{Re} \xi(t)$, amelyre a

$$\ddot{\xi} = -\omega_0^2 \xi + f_0 e^{i\omega t} \tag{2.5.8}$$

egyenlet érvényes. Csakugyan, ha vesszük ezen egyenlet mindkét oldalának valós részét, akkor látjuk, hogy a komplex értékű függvényre felírt differenciálegyenlet megoldásának valós része az eredeti differenciálegyenlet megoldása. Ez azért van így, mert a (2.5.6) differenciálegyenlet a keresett $x(t)$ valós függvényt lineárisan tartalmazza. A (2.5.8) differenciálegyenlet inhomogén, mert van olyan („forrás-")tagja, amelyik nem tartalmazza a keresett $\xi(t)$ függvényt. Keressük a (2.5.8) egyenlet megoldását $\xi(t) = \xi_0 e^{i\lambda t}$ alakban. Ez akkor és csak akkor megoldás tetszőleges t esetén, ha a

$$\lambda = \omega, \quad \xi_0 = \frac{f_0}{\omega_0^2 - \lambda^2} \tag{2.5.9}$$

egyenlőségek teljesülnek. Ekkor a megoldás:

$$x(t) = \operatorname{Re} \xi(t) = \frac{f_0}{\omega_0^2 - \omega^2} \cos(\omega t). \tag{2.5.10}$$

A mozgás periodikus rezgő mozgás, amelynek körfrekvenciája megegyezik a gerjesztő erő körfrekvenciájával. A rezgések amplitudója erősen függ a gerjesztő erő körfrekvenciájától. Nevezetesen végtelenné válik, ha a gerjesztő erő frekvenciája megegyezik a szabad rezgések frekvenciájával. Ez a jelenség **a rezonancia jelensége.** Nyilván a rezgés amplitudójának végtelenné válása közelítéseink eredménye, a valóságban véges, de nagy amplitudóval jelenik meg a rezonancia.

Két közelítés is történt a valóságos rendszerekhez képest. Egyrészt, ha megnő a kitérés amplitudója, akkor a potenciálban az anharmonikusságot okozó magasabb rendű tagokat nem szabad figyelmen kívül hagyni. Másrészt, általában az oszcillátorok nem a vákuumban rezegnek, hanem valamilyen közegben, amely súrlódási erőt fejt ki a rezgő részecskére. Ekkor a rezgést csillapító **közegellenállási erő** következtében a kitérés még rezonancia esetén is viszonylag kicsi maradhat, úgyhogy a potenciális energia kvadratikus közelítése még megengedhető lehet. Ezt az utóbbi esetet vizsgáljuk most tovább. A közeg hatását modellezhetjük a részecske sebességével ellentétes irányú, sebességtől függő erővel, amelyik eltűnik, ha a sebesség zérus. A sebességfüggő közegellenállási erőt a sebesség szerint sorba fejtve, annak legalacsonyabb rendű tagja, $s_x = -\kappa \dot{x}$, ahol κ a közegre jellemző közegellenállási tényező. A mínusz előjel veszi figyelembe, hogy a közegellenállási erő ellentétes irányú a közegben mozgó részecske sebességével. A mozgásegyenlet ekkor így módosul:

$$m\ddot{x} = -Dx - \kappa\dot{x} + F(t). \tag{2.5.11}$$

Lagrange-függvényt most nem tudunk a részecskére felírni, mert az egy olyan nyílt rendszer, amely a közeg nagyon nagy számú, rendezetlen mozgást végző részecskéjével van kölcsönhatásban. A közegellenállási erő bevezetése helyettesíti közelítőleg azt a bonyolult tárgyalást, amikor a közeg részecskéinek mozgását is figyelembe vennénk.

Csillapított rezgés. Vegyük megint először a gerjesztő erőtől mentes rezgések esetét. A megfelelő komplex értékű $\xi(t)$ függvényre vonatkozó egyenlet:

$$\ddot{\xi} = -\omega_0^2 \xi - \gamma\dot{\xi}, \tag{2.5.12}$$

ahol $\gamma = \frac{\kappa}{m}$. Ez ismét homogén, közönséges másodrendű differenciálegyenlet, két lineárisan független megoldása van. Ezek alakja a csillapítási tényezőértékétől függően különböző: ismét $\xi = \xi_0 e^{i\lambda t}$ alakban keressük. Akkor és csak akkor kapunk ilyen alakú megoldásokat, ha az alábbi esetek valamelyike teljesül:

1. *Gyenge csillapítás esete:* $\omega^2 > \frac{\gamma^2}{4}$. Ekkor léteznek $\xi = \xi_0 e^{i\lambda t}$ alakú, független megoldások,

$$\xi_1(t) = e^{i\lambda_+ t} = e^{-\frac{\gamma}{2}t + i\Omega t}, \quad \xi_2(t) = e^{i\lambda_- t} = e^{-\frac{\gamma}{2}t - i\Omega t}, \tag{2.5.13}$$

ahol $\lambda_\pm = i\frac{\gamma}{2} \pm \Omega$, $\Omega = \sqrt{\omega_0^2 - \frac{\gamma^2}{4}}$. Az általános megoldás: $\xi(t) = A_1\xi_1(t) + A_2\xi_2(t)$, ahol az A_i $(i = 1, 2)$ állandókat a kezdőfeltételek határozzák meg. Nyilvánvalóan a megoldás alakja:

$$\xi(t) = Ae^{-\frac{\gamma}{2}t}e^{-i(\Omega t + \alpha)}, \quad x(t) = Ae^{-\frac{\gamma}{2}t}\cos(\Omega t + \alpha), \tag{2.5.14}$$

ahol A és α valósak. A mozgás szigorúan monoton csökkenő amplitudójú, $\Omega < \omega_0$ körfrekvenciájú rezgés: **csillapított rezgés.**

2. *Erős csillapítás esete:* $\omega^2 < \frac{\gamma^2}{4}$. Ekkor a két független megoldás valós:

$$\xi_1(t) = e^{-\frac{\gamma}{2}t + \sqrt{\frac{\gamma^2}{4} - \omega_0^2}\,t}, \quad \xi_2(t) = e^{-\frac{\gamma}{2}t - \sqrt{\frac{\gamma^2}{4} - \omega_0^2}\,t}, \tag{2.5.15}$$

és az általános megoldás

$$x(t) = A_1\xi_1(t) + A_2\xi_2(t) \tag{2.5.16}$$

A_1,A_2 valós együtthatókkal jellemzett mozgás, ami szigorúan monoton csökkenő kitérésnek felel meg.

3. *Aperiodikus határeset:* $\omega_0^2 = \frac{\gamma^2}{4}$. A két lineárisan független megoldás ekkor:

$$\xi_1(t) = e^{-\frac{\gamma}{2}t}, \qquad \xi_2(t) = te^{-\frac{\gamma}{2}t}. \tag{2.5.17}$$

Az általános megoldás most is t nagy értékeinél szigorúan monoton csökkenő kitérést ad, kezdetben azonban a kitérés közel lineárisan nő.

Csillapított lineáris harmonikus oszcillátor kényszerrezgése. Végül vizsgáljuk meg a periodikus kényszererő hatására rezgő, csillapított oszcillátor esetét:

$$\ddot{\xi} = -\omega_0^2\xi - \gamma\dot{\xi} + f_0 e^{i\omega t}. \tag{2.5.18}$$

A differenciálegyenlet most inhomogén. Keressük a mozgásegyenlet megoldását ismét $\xi(t) = \xi_0 e^{i\lambda t}$ alakban. Megoldást ilyen alakban akkor és csak akkor kapunk, ha

$$\lambda = \omega, \qquad \xi_0 = \frac{f_0}{\omega_0^2 - \omega^2 + i\omega\gamma}. \tag{2.5.19}$$

Ekkor a valós megoldás:

$$\begin{aligned} x(t) &= \mathrm{Re}\ \xi_0 e^{i\omega t} = \frac{f_0(\omega_0^2 - \omega^2)}{(\omega_0^2-\omega^2)^2 + \omega^2\gamma^2}\cos(\omega t) - \frac{f_0\omega\gamma}{(\omega_0^2-\omega^2)^2+\omega^2\gamma^2}\sin(\omega t) \\ &= A(\omega)\cos(\omega t + \alpha), \end{aligned} \tag{2.5.20}$$

$A(\omega)$ amplitudójú harmonikus rezgés, amelynek körfrekvenciája megegyezik a gerjesztő erő körfrekvenciájával. A rezgések $A(\omega)$ amplitudója és a gerjesztő erőhöz képesti $\alpha(\omega)$ fáziseltolódása függnek a gerjesztő erő ω körfrekvenciájától:

$$A(\omega) = \frac{f_0}{\sqrt{(\omega_0^2-\omega^2)^2+\omega^2\gamma^2}}, \qquad \mathrm{tg}\ \alpha = -\frac{\omega\gamma}{\omega_0^2-\omega^2}. \tag{2.5.21}$$

Rezonancia most is fellép. Gyenge csillapítás esetén ($\gamma^2 \ll \omega^2$) a rezonancia akkor k"ovetkezik be, amikor a gerjesztő erő frekvenciája közelítőleg megegyezik a szabad rezgések frekvenciájával, $\omega \approx \omega_0$. A rezgések amplitudója azonban rezonancia esetén is véges marad a csillapító erő jelenlétének köszönhetően ($\gamma \neq 0$). A rezonancia helyének közelében a fáziseltolódási szög tangense előjelet vált.

Be- és kikapcsolási jelenségek. Megjegyezzük, hogy a fenti kényszerrezgések során feltételeztük, hogy a kényszererő mindig be volt és be marad kapcsolva. Valóságos fizikai helyzetekben természetesen a kényszererő valamikor be lesz kapcsolva ill. megszűnik. Ekkor a mozgásegyenlet általános megoldása az inhomogén egyenlet speciális megoldásának (ezt kerestük meg az előbb) és a szabad (csillapított) rezgést leíró homogén egyenlet két lineárisan független megoldása lineáris kombinációjának az összege, ahol a lineáris kombinációs együtthatókat a kezdőfeltételekből kell meghatározni. A be- és kikapcsolási jelenség abból áll, hogy a kényszererő bekapcsolása után exponenciálisan növekvő amplitudóval jelenik meg a kényszererő frekvenciájával azonos frekvenciájú kényszerrezgés. A kényszererő kikapcsolása után pedig a kényszerrezgés ugyancsak exponenciálisan csökkenő amplitudóval szűnik meg. Az exponenciális növekedés ill. csökkenés $1 - e^{-\gamma t}$ ill. $e^{-\gamma t}$ alakúnak adódik, azaz a be- és kikapcsolási jelenségek τ karakterisztikus ideje a csillapítási tényező reciprokával egyenlő, $\tau = \frac{1}{\gamma}$.

2.5.3 Bolygómozgás. Kepler törvényei

A Földön élő embert kezdettől fogva foglalkoztatta, hogy hogyan mozog a Nap és az égitestek. Kezdetben minden próbálkozás az égitestek mozgásának a leírására a Földhöz rögzített vonatkoztatási rendszerből történt, mert a Ptolemaiosz-i világképben a Föld a Mindenség közepének szerepét játszotta. Mi most már ügyesebben választhatunk vonatkoztatási rendszert, miután tudjuk, hogy végtelen sok inerciarendszer van és egyikük sincs a Természetben kitüntetve. A Nap és a Föld közös tömegközépponti rendszerében fogjuk megvizsgálni a Nap-Föld rendszer mozgását, egyelőre elhanyagolva azt, hogy a Naprendszerben más bolygók is vannak. Általánosabban fogalmazva, azt fogjuk megvizsgálni, hogyan mozog a Nap gravitációs terében egy bolygó, ha más testek nincsenek jelen.

A Nap gravitációs terében a tőle r távolságra elhelyezkedő bolygó potenciális energiája $V(r) = -\gamma\frac{Mm}{r}$, ahol M ill. m rendre a Nap ill. a bolygó (súlyos) tömege, γ a gravitációs állandó. Tetszőleges inerciális vonatkoztatási rendszerben a Nap és a bolygó együttesének Lagrange-függvénye:

$$L = \frac{1}{2}M\dot{\mathbf{r}}_N^2 + \frac{1}{2}m\dot{\mathbf{r}}_F^2 + \gamma\frac{Mm}{|\mathbf{r}_N - \mathbf{r}_F|}, \tag{2.5.1}$$

ahol $\mathbf{r}_N$ ill. $\mathbf{r}_F$ rendre a Nap és a Föld helyzetvektora. Vezessük be helyettük a tömegközéppont $\mathbf{R} = \frac{M\mathbf{r}_N + m\mathbf{r}_F}{M+m}$ helyzetvektorát és az $\mathbf{r} = \mathbf{r}_N - \mathbf{r}_F$ relatív helyzetvektort,

$$\mathbf{r}_N = \mathbf{R} + \frac{m}{M+m}\mathbf{r}, \qquad \mathbf{r}_F = \mathbf{R} - \frac{M}{M+m}\mathbf{r}. \tag{2.5.2}$$

Toljuk el ezután a koordinátarendszer origóját a tömegközéppontba. A tömegközépponti rendszer inerciarendszer, ha elhanyagoljuk a többi égitest gravitációs hatását. A tömegközépponti rendszerben $\mathbf{R} = 0$ (a tömegközéppontból a tömegközéppontba mutató vektor) és $\dot{\mathbf{R}} = 0$ (tömegközéppont sebessége a hozzá rögzített rendszerben). A Lagrange-függvény a tömegközépponti rendszerben

$$L = \frac{1}{2}\mu\dot{\mathbf{r}}^2 + \gamma\frac{\mu(M+m)}{r} \tag{2.5.3}$$

alakot ölt. A két-test feladatot így visszavezettük olyan egy-részecskés feladatra, amelyben μ **redukált tömegű** részecske mozog a $\Phi(r) = -\frac{\alpha}{r}$ gravitációs potenciálban, $\alpha = \gamma(M+m)$. Miután a Lagrange-függvény invariáns a koordinátarendszer elforgatásaival szemben, azért a rendszer pályaimpulzusmomentuma, $\mathbf{l} = \mathbf{r} \times \mu\dot{\mathbf{r}}$ megmarad. Miután mind az $\mathbf{r}$ helyzetvektor, mind a $\dot{\mathbf{r}}$ sebességvektor merőlegesek a pályamomentum megmaradó $\mathbf{l}$ vektorára, azért a mozgás síkmozgás. Vegyünk fel a mozgás síkjában egy polárkoordinátarendszert. Ekkor a Lagrange-függvény

$$L = \frac{1}{2}\mu\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2\right)\mu\Phi(r), \tag{2.5.4}$$

és a pályamomentum

$$\mathbf{l} = r\mathbf{e}_r \times \mu(\dot{r}\mathbf{e}_r + r\dot{\varphi}\mathbf{e}_\varphi) = r^2\dot{\varphi}\mathbf{e}_r \times \mathbf{e}_\varphi \equiv l_z\mathbf{n}, \quad l_z = r^2\dot{\varphi} = \text{ áll. }, \quad \mathbf{n} = \mathbf{e}_r \times \mathbf{e}_\varphi \tag{2.5.5}$$

alakot ölt. A rendszer energiája

$$E = \frac{1}{2}\mu\dot{r}^2 + \frac{1}{2}\mu r^2\dot{\varphi}^2 + \mu\Phi(r) = \frac{1}{2}\mu\dot{r}^2 + V_{\text{eff}}(r), \tag{2.5.6}$$

megmaradó (ld. az energiamegmaradásának törvénye konzervatív erőtérben mozgó részecske esetén), ahol az effektív potenciális energia:

$$V_{\text{eff}}(r) = \frac{l_z^2}{2\mu r^2} + \mu\Phi(r). \tag{2.5.7}$$

Az effektív potenciális energia az alábbi tulajdonságokkal bír:

$$V_{\text{eff}} \to +\infty, \quad \text{ha } r \to 0, \qquad V_{\text{eff}} \to 0, \quad \text{ha } r \to \infty \tag{2.5.8}$$

és minimuma van azon r_c sugárnál, amelyre

$$\left.\frac{dV_{\text{eff}}}{dr}\right|_{r=r_c} = 0, \qquad r_c = \frac{l_z^2}{\alpha\mu}, \quad V_{\text{eff}}(r_c) = -\frac{\mu\alpha^2}{2l_z^2}. \tag{2.5.9}$$

A rendszer energiája alulról korlátos:

$$E \geq -\frac{\mu\alpha^2}{2l_z^2} = V_{\text{eff}}(r_c). \tag{2.5.10}$$

Az impulzusmomentum megmaradása azt jelenti, hogy az

$$\frac{1}{2}r^2\dot{\varphi} = \lim_{\Delta t\to 0} \frac{\frac{1}{2}r\ r\Delta\varphi}{\Delta t} \tag{2.5.11}$$

úgynevezett **felületsebesség állandó**: a bolygóhoz (a közös tömegközéppontból) húzott sugár egyenlő Δt idők alatt egyenlő $\Delta f = \frac{1}{2}r\ r\Delta\varphi$ felületeket súrol. Ez Kepler II. törvénye. Nemcsak bolygómozgásra, hanem a Nap gravitációs terében mozgó bármilyen részecskére igaz. Megjegyezzük, hogy a Nap-Föld rendszer esetén a közös tömegközéppont lényegében a Napban van, mert a Nap sokkal nagyobb tömegű mint a Föld.

A pálya egyenletét a megmaradási törvények alapján egyszerűbben megkaphatjuk, mint a mozgásegyenletek integrálásával. Az energiamegmaradás törvényéből:

$$\frac{dr}{dt} = \frac{dr(\varphi)}{d\varphi}\frac{d\varphi}{dt} = \sqrt{\frac{2}{\mu}\Big(E - \mu\Phi(r)\Big) - \frac{l_z^2}{\mu^2 r^2}}. \tag{2.5.12}$$

Felhasználva az impulzusmomentum megmaradásának törvényét,

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{l_z}{\mu r^2}, \tag{2.5.13}$$

amit behelyettesítve, a pálya $r = r(\varphi)$ egyenletére a következő differenciálegyenletet kapjuk:

$$\frac{d\varphi}{dr} = \frac{l_z}{r^2}\frac{1}{\sqrt{2\mu\Big(E - \mu\Phi(r)\Big) - \frac{l_z^2}{r^2}}}. \tag{2.5.14}$$

Használjuk fel az alábbi nevezetes integrált (ld. I.S. Gradstein, I.M. Ryzhik, 2.261.3, *Table of Integrals, Series, and Products*, Academic Press, New York, 1980.):

$$\int \frac{dx}{(ax^2+bx+c)^{\frac{1}{2}}} = \frac{-1}{(-a)^{\frac{1}{2}}} \text{ arc cos } \frac{2ax+b}{(b^2-4ac)^{\frac{1}{2}}} + \text{ áll. }, \quad \text{ha } a < 0, \ \ b^2 > 4ac \tag{2.5.15}$$

A polárszöget mérjük úgy, hogy az integrációs állandó zérus legyen, ekkor

$$\varphi = \text{ arc cos } \frac{\frac{l_z}{r} - \frac{\alpha\mu}{l_z}}{\sqrt{2\mu E + \frac{\mu^2\alpha^2}{l_z^2}}}. \tag{2.5.16}$$

Bevezetve a

$$p = \frac{l_z^2}{\mu\alpha}, \qquad e = \sqrt{1 + \frac{2El_z^2}{\mu\alpha^2}} \tag{2.5.17}$$

paramétereket, a pálya egyenlete explicit alakra hozható:

$$r(\varphi) = \frac{p}{1 + e\cos\varphi}. \tag{2.5.18}$$

Ez kúpszelet egyenlete, amelynek paramétere p (jelentése $r(\frac{\pi}{2}) = p$), excentricitása e.

Az energia értékétől függően az alábbi eseteket lehet megkülönböztetni:

1. *Korlátos mozgás körpályán.* Ha $E = V_{\text{eff}}(r_c)$, akkor az energia megmaradásának következtében $\dot{r} = 0$, azaz a részecskének zérus a radiális irányú sebessége, azaz körpályán mozog. ekkor a bolygó is és a Nap is körpályán mozognak a közös tömegközéppont körül. A mozgás állandó szögsebessége

$$\dot{\varphi} = \frac{l_z}{\mu r_c^2} = \frac{\mu\alpha^2}{l_z^3} \equiv \omega_c, \tag{2.5.19}$$

és a rendszer energiája ekkor

$$E = V_{\text{eff}}(r_c) = -\frac{1}{2}l_z\omega_c = -\frac{1}{2}\mu r_c^2\omega_c^2. \tag{2.5.20}$$

2. *Korlátos mozgás ellipszis pályán.* Ha $0 > E > V_{\text{eff}}(r_c)$, akkor a részecske pályájának fordulópontja van az $r_\mp$ helyeken, amelyekre $V_{\text{eff}}(r_\mp) = E$. Ezekben a pontokban a radiális irányú sebességkomponens zérus, $\dot{r}(r_\mp) = 0$, és a részecskére ható erő $F_r(r_\mp) = -\left.\frac{dV_{\text{eff}}}{dr}\right|_{r=r_\mp} \gtrless 0$ az r_- ill. az r_+ helyen sugárirányban kifelé kezdi ill. befelé kezdi gyorítani a részecskét. Ezért az az $r = r_-$ és az $r = r_+$ sugarú körökkel határolt tartományban mozog a pályasíkban. Az excentricitás ekkor $e < 1$, így a pálya ellipszis, amelynek fókuszában a közös tömegközéppont áll. **Ez Kepler I. törvénye: a bolygók ellipszis pályán mozognak a Nap körül, amelynek egyik fókuszában a Nap áll, pontosabban ellipszis pályán mozognak a közös tömegközéppont körül, amelynek egyik fókuszában a közös tömegközéppont helyezkedik el.** Az ellipszis féltengelyei

$$a = \frac{p}{1 - e^2} = \frac{\alpha}{2|E|}, \qquad b = \frac{p}{\sqrt{1 - e^2}} = \frac{l_z}{\sqrt{2|E|\mu}} = \frac{l_z}{\sqrt{\alpha\mu}}a^{\frac{1}{2}}. \tag{2.5.21}$$

Ha az állandó impulzusmomentumot kiintegráljuk idő szerint a T keringési időre, akkor

$$l_zT = \mu\int_0^T r^2\dot{\varphi} = \mu f = \mu\pi ab \tag{2.5.22}$$

adódik, ahol felhasználtuk, hogy az ellipszis területe $f = \pi ab$. A féltengelyekre vonatkozó összefüggéseket felhasználva, innen megkapjuk **Kepler III. törvényét**:

$$T = \frac{\mu \pi ab}{l_z} = \frac{\pi}{\sqrt{\gamma(M+m)}} a^{\frac{3}{2}}, \qquad \frac{T^2}{a^3} = \text{áll.} \tag{2.5.23}$$

azaz **a bolygómozgás ellipszispályáin a félnagytengelyek köbei úgy aránylanak egymáshoz, mint a keringési idők négyzetei.**

3. *Mozgás nyílt pályán.* Ez akkor következik be, ha az energia $E \geq 0$, amikoris a pálya excentricitása $e \geq 1$. A pálya ekkor hiperbola ($e > 1$), ill. ($e = 1$) parabola, amelynek egyik fókuszában a közös tömegközéppont helyezkedik el.

A fenti példa tanulságos abból a szempontból is, mert mutatja, hogy a két-test rendszernek vannak **kötött állapotai** ($E < 0$) és **nem kötött, ún. szórási állapotai** ($E > 0$). A kötött állapotokban a két részecske együtt marad a tér egy korlátos tartományában. Kívülről energiát kell közölni a kötött rendszerrel ahhoz, hogy nem kötött állapotba kerüljön.

2.5.4 Bolygórendszer mozgása

Most vizsgáljuk meg, hogy milyen következményekkel jár egy bolygónak a Nap körüli mozgására az a tény, hogy a vizsgált bolygó a Naprendszer többi bolygóival is gravitációs kölcsönhatásban áll. A bolygók közötti kölcsönhatás potenciális energiája kicsi járulék a kiszemelt bolygó és a Nap közötti kölcsönhatás potenciális energiájához képest. Ezért úgy lehet figyelembe venni, mint kicsiny, a pályát módosító, ún. **perturbáló hatást**. A Föld közelítő Lagrange-függvénye a Nap és a többi bolygók jelenlétében

$$L = \frac{1}{2} m_F \dot{\mathbf{r}}_F^2 + \gamma \frac{M m_F}{|\mathbf{r}_F|} + \sum_{a=1}^{N} \gamma \frac{m_F m_a}{|\mathbf{r}_F - \mathbf{r}_a|}, \tag{2.5.1}$$

ahol feltettük, hogy az egész rendszer tömegközéppontja közelítőleg a Napban van, N további bolygó van jelen a rendszerben, és a koordinátarendszerünk origóját a Napban választottuk. Ha a többi bolygó nem lenne jelen, akkor a pálya egyenlete (a Földre vonatkozó mozgásegyenletek megoldása) a már ismert $\mathbf{r}_F^{(0)}(t)$ ellipszispálya lenne, amely az

$$m \ddot{\mathbf{r}}_F^{(0)} = -\gamma \frac{M m_F}{(\mathbf{r}_F^{(0)})^2} \frac{\mathbf{r}_F^{(0)}}{|\mathbf{r}_F^{(0)}|} \tag{2.5.2}$$

mozgásegyenletet elégítené ki. Ez a mozgásegyenlet nulladik közelítése. A többi bolygóra nulladik közelítésben hasonló mozgásegyenlet érvényes, amelyek megoldásai ugyancsak a jól ismert $\mathbf{r}_a^{(0)}(t)$ ellipszispályák. Eggyel jobb közelítést úgy kapunk a Föld pályájára, ha a Lagrange-függvényben a többi bolygóval való kölcsönhatás potenciális energiájába beírjuk a többi bolygó nulladik közelítésben kapott pályáját, majd az ezen tagoknak megfelelő korrekciót figyelembe vesszük a Föld mozgásegyenletében:

$$\begin{aligned} m \ddot{\mathbf{r}}_F^{(1)} &= -\gamma \frac{M m_F}{(\mathbf{r}_F^{(1)})^2} \frac{\mathbf{r}_F^{(1)}}{|\mathbf{r}_F^{(1)}|} + \text{korrekció a többi bolygó miatt} \\ &\approx -\gamma \frac{M m_F}{(\mathbf{r}_F^{(1)})^2} \frac{\mathbf{r}_F^{(1)}}{|\mathbf{r}_F^{(1)}|} - -\sum_{a=1}^{N} \gamma \frac{m_a m_F}{(\mathbf{r}_F^{(1)} - \mathbf{r}_a^{(0)})^2} \frac{\mathbf{r}_F^{(1)} - \mathbf{r}_a^{(0)}}{|\mathbf{r}_F^{(1)} - \mathbf{r}_a^{(0)}|}. \end{aligned} \tag{2.5.3}$$

A hosszadalmas számolás eredménye, hogy a Föld nem mozog zárt pályán, hanem olyan pályán, ami megfelel egy a Nap mint fókusz körül lassan elforduló ellipszisnek. Az ellipszis elfordulását az ún. **perihélium-elfordulással** szokás jellemezni. **A perihélium a bolygópályának a Naphoz legközelebbi pontja.** Az ide húzott vezérsugár fokozatosan elfordul.

A Merkúr perihélium-vándorlása. A Merkúr esetében a Föld-i megfigyelő észleli a perihélium-elfordulást, 5601″/100év. Ennek azonban jelentős része, 5025″/100év, abból származik, hogy a Föld, ahonnan a megfigyelést végezzük, kering a Nap körül. A többi bolygó perturbáló hatása további 532″/100év perihélium-elfordulást okoz. Ezek együttvéve azonban nem adnak számot a Merkúr teljes perihélium-vándorlásáról, marad további 44″/100év meg nem magyarázott szögelfordulás. A XIX. század végén, a XX. század legelején a Newton-i gravitációs törvény alapján mindezt már tudták. Kiderült tehát, hogy a klasszikus fizika Newton gravitációs törvénye alapján nem tudja megmagyarázni a Merkúr perihélium-vándorlását. Ez volt az egyik olyan jelenség, ami arra utalt, hogy a klasszikus mechanikának, és Newton gravitációs törvénye érvényességének vannak korlátai. Ezen jelenség megértésére való törekvésnek fontos szerepe volt az **általános relativitáselmélet** kidolgozásában. Az általános relativitáselmélet végül megmagyarázta a korábban meg nem értett további járulékot a perihélium-vándorlásban. Az ok egyszerű. Newton gravitációs törvénye csak közelítése a gravitáció törvényének, amely csak a Naptól kellően távol használható. A Merkúr elég közel van ahhoz a Naphoz, hogy mozgása kimutassa, hogy erős gravitációs térben a Newton-féle erőtörvény már nem érvényes.

2.5.5 Kettős csillag

A csillagászok számos olyan kötött rendszert figyeltek meg, amelyek két, egymás körül keringő csillagból állnak. Ezek mozgását lényegében ugyanúgy írhatjuk le, mint azt a Nap-Föld rendszer esetében tettük, amikor a többi égitest jelenlétét elhanyagoltuk. A különbség csupán annyi lesz, hogy a közös tömegközéppont most nem lesz általában egyik csillag közelében sem. A két csillag a közös tömegközéppont körül ellipszis pályán kering. Az ilyen rendszerek két esetben lehetnek különösen érdekesek.

Előfordulhat, hogy csak az egyiküket látjuk, de annak mozgásából rájövünk, hogy nem egyedül van, hanem van egy párja, amellyel kötött rendszert alkot. Ez az egyik módja, hogy például olyan égitestet észleljünk, mint a **fekete lyuk,** amelyik nem sugároz sem részecskéket, sem fényt, de van - nagyon is erős - gravitációs tere.

Ugyancsak nagy jelentőségű volt egy olyan nevezetes kettős csillag felfedezése (Hulse és Taylor), amelyek közül az egyik radiofrekvenciás jeleket sugároz jól meghatározott időközönként. Ez a sugárzás pontos óraként használható, hogy nagy pontossággal mérjük a csillag keringési idejét. Így sikerült kimutatni, hogy a megfigyelt kettős rendszerben a csillagok keringésének periódusideje fokozatosan csökken. A kettős csillag energiát veszít. Ez megint egy olyan jelenség, amelyre a gravitáció Newton-féle törvénye alapján a klasszikus mechanika keretein belül nem tudunk magyarázatot adni. Ha a kettős csillag távol van a többi égitestektől, akkor energiájának állandónak kellene maradni. Az megfigyelt jelenség további bizonyítékát adta az általános relativitás elméletének, amelynek keretében azzal magyarázható, hogy a kettős csillagok mozgásuk során **gravitációs hullámokat** bocsátanak ki és így veszítik el az energiájukat.

2.5.6 Ütközések

A fizikai törvények vizsgálata sokszor történik úgy, hogy úgynevezett bombázó részecskével („lövedékkel") bombázunk egy céltárgy-részecskét (target-részecskét). A kísérlet során általában mind a két részecskének megváltozik az impulzusa és az energiája. Az ilyen kísérletet **szórási kísérletnek** nevezzük. Ha nem érdekel minket a részecskék kölcsönhatása, vagyis a szórási folyamat időbeli lefolyása, hanem csak a $t = t_k$ pillanatbeli kezdeti állapotot hasonlítjuk össze a $t = t_v$ pillanatbeli végállapottal az impulzus- és az energiaviszonyok alapján, akkor **ütközésről** beszélünk. A szórási folyamat során a részecskék kölcsönhatnak. A t_k és a t_v pillanatokat azonban úgy választjuk meg, hogy akkor még ill. már elhanyagolható legyen a részecskék közötti kölcsönhatás. Ezt formálisan úgy érhetjük el, hogy feltesszük, a kölcsönhatás $t \approx 0$ körüli pillanatokban a legerősebb, és a $t_k \to -\infty$ és $t_v \to +\infty$ választással élünk. Amikor $t \sim \mathcal{O}(t_k)$ ill. $\mathcal{O}(t_v)$, akkor az egyes részecskék még közelítőleg szabad, azaz egyenesvonalú egyenletes mozgást végeznek a kezdő- ill. a végsebességükkel. Azt mondjuk, hogy ekkor **a részecskék aszimptotikusan szabad állapotban vannak.**

A részecskék rendelkezhetnek belső szerkezettel, ekkor a sebességükön a továbbiakban a tömegközéppontjuk sebességét fogjuk érteni. Feltesszük továbbá az egyszerűség kedvéért, hogy a részecskék saját (alkotórészeik tömegközéppont körüli pályamozgásából adódó) impulzusmomentuma zérus.

Rugalmas ütközés. Az egyes ütköző részecskék energiája az aszimptotikusan szabad állapotban a haladó mozgásuk kinetikus energiájából és a saját tömegközépponti rendszerükben mért „belső" energiájukból tevődik össze. **Rugalmas ütközésről akkor beszélünk, ha az egyes részecskék energiája a saját tömegközépponti rendszerükben az ütközés előtti és utáni aszimptotikusan szabad állapotban azonos, azaz nem változik meg az ütközés során.** Ez egyúttal azt is jelenti, hogy a részecskék tehetetlen tömegei sem változnak meg. Rugalmas ütközés esetén az energiamegmaradás törvénye értelmében a részecskék haladó mozgásából származó kinetikus energiák összege az ütközés során állandó marad:

$$\frac{1}{2}m\mathbf{v}_b^2 + \frac{1}{2}M\mathbf{v}_t^2 = \frac{1}{2}m\mathbf{v}_b'^2 + \frac{1}{2}M\mathbf{v}_t'^2, \tag{2.5.1}$$

ahol m ill. M a bombázó és a target részecske tehetetlen tömege, a sebességek b ill. t alsó indexe a bombázó ill. a target részecskére utal, a vesszőtlen ill. a vesszős mennyiségek pedig a kezdeti ill. a végső aszimptotikusan szabad állapotot jellemzik. Az impulzus megmaradásának törvényéből pedig az alábbi egyenlet adódik:

$$m\mathbf{v}_b + M\mathbf{v}_t = m\mathbf{v}_b' + M\mathbf{v}_t'. \tag{2.5.2}$$

Azt a vonatkoztatási rendszert, amelyben a kísérlet elvégzéséhez szükséges berendezések nyugszanak, laboratóriumi rendszernek nevezzük. (Ilyen berendezések a részecskéket előállító eszközök, a gyorsítók, ill. a végállapotban történő megfigyelésükhöz szükséges eszközök, a detektorok.) Az ütközési folyamatot azonban egyszerűbb leírni az ütköző részecskék tömegközépponti (TKP) rendszerében. A közös TKP sebessége:

$$\mathbf{V} = \frac{m\mathbf{v}_b + M\mathbf{v}_t}{m+M} = \frac{m\mathbf{v}_b' + M\mathbf{v}_t'}{m+M}. \tag{2.5.3}$$

Jelöljük TKP alsó indekssel a TKP rendszerben mért mennyiségeket. A TKP rendszerben a két-részecskés rendszer teljes impulzusa zérus,

$$0 = m\mathbf{v}_{b,\mathrm{TKP}} + M\mathbf{v}_{t,\mathrm{TKP}} = m\mathbf{v}_{b,\mathrm{TKP}}' + M\mathbf{v}_{t,\mathrm{TKP}}'. \tag{2.5.4}$$

Ez azt jelenti, hogy a TKP rendszerben a két részecske impulzusa egyenlő nagyságú és ellentétes irányú az ütközés előtti és utáni aszimptotikusan szabad állapotban is:

$$m\mathbf{v}_{b,\mathrm{TKP}} = -M\mathbf{v}_{t,\mathrm{TKP}}, \quad m\mathbf{v}_{b,\mathrm{TKP}}' = -M\mathbf{v}_{t,\mathrm{TKP}}'. \tag{2.5.5}$$

Felhasználva a sebességösszeadás szabályát és a TKP sebességének (2.5.3) képletét, az energia megmaradásának (2.5.1) törvénye az alábbi alakot ölti a TKP rendszerben:

$$\frac{1}{2}m\mathbf{v}_{b,\mathrm{TKP}}^2 + \frac{1}{2}M\mathbf{v}_{t,\mathrm{TKP}}^2 = \frac{1}{2}m\mathbf{v}_{b,\mathrm{TKP}}^{\prime 2} + \frac{1}{2}M\mathbf{v}_{t,\mathrm{TKP}}^{\prime 2}, \tag{2.5.6}$$

ahonnan az impulzusokra vonatkozó (2.5.5) összefüggések segítségével azt kapjuk, hogy

$$\frac{1}{2}m\left(1+\frac{m}{M}\right)\mathbf{v}_{b,\mathrm{TKP}}^2 = \frac{1}{2}m\left(1+\frac{m}{M}\right)\mathbf{v}_{b,\mathrm{TKP}}^{\prime 2}, \tag{2.5.7}$$

azaz

$$|\mathbf{v}_{b,\mathrm{TKP}}| = |\mathbf{v}'_{b,\mathrm{TKP}}|, \qquad |\mathbf{v}_{t,\mathrm{TKP}}| = |\mathbf{v}'_{t,\mathrm{TKP}}|. \tag{2.5.8}$$

Rugalmas ütközés során az egyes részecskék sebességének nagysága változatlan marad, csak a sebességek iránya fordul el. Egy részecske sebességének kezdeti és végső iránya közti $\alpha \in [0,\pi]$ szöget nevezzük a tömegközépponti rendszerben az **eltérülés szögének.** Ennek értékét csak akkor tudjuk meghatározni, ha a kölcsönhatást ismerjük és a szórási folyamatot részleteiben vizsgáljuk.

Rugalmatlan ütközés. **Rugalmatlan ütközésről akkor beszélünk, amikor az egyes ütköző részecskék belső energiája a saját tömegközépponti rendszerükben megváltozik,** azaz más a kezdeti és a végső aszimptotikusan szabad állapotban. **Ha egy részecske belső energiája a saját tömegközépponti rendszerében megnő, ill. lecsökken, akkor azt mondjuk, hogy a részecske gerjesztési energiára tesz szert ill. gerjesztési energiát veszít.** A tapasztalat szerint minden részecskének van minimális energiájú állapota, ún. **alapállapota** a saját tömegközépponti rendszerében. A gerjesztési energia az az energiatöbblet, amivel a részecske a saját tömegközépponti rendszerében az alapállapoti energiához képest rendelkezik. Rugalmatlan ütközés esetén az impulzusmegmaradás törvénye a (2.5.2) egyenlethez képest annyi módosítással érvényes, hogy a kezdeti és a végső tehetetlen tömegek általában nem egyeznek meg. Az energiamegmaradás törvénye azonban csak úgy érvényes, ha figyelembe vesszük a gerjesztési energiákat, vagy ami ugyanazt eredményezi a részecskék belső energiáját.

2.5.7 Szórás. Szórási hatáskeresztmetszet

Az ütközésekről szóló fejezetben a szórási folyamatot csak a kezdeti és a végső aszimptotikusan szabad állapot impulzus- és energiaviszonyainak összehasonlításával vizsgáltuk. Ehhez nem volt szükségünk a mozgás időbeli lefolyásának ismeretére. Most értelmezzük a **differenciális szórási hatáskeresztmetszetet,** amit a szórási kísérletekben meg lehet mérni és megmutatjuk, hogy ennek értéke hogyan függ a kölcsönhatástól.

Két alapvető fontosságú kísérleti elrendezés létezik a szóráskísérletek elvégzéséhez:

1. az állótargetes szóráskísérlet, és az
2. ütközőnyalábos szóráskísérlet.

Az állótargetes szóráskísérlet. Az egyszerűség kedvéért olyan esetet fogunk vizsgálni, amikor a targetrészecske végtelen nehéz és a bombázó részecske és a target között a kölcsönhatás potenciállal írható le. Ez egyúttal azt is feltételezi, hogy sem a bombázó részecske, sem a target nem gerjesztődik, azaz az ütközés rugalmas.

A tipikus kísérleti elrendezésben nem egyetlen bombázó részecskével szokás a laboratóriumi rendszerben álló targetet bombázni, hanem olyan részecskék nyalábjával, amelyek a kezdeti $t_k \to -\infty$ pillanatban mind azonos $\mathbf{v}_\infty$ sebességgel rendelkeznek. A nyaláb egy részecskéjét még az is jellemzi, hogy a $\mathbf{v}_\infty$ sebességgel párhuzamos, aszimptotikusan egyenes pálya milyen távolságra van a targetrészecskétől, ezt a távolságot nevezzük a b **ütközési paraméternek**. A nyalábot a **bejövő részecskeáram sűrűségével**, azaz a nyaláb irányára merőleges egységfelületen időegység alatt átlépő részecskék számával jellemezzük:

$$j_{\mathrm{be}} = \frac{n_0 \Delta f v_\infty \Delta t}{\Delta f \Delta t} = n_0 v_\infty \tag{2.5.1}$$

ahol a számlálóban a nyalábra merőleges Δf felületen Δt idő alatt merőlegesen átlépő részecskék száma áll; n_0 a részecskék száma a nyaláb térfogategységében. A szokásos kísérleti elrendezésben a szórt részecskék ΔN_{s} számát a targettől nagy R távolságban, a bombázó nyaláb ($\mathbf{v}_\infty$) irányához képest Θ szög alatt és φ polárszög alatt elhelyezkedő, $d\Omega$ térszöget lefedő detektorral szokás mérni. A $d\Omega$ térszög a detektorablak dF felületének és az R távolság négyzetének hányadosa: $d\Omega = \frac{dF}{R^2}$. Ha a detektor ablakának felülete a target-detektor egyenesre merőlegesen helyezkedik el, akkor a dF infinitezimális felületdarabot keinthetjük egy R sugarú gömbfelület darabjának, azaz $dF = R^2 \sin\theta d\theta d\varphi$ írható, az infinitezimális térszög tehát

$$d\Omega = \sin\theta d\theta d\varphi. \tag{2.5.2}$$

A szórt részecskék száma arányos a nyaláb j_{be} áramsűrűségével, a részecskeszámlálás Δt időtartamával és a detektorablak által lefedett $d\Omega$ térszöggel:

$$\Delta N_{\mathrm{s}} = \frac{d\sigma}{d\Omega} d\Omega j_{\mathrm{be}} \Delta t, \tag{2.5.3}$$

ahol az arányossági tényező a **differenciális szórási hatáskeresztmetszet**, amelyet

$$\frac{d\sigma}{d\Omega}(\theta, \varphi) = \frac{\Delta N_{\mathrm{s}}}{d\Omega n_0 v_\infty \Delta t} \tag{2.5.4}$$

összefüggés alapján lehet értelmezni. A differenciális szórási hatáskeresztmetszet térszög szerinti integrálját nevezzük **teljes hatáskeresztmetszetnek:**

$$\sigma = \int_0^\pi \sin\theta d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi \frac{d\sigma}{d\Omega}(\theta, \varphi). \tag{2.5.5}$$

Alább megmutatjuk, hogy a kölcsönhatás ismeretében a differenciális szórási hatáskeresztmetszet a mozgásegyenletek alapján meghatározható. Tegyük fel, hogy a mozgás centrális potenciálban történik, azaz hogy $V = V(r)$. A potenciál centruma a nyugvó target, amelynek visszalökődését elhanyagoljuk, azaz elhanyagoljuk, hogy a szórás során a target-részecske is impulzusra tesz szert. (Van olyan kísérleti elrendezés, amikor ez ténylegesen jó közelítés.) Ekkor a szórás tengelyszimmetrikus a targeten átmenő, nyalábirányú egyenesre nézve. A differenciális szórási hatáskeresztmetszet ezért nem függ attól, hogy a detektort ezen tengely körül forgatva milyen φ szögállásban helyezzük el: $\frac{d\sigma}{d\Omega}(\theta)$. A részecske kezdetben is és a végállapotban is aszimptotikusan egyenesen mozog. A részecske helyzetvektorának szögelfordulása (a target-részecske helyéről, azaz a potenciál centrumából nézve) $2\chi = \pi - \theta$, ha a részecske bejut a detektorba. A bolygómozgás vizsgálata során megállapítottuk, hogy a helyzetvektor szögelfordulása egyértelműen kifejezhető a részecske megmaradó, nyalábirányú pályaimpulzusmomentuma, $l_z = bmv_\infty$ és megmaradó energiája, $E = \frac{1}{2}mv_\infty^2$ segítségével. Ha az ott kapott (2.5.14) képletben $\mu\Phi(r)$ helyére tetszőleges $V(r)$ centrális potenciált írjuk, akkor az általánosabb

$$2\chi = 2\int_{r_{\min}}^\infty \frac{\frac{l_z}{r^2} dr}{\sqrt{2m[E - V(r)] - \frac{l_z^2}{r^2}}} \equiv 2\chi(b) = \pi - \theta(b) \tag{2.5.6}$$

eredményt kapjuk, ami nyilvánvalóan azt jelenti, hogy egyértelmű kapcsolat van a b ütközési paraméter és a χ szögelfordulás ill. a θ szórási szög között. A részecske akkor kerül a potenciál centrumától minimális $r_{\min}$ távolságra, amikor teljes kinetikus energiája potenciális energiává alakul, azaz amikor $E = \frac{1}{2}mv_\infty^2 = V(r_{\min})$ teljesül. Ez az összefüggés határozza meg a részecske legkisebb $r_{\min}$ távolságát a potenciál centrumától a mozgás során. Az ütközési paraméter és a szórási szög közötti egyértelmű kapcsolat miatt azok a részecskék szóródnak a detektorba, amelyek a bombázó nyaláb keresztmetszetében a b és $b + db$ sugarú körökkel és a φ és $\varphi + d\varphi$ irányú sugarakkal határolt területen jönnek be Δt idő alatt:

$$\Delta N_{\rm s} = bd\varphi dbn_0 v_\infty \Delta t = b(\theta)\left|\frac{db}{d\theta}\right| d\theta d\varphi n_0 v_\infty \Delta t. \tag{2.5.7}$$

Innen a differenciális szórási hatáskeresztmetszet:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega}(\theta, \varphi) = \frac{\Delta N_{\rm s}}{d\Omega n_0 v_\infty \Delta t} = \frac{b(\theta)}{\sin\theta}\left|\frac{db}{d\theta}\right| \tag{2.5.8}$$

ahol a $b(\theta)$ függvényt az (2.5.6) egyenlet határozza meg implicit alakban.

Az ütköző nyalábos szóráskísérlet. Ebben az esetben két részecskenyaláb fut egymással szemben és a részecskék a tér egy meghatározott pontjának kis környezetében ütköznek. Ezt úgy érhetjük el, hogy a két nyalábot csak rövid Δt ideig eresztjük be az ütközési zónába. Egyszerűség kedvéért tegyük fel, hogy a két nyalábban a részecskék impulzusa azonos és ellentétes irányú. Ekkor a laboratóriumi rendszer egy-egy ütköző részecskepár TKP rendszere. Éppen ebből származik az ütköző nyalábos szóráskísérlet fő előnye. Ha olyan gyorsítónk van, amelyik a részecskéket E energiával tudja előállítani, akkor ütközőnyalábos kísérletben (azonos tömegű ütköző részecskék esetén) $2E$ TKP energiával rendelkezik a két-részecskés rendszer. Ugyanakkor egy ilyen energiát biztosító gyorsító használata az állótargetes esetben (ugyancsak azonos tömegek esetén) laborrendszerben $E = \frac{1}{2}mv^2$ bombázó energiát, TKP rendszerben pedig $E_{\rm TKP} = 2 \cdot \frac{1}{2}m\left(\frac{v}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}E$ energiát jelent az ütközőnyalábos kísérletben elérhető $2E$ TKP energiával szemben.

2.5.8 Matematikai inga

A matematikai inga az O origónak választott felfüggesztési pontban rögzített, ℓ hosszúságú, zérus tehetetlen tömegűnek tekintett fonálon lengő, $m = m_s$ tehetetlen ill. súlyos tömegű anyagi pont. Ha az inga kezdősebessége az O felfüggesztési ponton átmenő függőleges egyenes és az inga kezdeti helyzete által meghatározott egyenes síkjába esik, akkor az inga síkmozgást végez ebben a síkban. Használjunk síkbeli polárkoordinátákat: $r = \ell$ =áll. az anyagi pont távolsága az origótól, $\varphi \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ az inga szögkitérése a felfüggesztési ponton átmenő függőleges egyenestől mérve. Az anyagi pont potenciális energiája a Föld nehézségi terében:

$$V(\varphi) = -m_s g\ell\cos\varphi, \tag{2.5.1}$$

kinetikus energiája pedig

$$T = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2) = \frac{1}{2}m\ell^2\dot{\varphi}^2, \tag{2.5.2}$$

úgyhogy a matematikai inga Lagrange-függvénye:

$$L = T - V = \frac{1}{2}m\ell^2\dot{\varphi}^2 + m_s g\ell\cos\varphi. \tag{2.5.3}$$

Innen

$$\frac{\partial L}{\partial \varphi} = -m_s g\ell \sin\varphi, \qquad \frac{\partial L}{\partial \dot\varphi} = m\ell^2\dot\varphi, \tag{2.5.4}$$

és a matematikai inga Euler-Lagrange-féle mozgásegyenlete:

$$m\ell^2\ddot\varphi + m_s g\ell\sin\varphi = 0. \tag{2.5.5}$$

Ha az inga kitérése mozgása során mindvégig kicsi, azaz $|\varphi(t)| \ll \frac{\pi}{2}$, akkor a potenciális energiában jó közelítéssel $\sin\varphi \approx \varphi$ írható. Figyelembe véve, hogy az anyagi pont súlyos és tehetetlen tömege (megfelelő egységválasztás után) a súlyos és tehetetlen tömeg ekvivalenciájának értelmében megegyezik, a mozgásegyenlet az alábbi egyszerű alakot ölti:

$$\ddot\varphi + \omega^2\varphi = 0, \qquad \omega^2 = \frac{m_s g}{m\ell} = \frac{g}{\ell} > 0. \tag{2.5.6}$$

Ez egy ω körfrekvenciájú lineáris harmonikus oszcillátor egyenlete. A lengések periódusideje, amekkora idő eltelik aközött, hogy az inga kétszer egymás után veszi fel ugyanazt a szöghelyzetet:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}}. \tag{2.5.7}$$

Ha a $t = 0$ kezdeti pillanatban az inga szögkitérése $\varphi(0) = \varphi_0 \ll \frac{\pi}{2}$, és kerületi sebessége v_0, azaz $\dot\varphi(0) = \frac{v_0}{\ell}$, akkor a megoldás

$$\varphi(t) = A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t), \qquad \dot\varphi(t) = -A\omega\sin(\omega t) + B\omega\cos(\omega t) \tag{2.5.8}$$

és a kezdőfeltételek az A és B állandókra az alábbi egyenleteket jelentik:

$$A = \varphi_0, \qquad B = \frac{v_0}{\ell\omega}. \tag{2.5.9}$$

Abban az egyszerű esetben, ha a kezdeti pillanatban $v_0 = 0$ az inga kerületi sebessége, akkor $B = 0$ adódik és a szögkitérésre mint az idő függvényére azt kapjuk, hogy

$$\varphi(t) = \varphi_0\cos(\omega t). \tag{2.5.10}$$

Az inga tehát a $\varphi = 0$ egyensúlyi helyzet körül, szögkitérése tekintetében harmonikus rezgőmozgást végez. A maximális szögkitérés φ_0. Az inga potenciális energiájának minimuma van a

$$\frac{\partial V}{\partial \varphi} = m_s g\ell\sin\varphi = 0 \tag{2.5.11}$$

szükséges feltételt kielégítő $\varphi = 0$ pontban, hiszen itt

$$\left.\frac{\partial^2 V}{\partial \varphi^2}\right|_{\varphi=0} = m_s g\ell > 0. \tag{2.5.12}$$

A harmonikus rezgések tehát a potenciális energia minimuma körül történnek. Az inga energiája állandó, mivel a Lagrange-függvény nem függ explicit módon az időtől és így invariáns az időbeli eltolásokkal szemben:

$$E = \frac{1}{2}m\ell^2\dot\varphi^2 - m_s g\ell\cos\varphi \approx \frac{1}{2}m\ell^2\dot\varphi^2 - mg\ell\Big[1 - \frac{1}{2}\varphi^2\Big] = \text{ áll.} \tag{2.5.13}$$

Kis szögkitérések esetén a részecske kinetikus ill. potenciális energiája, rendre:

$$\frac{1}{2}m\ell^2\varphi_0^2\omega^2\sin^2(\omega t) = \frac{1}{2}mg\ell\varphi_0^2\sin^2(\omega t), \qquad V(t) = -mg\ell + \frac{1}{2}mg\ell\varphi_0^2\cos^2(\omega t), \quad (2.5.14)$$

ami szépen mutatja, hogy a lengések során az egyik szélső helyzetéből indított inga kezdeti potenciális energiájának egy része átalakul kinetikus energiává amikorra az inga a $\varphi = 0$ helyzetet eléri, majd mire az inga eljut a másik szélső helyzetbe, ismét visszaalakul a kinetikus energia potenciális energiává. Így marad meg a teljes energia:

$$E = -mg\ell + \frac{1}{2}mg\ell\varphi_0^2 = -mg\ell\left[1 - \frac{1}{2}\varphi_0^2\right] \approx -mg\ell\cos\varphi_0 = \text{ áll.} \qquad (2.5.15)$$

Az inga minimális energiájú állapota, amikor $E = -mg\ell$, azaz az ingának $\varphi_0 = 0$ állásban $v_0 = 0$ kezdő kerületi sebességet adunk. Ekkor nyilván nyugalomban marad ebben a helyzetben. Ha adunk az ingának kicsiny $E_{\mathrm{gerj}} = \frac{1}{2}mg\ell\varphi_0^2 \ll mg\ell$ gerjesztési energiát, akkor az egyensúlyi helyzet körül az inga úgynevezett kisrezgéseket, azaz kis amplitudójú harmonikus rezgéseket fog végezni. Természetesen, ha a gerjesztési energia nagy, akkor közelítéseink nem érvényesek és a lengések nem lesznek a szögkitérésben harmonikusak.

2.5.9 Kisrezgések

A kisrezgések rendkívül fontosak a fizika szempontjából. Például szilárdtestekben az anyagot alkotó atomok egy térbeli rács pontjaiban ülnek. Ez a test legmélyebb energiájú állapota, amely abszolút zérus hőmérsékleten valósul meg. Ekkor valamennyi atom egyensúlyi állapotban van, amelyet a potenciális energia minimuma jellemez. Ha a test véges hőmérsékleten (pl. szobahőmérsékleten) van, akkor ez azt jelenti, hogy a testnek, ill. a benne lévő atomoknak van kicsiny gerjesztési energiájuk. Ennek köszönhetően az atomok egyensúlyi helyzetük körül kis amplitudójú rezgéseket végeznek. Ezek az ún. **rácsrezgések.**

A jelenség mechanikájának megértéséhez vizsgáljunk először egy egy-szabadsági fokú rendszert. Legyen a rendszer jellemezhető a q általános koordinátával és a hozzátartozó $\dot{q}$ általános sebességgel. Legyen továbbá a rendszer kinetikus energiája

$$T = \frac{1}{2}A(q^2)\dot{q}^2, \qquad (2.5.1)$$

potenciális energiája pedig $V(q)$. Tegyük fel, hogy a potenciális energiának minimuma van az általános koordináta $q = q_0$ értékénél, amelynek szükséges ill. elégséges feltétele rendre

$$\left.\frac{dV}{dq}\right|_{q=q_0} = 0, \qquad D \equiv \left.\frac{d^2V}{dq^2}\right|_{q=q_0} > 0, \qquad (2.5.2)$$

ahol D az ún. visszaatérítő (vagy direkciós) erő. Legyen továbbá a rendszer gerjesztési energiája kicsi, azaz olyan, hogy az energia megmaradása,

$$E_{\mathrm{gerj}} = V(q_0 \pm \Delta q) - V(q_0) \approx \frac{1}{2}D(\Delta q)^2 \qquad (2.5.3)$$

által meghatározott maximális Δq kitérés kicsi legyen. Ezt a gerjesztést pl. úgy hozhatjuk létre, hogy a részecskének az egyensúlyi $q = q_0$ helyzetében $E_{\mathrm{gerj}} = \frac{1}{2}A(q_0)^2\dot{q}_0^2$ kinetikus energiát adunk. Ha ez kicsi, akkor az egész mozgás során a kitérés kicsi marad, ezért a potenciális energiát és a kinetikus energiát is sorba fejthetjük az $x = q - q_0$ „kitérés" ill. annak idő szerinti első deriváltja szerint a kvadratikus (legalacsonyabb el nem tűnő rendű) tagokkal bezárólag:

$$V(q) \approx V(q_0) + \frac{1}{2}Dx^2 + \mathcal{O}(x^3), \qquad T \approx \frac{1}{2}A(q_0)\dot{x}^2 + \mathcal{O}(x\dot{x}^2) = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \mathcal{O}(x\dot{x}^2), \quad (2.5.4)$$

ahol $m = A(q_0)$. Ebben a közelítésben a rendszer Lagrange-függvénye és megmaradó energiája, rendre

$$L = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 - \frac{1}{2}Dx^2 - V(q_0), \qquad E = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}Dx^2 + V(q_0). \qquad (2.5.5)$$

Ez pontosan egy ω körfrekvenciájú lineáris harmonikus oszcillátor Lagrange-függvénye, ill. energiája, ahol

$$\omega^2 = \frac{D}{m} = \frac{\left.\frac{d^2V}{dq^2}\right|_{q=q_0}}{A(q_0)}. \qquad (2.5.6)$$

A kis gerjesztési energiával rendelkező, egy szabadsági fokú rendszer tehát a potenciális energia minimumának megfelelő helyzet körül kis amplitudójú harmonikus rezgéseket végez. Ezeket nevezzük **kisrezgéseknek.** Közelítésünk lényege azon alapult, hogy a minimumhely elegendően kicsiny környezetében a potenciális energia-függvény parabolával közelíthető.

Az egy szabadsági fokú rendszerre elmondottak könnyen általánosíthatók s szabadsági fokú rendszerre. Jelölje q_i $(i = 1, 2, \ldots, s)$ az általános koordinátákat és tegyük fel, hogy a rendszer $V(q_1, q_2, \ldots, q_s)$ potenciális energiájának minimuma van az általános koordináták $q_i = q_{i0}$ értékénél, amelynek szükséges feltétele, hogy

$$\left.\frac{\partial V}{\partial q_i}\right|_{q_j=0\ j=1,\ldots,s} = 0, \qquad i = 1, 2, \ldots, s \qquad (2.5.7)$$

és elégséges feltétele, hogy a második deriváltakból képezett, szimmetrikus

$$V^{(2)}_{i,j} \equiv \left.\frac{\partial^2 V}{\partial q_i \partial q_j}\right|_{q_k=0\ k=1,\ldots,s} \equiv D_{i,j} \qquad (2.5.8)$$

mátrix a szélsőértékhelyen pozitív definit legyen, azaz minden w_i $(i = 1, 2, \ldots, s)$ sajátértéke pozitív legyen, $w_i > 0$ $(i = 1, 2, \ldots, s)$. Tegyük fel továbbá, hogy a rendszer gerjesztési energiája olyan kicsi, hogy az egyensúlyi helyzettől való legnagyobb kitérések is kicsinyek. Ekkor megválaszthatjuk az általános koordinátákat úgy, hogy azok az egyensúlyi helyzettől való eltéréseket mérjék:

$$x_i = q_i - q_{i0}, \qquad \dot{x}_i = \dot{q}_i, \qquad i = 1, 2, \ldots, s \qquad (2.5.9)$$

és sorba fejthetjük a rendszer potenciális energiáját és kinetikus energiáját az x-ben és $\dot{x}$-ben kvadratikus tagokkal bezárólag:

$$V \approx V_0 + \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{s} D_{i,j}x_i x_j + \mathcal{O}(x^3), \qquad T = \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{s} A_{i,j}(q)\dot{q}_i\dot{q}_j \approx \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{s} m_{i,j}\dot{x}_i\dot{x}_j + \mathcal{O}(x\dot{x}^2), \qquad (2.5.10)$$

ahol bevezettük az $m_{i,j} = A_{i,j}(q_{10}, \ldots, q_{s0})$ szimmetrikus „tömegmátrixot". Erről ugyancsak feltesszük, hogy pozitív definit, azaz hogy minden sajátértékére $\mu_i > 0$ $(i = 1, 2, \ldots, s)$

teljesül. A kvadratikus közelítésben a rendszer Lagrange-függvénye és megmaradó energiája, rendre:

$$L = \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{s} m_{i,j}\dot{x}_i\dot{x}_j - \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{s} D_{i,j}x_i x_j - V_0, \qquad E = \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{s} m_{i,j}\dot{x}_i\dot{x}_j + \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{s} D_{i,j}x_i x_j + V_0. \tag{2.5.11}$$

Az Euler-Lagrange-féle mozgásegyenletek

$$\sum_{j=1}^{s}(m_{i,j}\ddot{x}_j - D_{i,j}x_j) = 0, \qquad i = 1, 2, \ldots, s \tag{2.5.12}$$

alakúak. A megoldást

$$x_j = A_j\cos(\omega t), \qquad \ddot{x}_j = -A_j\omega^2\cos(\omega t) \tag{2.5.13}$$

alakban keresve, a rezgések A_j amplitudóira az

$$\sum_{j=1}^{s}(m_{i,j} - \omega^2 D_{i,j})A_j = 0 \tag{2.5.14}$$

homogén lineáris egyenletrendszert kapjuk. Ennek akkor és csak akkor van nem azonosan eltűnő megoldása, ha az egyenletrendszer mátrixának a determinánsa zérus, azaz ha az ω körfrekvencia a

$$\det|m_{i,j} - \omega^2 D_{i,j}| = 0 \tag{2.5.15}$$

egyenlet megoldása. Használjuk most ki, hogy mind az $m_{i,j}$ mind a $D_{i,j}$ $s\times s$-mátrix szimmetrikus és pozitív definit. A lineáris algebra szerint, ekkor létezik olyan $O_{i,j}$ ortogonális mátrix,

$$OO^T = 1, \quad \text{azaz} \ \sum_{j=1}^{s} O_{i,j}(O^T)_{j,k} = \sum_{j=1}^{s} O_{i,j}O_{k,j} = \delta_{i,k}, \tag{2.5.16}$$

amelynek segítségével a kinetikus és a potenciális energia kvadratikus alakja egyidejűleg diagonalizálható, amikoris a diagonálisban a mátrix sajátértékei állnak:

$$\begin{aligned} ODO^T &= \text{diagonális mátrix}, \qquad \sum_{j,k=1}^{s} O_{i,j}D_{j,k}(O^T)_{k,l} = v_i\delta_{i,l}, \\ OmO^T &= \text{diagonális mátrix}, \qquad \sum_{j,k=1}^{s} O_{i,j}m_{j,k}(O^T)_{k,l} = \mu_i\delta_{i,l},. \end{aligned} \tag{2.5.17}$$

Az amplitudókra vonatkozó homogén lineáris egyenletrendszer determinánsának eltűnése tehát átírható

$$\prod_{a=1}^{s}(\mu_a - \omega^2 w_a) = 0 \tag{2.5.18}$$

alakba, ahonnan azt kapjuk, hogy s számú, különböző, (2.5.13) alakú, ún. **sajátmegoldás** létezik, amelyek rendre az

$$(\omega^{(a)})^2 = \frac{\mu_a}{w_a} > 0 \tag{2.5.19}$$

sajátfrekvenciákhoz tartoznak. Ezek a rendszernek az ún. **sajátrezgései**. **A sajátrezgések olyanok, hogy minden általános koordináta, azaz minden szabadsági fok**

azonos fázisban, összehangoltan rezeg. A sajátrezgések tehát a sokrészrecskés rendszernek kollektív gerjesztései.

Ez még nyilvánvalóbbá válik, ha bevezetjük az új

$$Q_i = \sum_{j=1}^{s} O_{i,j} x_j = \sum_{j=1}^{s} x_j (O^T)_{j,i} \tag{2.5.20}$$

általános koordinátákat, amelyekhez a

$$\dot{Q}_i = \sum_{j=1}^{s} O_{i,j} \dot{x}_j = \sum_{j=1}^{s} \dot{x}_j (O^T)_{j,i} \tag{2.5.21}$$

általános sebességek tartoznak. A potenciális és a kinetikus energia kifejezéseibe beszúrhatunk egy egységmátrixot a kvadratikus forma mátrixa elé és mögé $O^T O$ alakban:

$$\begin{aligned}
V &= V_0 + \frac{1}{2} \sum_{i,j,i'j',i'',j''=1}^{s} x_{i'} (O^T)_{i',i} O_{i,i''} D_{i'',j''} (O^T)_{j'',j} O_{j,j'} x_{j'} \\
&= V_0 + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{s} Q_i w_i \delta_{i,j} Q_j = V_0 + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{s} w_i Q_i^2, \\
T &= \frac{1}{2} \sum_{i,j,i'j',i'',j''=1}^{s} \dot{x}_{i'} (O^T)_{i',i} O_{i,i''} m_{i,j} (O^T)_{j'',j} O_{j,j'} \dot{x}_j \\
&= \frac{1}{2} \sum_{i,j,i'',j''=1}^{s} \dot{Q}_i O_{i,i''} m_{i,j} (O^T)_{j'',j} \dot{Q}_j \\
&= \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{s} \dot{Q}_i \mu_i \delta_{i,j} \dot{Q}_j = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{s} \mu_i \dot{Q}_i^2.
\end{aligned} \tag{2.5.22}$$

Az új általános koordinátákban és sebességekben a potenciális energia és a kinetikus energia mátrixa is diagonális alakú. **Azokat az általános koordinátákat, amelyek segítségével a kinetikus energia és a potenciális energia mátrixa egyidejűleg diagonalizálható, normálkoordinátáknak nevezzük.** A normálkoordinátákban az Euler-Lagrange-egyenletek

$$\mu_i \ddot{Q}_i + w_i Q_i = 0, \text{ azaz } \ddot{Q}_i + (\omega^{(i)})^2 Q_i = 0, \quad i = 1, 2, \ldots, s \tag{2.5.23}$$

alakot öltenek, azaz szétcsatolódnak s darab független lineáris harmonikus oszcillátor egyenletévé. Ezen egyenletrendszernek van s darab olyan, lineárisan független megoldása, hogy valamely rögzített $a \in [1, 2, \ldots, s]$ mellett

$$Q_i^{(a)}(t) = \begin{cases} 0, & \text{ha } \; i \neq a \\ B^{(a)} \cos(\omega^{(a)} t + \alpha^{(a)}), & \text{ha } \; i = a \end{cases}, \tag{2.5.24}$$

ahol $B^{(a)}$ és $\alpha^{(a)}$ állandók. Ezek pontosan az $\omega^{(a)}$ frekvenciájú sajátrezgések, hiszen ekkor

$$x_j^{(a)}(t) = \sum_{i=1}^{s} (O^T)_{j,i} Q_i^{(a)}(t) = (O^T)_{j,a} B^{(a)} \cos(\omega^{(a)} t + \alpha^{(a)}) \equiv A_j^{(a)} \cos(\omega^{(a)} t + \alpha^{(a)}). \tag{2.5.25}$$

A normálrezgések tehát a sajátfrekvenciákkal végzett sajátrezgések, kollektív gerjesztések. Az egyes sajátfrekvenciákhoz tartozó normálrezgéseket normálmódusoknak nevezzük. A (2.5.12) egyenletek általános megoldása mindig előállítható a $Q_i^{(a)}$ $(i = 1, 2, \ldots, s)$ s darab normálrezgés, $a = 1, 2, \ldots, s$ lineáris kombinációjaként:

$$x_j(t) \;=\; \sum_{a=1}^{s} c_a x_j^{(a)}(t) == \sum_{a=1}^{s} c_a (O^T)_{j,a} Q_a^{(a)}(t). \tag{2.5.26}$$

Behelyettesítéssel ugyancsak meggyőződhetünk róla, hogy a kisrezgéseket végző rendszer energiája előállí tható a normálmódusok energiáinak összegeként:

$$E = \sum_{a=1}^{s} c_a^2 \sum_{i=1}^{s} \left[\frac{1}{2}\mu_i \dot{Q}_i^{(a)\,2} + \frac{1}{2} w_i Q_i^{(a)\,2}\right] = \sum_{a=1}^{s} c_a^2 \mu_a \left[\frac{1}{2}\dot{Q}_a^{(a)\,2} + \frac{1}{2}\omega^{(a)\,2} Q_a^{(a)\,2}\right] \tag{2.5.27}$$

1. **A sokrészecskés rendszer kisrezgései tehát mindig előállíthatók normálrezgések lineáris kombinációjaként; és**

2. **a kisrezgéseket végző rendszer gerjesztési energiája mindig előállítható az egyes normálmódusok energiáinak összegeként.**

2.5.10 Merevtestek

A merevtest fogalma. **Merevtestnek az olyan testet (pontrendszert) nevezzük, amelynek bármely két pontja a mozgás során állandó távolságra marad egymástól:**

$$|\mathbf{r}_a(t) - \mathbf{r}_b(t)| = \text{ áll.} \tag{2.5.1}$$

a test bármely két a és b pontjára. A merevtest természetesen ugyanúgy idealizált fogalom, mint az anyagi pont fogalma. A valóságos testek soha sem tökéletesen merevek, de jó közelítéssel mereveknek lehet őket tekinteni, ha a deformációjuk elhanyagolhatóan kicsi.

A merevtest általános elmozdulása. Szögsebesség. A merevség feltételének fontos következményei vannak, amelyek nagymértékben leegyszerűsítik a merevtestek mozgásának leírását. **A merevtest infinitezimális elmozdulása mindig összetehető egy infinitezimális eltolásból (haladó mozgásból, azaz transzlációból) és egy infinitezimális elforgatásból (forgásból, azaz rotációból).** A merevtest helyzetének megadásához két koordinátarendszert érdemes használni. Az egyik az a K inerciarendszer (laboratóriumi vonatkoztatási rendszer), amelyben le akarjuk írni a merevtest mozgását, a másik a merevtesthez rögzített K' koordinátarendszer. Helyezzük az utóbbi origóját a merevtest O' pontjába. Legyen a K koordinátarendszer O origójából az O' pontba mutató helyzetvektor $\mathbf{R}$, a merevtest teszőleges P pontjába mutató helyzetvektor $\mathbf{r}$ és a P pont helyzetvektora a K' rendszerben $\mathbf{r}'$. Ekkor érvényes az

$$\mathbf{r} = \mathbf{R} + \mathbf{r}' \tag{2.5.2}$$

egyenlőség. Az infinitezimális transzláció azt jelenti, hogy a merevtest minden pontja azonos $\delta_{\mathrm{tr}}\mathbf{r} = d\mathbf{R}$ elmozdulást szenved, miközben a merevtesthez rögzített K' koordinátarendszer tengelyei önmagukkal párhuzamosan tolódnak el. Az infinitezimális forgatás pedig azt jelenti, hogy a merevtest egésze az O' ponton átmenő $\mathbf{n}'$ egységvektorral adott irány körül $d\varphi'$ szöggel elfordul, azaz a merevtest pontjai $\delta_{\mathrm{rot}}\mathbf{r} = \mathbf{n}' d\varphi' \times \mathbf{r}'$ elmozdulást szenvednek. A merevtest tetszőleges P pontjának teljes infinitezimális elmozdulása így az infinitezimális transzlációból és az infinitezimális elfordulásból adódó elmozdulások vektori összege:

$$d\mathbf{r} = \delta_{\mathrm{tr}}\mathbf{r} + \delta_{\mathrm{rot}}\mathbf{r} = d\mathbf{R} + \mathbf{n}' d\varphi' \times \mathbf{r}'. \tag{2.5.3}$$

Ha ezek az infinitezimális elmozdulások dt idő alatt következtek be, akkor

$$\mathbf{V}' = \frac{d\mathbf{R}}{dt}, \quad \mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt}, \quad \omega' = \mathbf{n}'\frac{d\varphi'}{dt} \tag{2.5.4}$$

rendre az O' pont sebessége a K laboratóriumi rendszerben, a tetszőleges P pont sebessége K-ban ill. a merevtest O' pont körüli forgásának szögsebességvektora. A merevtest tetszőleges P pontjának sebességére a

$$\mathbf{v} = \mathbf{V}' + \omega' \times \mathbf{r}' \tag{2.5.5}$$

összefüggés áll fenn, azaz a haladó mozgás $\mathbf{V}$ sebességéből és az O' pont körüli forgásból adódó sebességből tevődik össze.

Most megmutatjuk, hogy az ω szögsebességvektor független az O origó helyének megválasztásától. Válasszunk egy másik, O'' pontot a merevtesthez rögzített másik K'' koordinátarendszer origójának. Legyen a merevtest tetszőleges P pontjának helyzetvektora ebben a koordinátarendszerben $\mathbf{r}''$, és legyen az O'-ből O''-be mutató helyzetvektor $\mathbf{b}$. Ha az O'' pont sebessége a K rendszerben $\mathbf{V}''$, akkor

$$\mathbf{v} = \mathbf{V}'' + \omega'' \times \mathbf{r}'' \tag{2.5.6}$$

írható, ahol ω'' a merevtest O'' pont körüli forgásának szögsebességvektora. Másrészt, alkalmazhatjuk a (2.5.4) összefüggést az O'' pont sebességére:

$$\mathbf{V}'' = \mathbf{V}' + \omega' \times \mathbf{b}. \tag{2.5.7}$$

Ezt behelyettesítve a (2.5.6) egyenlőségbe, azt kapjuk, hogy

$$\mathbf{v} = \mathbf{V}' + \omega' \times \mathbf{b} + \omega'' \times \mathbf{r}''. \tag{2.5.8}$$

Hasonlítsuk ezt össze a tetszőleges P pont sebességének azon kifejezésével, amit úgy kapunk, hogy az

$$\mathbf{r}' = \mathbf{b} + \mathbf{r}'' \tag{2.5.9}$$

egyenlőséget helyettesítjük a (2.5.4) egyenletbe:

$$\mathbf{v} = \mathbf{V}' + \omega' \times \mathbf{b} + \omega' \times \mathbf{r}''. \tag{2.5.10}$$

A (2.5.8) és a (2.5.10) egyenletek összehasonlítása alapján az adódik, hogy a merevtest bármely pontja körüli forgásának szögsebességvektora ugyanaz:

$$\omega' = \omega''. \tag{2.5.11}$$

A továbbiakban tehát elhagyhatjuk a szögsebesség jelölésében a merevtesthez rögzített koordinátarendszer origójának helyzetére vonatkozó utalást (a vesszőket). **A továbbiakban, az egyszerűbb összefüggések érdekében a merevtesthez rögzített koordinátarendszer O origóját a merevtest tömegközéppontjában választjuk.**

Merevtest szabadsági fokainak a száma. A merevtest helyzetét a tömegközéppontjának 3 darab Descartes-koordinátája (R_x, R_y, R_z), és a merevtesthez rögzített K' koordinátarendszer tengelyeinek a K laboratóriumi koordinátarendszer megfelelő tengelyeivel bezárt szögei, $(\alpha_x, \alpha_y, \alpha_z)$, azaz további 3 darab szögadat határozza meg. A merevtest helyzetének meghatározásához tehát 6 darab független geometriai adatot kell megadni. A merevtest egy 6 darab szabadsági fokkal rendelkező mechanikai rendszer. Micsoda leegyszerűsödés azzal szemben, hogy az egy molnyi anyagot tartalmazó merevtestben az egyes részecskék helyzetét megadó koordináták száma $3 \cdot 6 \cdot 10^{23}$!

Merevtest kinetikus energiája. Tehetetlenségi nyomaték. A merevtest kinetikus energiája a merevtestet alkotó részecskék kinetikus energiáinak az összege:

$$\begin{aligned} T &= \sum_{a=1}^{N} \frac{1}{2} m_a \mathbf{v}_a^2 = \sum_{a=1}^{N} \frac{1}{2} m_a \Big(\mathbf{V} + \omega \times \mathbf{r}'_a\Big)^2 \\ &= \frac{1}{2} M \mathbf{V}^2 + \mathbf{V} \cdot \Big(\omega \times \sum_{a=1}^{N} m_a \mathbf{r}'_a\Big) + \sum_{a=1}^{N} \frac{1}{2} m_a (\omega \times \mathbf{r}'_a)^2, \end{aligned} \tag{2.5.12}$$

ahol $M = \sum_{a=1}^{N} m_a$ a merevtest tehetetlen tömege, $\mathbf{V}$ a merevtest tömegközéppontjának sebessége a laboratóriumi rendszerben, ω a merevtest szögsebessége, $\mathbf{r}'_a$ pedig a merevtest a indexű részecskéjének helyzetvektora a merevtesthez rögzített K' rendszerben. A kinetikus energia kifejezésében a jobb oldalon az első tag a merevtest haladó mozgásából származó kinetikus energia. Mivel $\sum_{a=1}^{N} m_a \mathbf{r}'_a = 0$ a merevtest TKP-jának helyzetvektora a merevtesthez rögzített rendszerben, amelynek origóját a TKP-ban választottuk, azért a jobb oldalon a második tag eltűnik. A jobb oldal harmadik tagja a merevtestnek a TKP-ja körüli forgásából származó kinetikus energiája,

$$\begin{aligned} T_{\mathrm{rot}} &= \frac{1}{2} \sum_{a=1}^{N} m_a (\omega \times \mathbf{r}'_a)^2 = \sum_{a=1}^{N} \sum_{l,i,k,j,n=1}^{3} \epsilon_{lik} \omega_i r'_{ak} \epsilon_{ljn} \omega_j r'_{an} \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{3} \Theta_{ij} \omega_i \omega_j, \end{aligned} \tag{2.5.13}$$

ahol felhasználtuk a

$$\sum_{l=1}^{3} \epsilon_{lik} \epsilon_{ljn} = \delta_{i,j} \delta_{k,n} - \delta_{i,n} \delta_{j,k} \tag{2.5.14}$$

aonosságot és bevezettük a

$$\Theta_{ij} = \sum_{a=1}^{N} m_a \sum_{k,n=1}^{3} (\delta_{i,j} \delta_{k,n} - \delta_{i,n} \delta_{j,k}) r'_{ak} r'_{an} = \sum_{a=1}^{N} m_a \Big(\delta_{i,j} \mathbf{r}'^{\,2}_a - r'_{ai} r'_{aj}\Big) \tag{2.5.15}$$

tehetetlenségi nyomatékot. Az i, j, k, l, n indexek a vektoroknak a merevtesthez rögzített K' Descartes-féle koordinátarendszerben vett összetevőit jelölik. A tehetetlenségi nyomaték mátrixa szimmetrikus:

$$\Theta_{i,j} = \Theta_{j,i}. \tag{2.5.16}$$

A forgási energia kvadratikus alakja ezért a K' rendszer koordinátatengelyei irányának alkalmas megválasztásával diagonális alakot ölt, azaz főtengelyre transzformálható; ekkor

$$\Theta_{i',j'} = \Theta_{i'} \delta_{i',j'}. \tag{2.5.17}$$

Ekkor a megfelelő koordinátatengelyeket **a merevtest főtengelyeinek,** a diagonális alakú tehetetlenségi nyomaték $\Theta_{i'}$ diagonális elemeit pedig **fő tehetetlenségi nyomatékoknak** nevezzük. Meg lehet mutatni, hogy

$$\Theta_{1'} = \sum_{a=1}^{N} m_a \Big(x'^{\,2}_{a2} + x'^{\,2}_{a3}\Big), \quad \Theta_{2'} = \sum_{a=1}^{N} m_a \Big(x'^{\,2}_{a1} + x'^{\,2}_{a3}\Big), \quad \Theta_{3'} = \sum_{a=1}^{N} m_a \Big(x'^{\,2}_{a1} + x'^{\,2}_{a2}\Big), \tag{2.5.18}$$

azaz az egyes főtengelyekre vonatkozó tehetetlenségi nyomatékokhoz az egyes részecskék additívan járulnak hozzá, mindegyik a tehetetlen tömege és a főtengelytől mért merőleges távolsága négyzetének szorzatával, a tehetetlen tömegének a főtengelyre vonatkoztatott másodrendű nyomatékával.

Ezek a tehetetlenségi tenzor mátrixának a Θ' sajátértékei, amelyeket a

$$\mathrm{Det}\left(\Theta_{i,j} - \Theta'\delta_{i,j}\right) = 0 \tag{2.5.19}$$

egyenlet megoldásával lehet megtalálni. A 3 független $\Theta' = \Theta_{i'}$ $(i' = 1, 2, 3)$ sajátértéknek, azaz fő tehetetlenségi nyomatéknak megfelelő, egységhosszúságú sajátvektorok, $\mathbf{n}^{(i')}$ jelölik ki a 3 főtengely irányát, ezek a

$$\sum_{j=1}^{3}\left(\Theta_{i,j} - \Theta_{i'}\delta_{i,j}\right)n_j^{(i')} = 0 \tag{2.5.20}$$

homogén lineáris algebrai egyenletrendszer megoldásai.

A fő tehetetlenségi nyomatékok kifejezéséből következik az is, hogy $\Theta_{i'} \geq 0$, azaz **a fő tehetetlenségi nyomatékok nem negatívak.** Segítségükkel a forgási energia alakja:

$$T_{\mathrm{rot}} = \sum_{i'=1}^{3} \frac{1}{2}\Theta_{i'}\omega_{i'}^2. \tag{2.5.21}$$

Egy szabadon mozgó merevtestet, amelynek mindhárom fő tehetetlenségi nyomatéka különböző, **aszimmetrikus pörgettyűnek** nevezünk. Ha két fő tehetetlenségi nyomaték megegyezik, akkor **a pörgettyű tengelyszimmetrikus** azon tengely körüli forgatásokra nézve, amelyik tengelyhez a nem elfajult fő tehetetlenségi nyomaték tartozik. Ha mindhárom fő tehetetlenségi nyomaték megegyezik, akkor **a pörgettyű gömbszimmetrikus.** A szabad mozgást végző pörgettyű Lagrange-függvénye

$$L(\mathbf{V}, \omega) = \frac{1}{2}M\mathbf{V}^2 + \sum_{i'=1}^{3} \frac{1}{2}\Theta_{i'}\omega_{i'}^2. \tag{2.5.22}$$

Merevtest impulzusmomentuma. A K laboratóriumi inerciarendszerben a merevtest $\mathbf{J}$ impulzusmomentuma a részecskéi pályaimpulzusmomentumainak az összege:

$$\begin{aligned}
\mathbf{J} &= \sum_{a=1}^{N} m_a \mathbf{r}_a \times \mathbf{v}_a = \sum_{a=1}^{N} m_a(\mathbf{R} + \mathbf{r}'_a) \times (\mathbf{V} + \omega \times \mathbf{r}'_a) \\
&= M\mathbf{R} \times \mathbf{V} + \sum_{a=1}^{N} m_a \mathbf{r}'_a \times \mathbf{V} + \mathbf{R} \times \left(\omega \times \sum_{a=1}^{N} m_a \mathbf{r}'_a\right) + \sum_{a=1}^{N} m_a \mathbf{r}'_a \times (\omega \times \mathbf{r}'_a).
\end{aligned} \tag{2.5.23}$$

Itt a második és a harmadik tag eltűnik a jobb oldalon, mert az egyik a TKP sebességét, a másik a TKP helyzetvektorát tartalmazza a TKP-i rendszerben, s azok nullvektorok. Az utolsó tag, a vektori szorzatokra vonatkozó

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \mathbf{b}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) - \mathbf{c}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) \tag{2.5.24}$$

azonosságot felhasználva,

$$\mathbf{J}_{\mathrm{rot}} = \sum_{a=1}^{N} m_a \left[\omega {r'_a}^2 - \mathbf{r}'_a(\omega \cdot \mathbf{r}'_a)\right] \tag{2.5.25}$$

alakot ölt. Ez a merevtestnek a TKP-ja körüli forgásából származó impulzusmomentuma. A merevtest teljes $\mathbf{J}$ impulzusmomentuma a TKP $\mathbf{L}_{\mathrm{TKP}}$ pályaimpulzusmomentumának és a TKP körüli forgásból származó $\mathbf{J}_{\mathrm{rot}}$ impulzusmomentumnak a vektori összege:

$$\mathbf{J} = \mathbf{L}_{\mathrm{TKP}} + \mathbf{J}_{\mathrm{rot}} = \mathbf{R} \times M\mathbf{V} + \mathbf{J}_{\mathrm{rot}}. \qquad (2.5.26)$$

A forgásból származó impulzusmomentum komponensei a merevtesthez rögzített K' rendszerben:

$$J_{\mathrm{rot}\ i} = \sum_{j=1}^{3} \omega_j \sum_{a=1}^{N} m_a ({r'_a}^2 \delta_{i,j} - r'_{ai} r'_{aj}) = \sum_{j=1}^{3} \Theta_{ij}\omega_j, \qquad (2.5.27)$$

ill. ha főtengely-irányokban választjuk a K' rendszer koordinátatengelyeit, akkor

$$J_{\mathrm{rot}\ i'} = \Theta_{i'}\omega_{i'}, \qquad (i' = 1, 2, 3) \qquad (2.5.28)$$

ahol nincsen összegzés az i' indexre.

Merevtest mozgásegyenletei. Tegyük fel, hogy a merevtestre ható külső erők eredője $\mathbf{F}$ a K laboratóriumi inerciarendszerben. Ekkor az impulzustételt a K inerciarendszerben felírva, a TKP mozgásegyenletét nyerjük:

$$\frac{d\mathbf{P}}{dt} = \mathbf{F}, \qquad (2.5.29)$$

ahol $\mathbf{P} = M\mathbf{V}$ a merevtest teljes impulzusa. Tegyük fel, hogy az eredő $\mathbf{F}$ külső erő nem függ attól, hogy a merevtest hogyan fordul el a TKP-ja körül, hanem csak a tömegközéppont $\mathbf{R}$ helyzetvektorától függ. Ekkor a TKP fenti mozgásegyenlete a merevtest TKP-ja $\mathbf{R}$ helyzetvektorának időfüggését (adott kezdeti feltételek esetén) egyértelműen meghatározza és lecsatolódik azokról a mozgásegyenletekről, amelyek a merevtest forgását írják le.

A merevtestnek a TKP-ja körüli forgását a 3 forgási szabadsági foknak megfelelő szög időbeli változása határozza meg. A megfelelő további mozgásegyenletek az impulzusmomentum-tételből adódnak:

$$\frac{d\mathbf{J}}{dt} = \mathbf{M}, \qquad (2.5.30)$$

ahol $\mathbf{M}$ a merevtestre ható külső forgatónyomaték. Ha a haladó mozgás lecsatolódik a forgásról, akkor ez 3 darab csatolt, közönséges másodrendű differenciálegyenlet annak a 3 szögnek az időfüggésére, amelyeket a merevtesthez rögzített K' rendszer tengelyei zárnak be a K inerciarendszer megfelelő tengelyeivel. A mozgásegyenlet bal oldalán természetesen fel kell használni a haladó mozgás mozgásegyenleteinek megoldását a TKP pályamozgásából származó $\mathbf{L}_{\mathrm{TKP}}$ pályaimpulzusmomentum kiszámításakor, hiszen $\mathbf{J} = \mathbf{L}_{\mathrm{TKP}} + \mathbf{J}_{\mathrm{rot}}$. A merevtest mozgásegyenleteinek explicit alakjával és azok megoldásával általános esetben nem foglalkozunk. Alább megvizsgáljuk néhány esetben a merevtest szabad mozgását, ill. a merevtest rögzített tengely körüli forgását.

Merevtest szabad mozgása. Szabad mozgásról akkor beszélünk, ha a merevtestre ható erők $\mathbf{F}$ eredője és a merevtestre ható külső forgatónyomatékok $\mathbf{M}$ eredője egyaránt zérus. Ekkor a merevtest mozgásegyenletei,

$$\frac{d\mathbf{P}}{dt} = 0, \qquad \frac{d\mathbf{J}}{dt} = 0 \qquad (2.5.31)$$

a merevtest $\mathbf{P}$ impulzusának és $\mathbf{J}$ impulzusmomentumának a megmaradását fejezik ki a K inerciarendszerben. Ekkor a merevtesttel együtthaladó, nem forgó K_0 rendszer egyenesvonalú egyenletes mozgást végez, azaz inerciarendszer. Válasszuk ennek origóját a merevtest egyenesvonalú egyenletes mozgást végző TKP-jában. Nézzük a merevtest TKP körüli forgását ebből a K_0 inerciarendszerből. Az impulzusmomentum megmaradása, azaz

$$\frac{d\mathbf{J}}{dt} = 0 \tag{2.5.32}$$

a K_0 inerciarendszerben is változatlanul érvényes. Ekkor a $\mathbf{J} = \mathbf{J}_{\text{rot}}$ vektor állandó ($\mathbf{L}_{\text{TKP}} = 0$), nagyság és irány szerint.

Vegyük sorra a különböző merevtestek szabad mozgását:

1. *Gömbi pörgettyű:* valamennyi fő tehetetlenségi nyomaték megegyezik, $\Theta_{1'} = \Theta_{2'} = \Theta_{3'} \equiv \Theta \geq 0$, ami azt jelenti, hogy $\mathbf{J} = \Theta\omega$ alakú, egyszerű lineáris összefüggés áll fenn az impulzusmomentum és a szögsebesség vektora között. A szögsebesség tehát nagyság és irány szerint állandó és iránya megegyezik a megmaradó impulzusmomentum vektorának irányával.

2. *Rotátor.* A **rotátor** olyan speciális merevtest, amelynek részecskéi egy egyenes mentén helyezkednek el. Legyen ez az egyenes a K' rendszer x'_3 tengelye. Ekkor $\Theta_{3'} = 0$, ami azt jelenti, hogy (a szögsebesség végességét feltételezve) az impulzusmomentumnak a rotátor tengelye irányába mutató, $J_{3'}$ komponense zérus. A rotátor impulzusmomentuma tehát merőleges a rotátor tengelyére. Mivel egy egyenesnek nincsen olyan tulajdonsága, amelynek alapján beszélni lehetne arról, hogy önmaga, mint tengely körül elfordul, ezért azt kell mondani, hogy ilyen irányú forgás nem lehetséges. Ezért a rotátor szögsebességének a rotátor tengelye irányába mutató komponense zérus $\omega_{3'} = 0$. A rotátor szögsebessége tehát merőleges a rotátor tengelyére. A rotátor tengelyére merőleges, a rotátor TKP-ján átmenő tengelyekre vonatkoztatott fő tehetetlenségi nyomatékok azonosak, $\Theta_{1'} = \Theta_{2'} \equiv \Theta$, így a rotátor impulzusmomentuma és szögsebességvektora egy irányba mutat, $\mathbf{J} = \Theta\omega$.

3. *Szimmetrikus pörgettyű.* A szimmetrikus pörgettyű TKP-ra vonatkoztatott fő tehetelenségi nyomatékai közül 2 azonos, legyenek ezek $\Theta_{1'} = \Theta_{2'} = \Theta$ és a harmadik különböző, $\Theta_{3'} \neq \Theta$. Válasszuk úgy a szimmetrikus pörgettyű x'_3 szimmetriatengelyére merőleges $1'$ és $2'$ koordinátatengelyeket, hogy a megmaradó $\mathbf{J}$ impulzusmomentum az $(1', 3')$ síkba essen. Ekkor

$$J_{1'} = \Theta_{1'}\omega_{1'}, \qquad J_{3'} = \Theta_{3'}\omega_{3'}. \tag{2.5.33}$$

Ha az impulzusmomentum vektora θ szöget zár be a pörgettyű x'_3 szimmetriatengelyével, akkor a pörgettyű szögsebességének el nem tűnő komponensei:

$$\omega_{1'} = \frac{J_{1'}}{\Theta_{1'}} = \frac{J\sin\theta}{\Theta_{1'}}, \qquad \omega_{3'} = \frac{J_{3'}}{\Theta_{3'}} = \frac{J\cos\theta}{\Theta_{3'}}. \tag{2.5.34}$$

Az ω szögsebességvektor tehát benne van a $\mathbf{J}$ impulzusmomentum és a pörgettyű x'_3 tengelye által meghatározott síkban.

Bontsuk fel a szögsebesség vektorát a térben rögzített $\mathbf{J}$ irányába mutató és a pörgettyű tengelyének irányába mutató összetevőkre. Ebben a felbontásban a szögsebesség $\mathbf{J}$ irányú komponense,

$$\omega_{\text{pr}} = \frac{\omega_{1'}}{\sin\theta} = \frac{J}{\Theta_{1'}}. \tag{2.5.35}$$

Ez az időben állandó, ún. **precessziós szögsebesség** felelős azért, hogy a pörgettyű x'_3 szimmetriatengelye változtatja a helyzetét az impulzusmomentumhoz képest a térben a mozgás során. A szimmetriatengely állandó ω_{pr} szögsebességgel „körbejár" az impulzusmomentum rögzített iránya körül, ezt nevezzük **precessziónak.**

4. Az *aszimmetrikus pörgettyű* esetével nem foglalkozunk, hanem az érdeklődő Olvasót a tankönyvekre utaljuk.

2.5.11 Merevtest tengely körüli forgása

Ha a merevtest egy, a K inerciarendszerben rögzített tengely körül forog, akkor nem végez haladó mozgást, szögsebességének és impulzusmomentumának pedig csak a forgástengely (a továbbiakban z-tengely) irányába eső komponense nem zérus, $\omega_z \neq 0$, $J_z \neq 0$. Válasszuk K-ban a Descartes-koordinátarendszerünk origóját a forgástengely O pontjának. Ekkor a $J_z = \sum_{j=1}^{3} \Theta_{3,j}\omega_j = \Theta_{z,z}\omega_z$ összefüggés alapján a mozgásegyenlet

$$\frac{dJ_z}{dt} \equiv \Theta_{z,z}\frac{d\omega_z}{dt} = M_z, \quad \text{azaz} \quad \Theta_{z,z}\beta_z = M_z \tag{2.5.1}$$

alakot ölt, ahol β_z és M_z rendre a z-tengely körüli szöggyorsulás ill. a merevtestre ható külső forgatónyomaték z-irányú komponense.

A tengely körül forgó merevtest egy speciális esete a fizikai inga. A fizikai inga a Föld nehézségi terében, vízszintes (y-tengely) forgástengely körül kis, φ szögelfordulásokat szenvedő merevtest. A Föld a fizikai inga minden részécskéjére $\mathbf{F}_a = m_a\mathbf{g}$ függőlegesen lefelé mutató erőt fejt ki. Legyen a másik vízszintes koordinátatengely az x-tengely, a z tengely pedig mutasson függőlegesen felfelé. Ekkor az $\mathbf{r}_a$ helyzetvektorú anyagi pontra ható erő forgatónyomatékának y-komponense:

$$M_{ay} = z_aF_{ax} - x_aF_{az} = -x_a(-m_ag) = m_agx_a, \tag{2.5.2}$$

ahol g a nehézségi gyorsulás nagysága. A merevtestre ható eredő forgatónyomaték y-irányú komponense ezért:

$$M_y = g\sum_{a=1}^{N} m_ax_a = XMg, \tag{2.5.3}$$

ahol X a merevtest TKP-jának x-koordinátája. Legyen a TKP a forgástengelytől s távolságban, és legyen φ az a szög, amit a TKP-ból a forgástengelyre állított merőleges a z-tengely negatív félegyenesével bezár és az előjele pozitív, ha az y tengely irányával az elfordulás jobbcsavart alkot. Ekkor $X = -s\sin\varphi$ és az impulzusmomentumtételből a mozgásegyenlet:

$$\Theta_{yy}\frac{d^2\varphi}{dt^2} = -Mgs\sin\varphi. \tag{2.5.4}$$

Kis szögkitérések ($\sin\varphi \approx \varphi$) esetén a mozgásegyenlet a harmonikus rezgőmozgás egyenletének alakját ölti:

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} + \Omega^2\varphi = 0, \tag{2.5.5}$$

ahol a kisrezgések körfrekvenciáját a

$$\Omega^2 = \frac{Mgs}{\Theta_{yy}} \geq 0 \tag{2.5.6}$$

összefüggés határozza meg. A szögkitérés az idő függvényében tehát

$$\varphi(t) = \varphi_0\cos(\Omega t + \alpha) \tag{2.5.7}$$

alakú, ahol a φ_0 „amplitudót” és az α fáziseltolódást a kezdeti feltételek határozzák meg.

2.5.12 Rugalmasan deformálható testek

Deformáció, azaz alakváltozás. Foglalkozzunk a **szilárdtestek deformációjának modelljével**. Nulladik közelítésben azt mondhatjuk, hogy a szilárdtest egy merevtest. Az egyszerűség kedvéért tegyük fel, hogy a szilárdtest mint egész nem végez sem haladó, sem forgó mozgást, és „üljünk bele" abba a K inerciális vonatkoztatási rendszerbe, amelyben a szilárdtest, mint egész, nyugalomban van. Ez azt jelenti, hogy szilárdtest részecskéi mind egy meghatározott egyensúlyi helyzetet foglalnak el (eltekintünk a részecskék hőmozgásától, stb.). **A deformáció, az alakváltozás, abban nyilvánul meg, hogy a részecskék kimozdultak egyensúlyi helyzetükből valamilyen külső behatásra. A deformációt rugalmasnak nevezzük, ha a következő tulajdonsággal rendelkezik: ha megszűnik a külső behatás, ami előidézte a deformációt, akkor a deformćió is megszűnik egy bizonyos idő elteltével, és a test részecskéi újra felveszik a K rendszerben eredeti egyensúlyi helyzetüket**. A tapasztalat azt mutatja, hogy általában kis deformációk esetén lesz a deformáció rugalmas. Erősebb deformációk esetén a testek maradandó alak- ill. szerkezeti változást szenvedhetnek.

Hogyan írhatjuk le kinematikailag a deformációt ebben a modellben? Azzal, hogy megadjuk a testet alkotó egyes részecskéknek, azaz anyagi pontoknak az egyensúlyi helyzetükhöz képesti $\mathbf{s}_a(t)$ $(a = 1, 2, \ldots, N)$ elmozdulását a t idő függvényében:

$$\mathbf{s}_a(t) = \mathbf{r}_a(t) - \mathbf{r}_{a0} \tag{2.5.1}$$

ahol $\mathbf{r}_a(t)$ a részecskék helyzetvektora a t pillanatban, $\mathbf{r}_{a0}$ pedig a helyzetvektoruk az egyensúlyi helyzetükben. Az $\mathbf{s}_a(t)$ elmozdulásvektorok idő szerinti első és második deriváltja, $\frac{d\mathbf{s}_a(t)}{dt}$ és $\frac{d^2\mathbf{s}_a}{dt^2}$, rendre az egyes részecskék egyensúlyi helyzet körüli mozgásának sebességét és gyorsulását adják meg.

Deformáció folytonos közegben. A szilárdtestek deformációját nemcsak a fenti mikroszkopikus modell alapján tudjuk leírni. Tekintsük a deformálható testet folytonos közegnek. Ekkor nem az egyes részecskéknek az elmozdulását adjuk meg, hanem a tér egyes $\mathbf{r}$ helyzetvektorú pontjai környezetében elhelyezkedő kicsiny, makroszkopikus anyagdarabkáknak az egyensúlyi helyzetükhöz képesti $\mathbf{s}(\mathbf{r}, t)$ elmozdulásait, az úgynevezett kitérésvektormezőt adjuk meg minden t időpillanatban. Az egyszerűség kedvéért a továbbiakban elfelejtkezhetünk arról, hogy a kitérés makroszkopikus anyagdarabkák elmozdulása és úgy tekinthetjük, mintha az anyagot folytonosan elosztott, kontinuum sok anyagi pont alkotná. Az alakváltozás további kinematikai jellemzésére $\frac{\partial\mathbf{s}(\mathbf{r},t)}{\partial t}$ sebességmező, és a $\frac{\partial^2\mathbf{s}(\mathbf{r},t)}{\partial t^2}$ gyorsulás vektormező szolgál. Ezek a vektormezők példák a közeget jellemző térmennyiségekre.

Nyugvó folyadékokban és a gázokban is lehetséges rugalmas deformáció, amit hasonlóan írhatunk le.

A deformáció tenzora. Az anyag deformációját lokálisan jellemezzük azzal, hogy a közeg egy tetszőleges A pontjához képest hogyan mozdulnak el a közeg azon B pontjai, amelyek az A pont környezetében helyezkednek el. Így a közeg deformációjának olyan jellemzését kapjuk, amely tetszőleges két anyagi pont egymáshoz képesti helyzetének megváltozását mondja meg.

Legyen eredetileg a közeg A pontja a tér $\mathbf{r}$ helyzetvektorú P pontjában, és a közeg B pontja pedig az $\mathbf{r}+\Delta\mathbf{r}$ helyzetvektorú pontban, ahol $\Delta\mathbf{r}$ tetszőleges, infinitezimális vektor. Rögzített t pillanatban a deformációról az alábbiakat mondhatjuk. Az A pont kitérése az $\mathbf{s}(\mathbf{r})$ vektor, a B pont kitérése az $\mathbf{s}(\mathbf{r}+\Delta\mathbf{r})$ vektor. Utóbbinak a Descartes-féle komponenseit (a koordinátairányokat a rögzített $\mathbf{E}_i$ $i = 1, 2, 3$, páronként ortogonális egységvektorok jelölik ki) Taylor-sorba fejthetjük az A és B deformáció előtti relatív helyzetét meghatározó

$\Delta\mathbf{r}$ vektor komponensei szerint:

$$s_j(\mathbf{r}+\Delta\mathbf{r}) = s_j(\mathbf{r}) + \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial s_j}{\partial r_i}\Delta r_i + \mathcal{O}((\Delta r_i)^2), \quad j=1,2,3. \tag{2.5.2}$$

A szomszédos A és B pontok kitérései közötti különbség tehát:

$$\Delta s_j(\mathbf{r}) = \sum_{i=1}^{3} A_{ji}(\mathbf{r})\Delta r_i, \tag{2.5.3}$$

ahol az

$$A_{ij} = \frac{\partial s_j}{\partial r_i} \tag{2.5.4}$$

2-indexes mennyiség teljesen meghatározza a közeg relatív deformációját az $\mathbf{r}$ térbeli pont környezetében. Matematikai szempontból az $\mathbf{A}: \ \Delta\mathbf{r} \to \Delta\mathbf{s}$ leképezés a P pontban értelmezett helyzetvektorok V_P terének önmagára való lineáris leképezése, amely független a koordinátarendszer megválasztásától. Ha képezzük a

$$\Delta\mathbf{r}\cdot\Delta\mathbf{s} = \sum_{j=1}^{3} \Delta r_j \Delta s_j = \sum_{i,j=1}^{3} A_{ji}(\mathbf{r})\Delta r_j \Delta r_i \tag{2.5.5}$$

skalárszorzatot, amelynek értéke független a koordinátarendszer megválasztásától, akkor látjuk, hogy a $\mathbf{A}$ leképezés a koordinátarendszer megválasztásától függetlenül definiált,

$$\mathbf{A}: V_P \times V_P \to R \tag{2.5.6}$$

mindkét változójában lineáris leképezésként is felfogható. Az ilyen leképezést **tenzornak** nevezzük. Mint a példa is mutatja, ahogy a vektort a komponenseivel, úgy a tenzort a tenzorkomponenseivel adhatjuk meg rögzített $\mathbf{E}_i \in V_P$ bázisvektorok használata esetén. Ahogy a vektorkomponenseket oszlopvektorba, úgy a tenzorkomponenseket mátrixba (példánkban A_{ij}) rendezhetjük.

Valódi deformáció és elfordulás. A tenzorkomponensek A_{ji} mátrixát mindig egyértelműen felbonthatjuk egy szimmetrikus A^{s}_{ji} és egy antiszimmetrikus A^{a}_{ji} mátrix összegére:

$$\begin{aligned} &A_{ji} = A^{\mathrm{s}}_{ji} + A^{\mathrm{a}}_{ji}, \quad A^{\mathrm{s}}_{ji} = \frac{1}{2}\Big(A_{ji} + A_{ij}\Big), \quad A^{\mathrm{a}}_{ji} = \frac{1}{2}\Big(A_{ji} - A_{ij}\Big), \\ &A^{\mathrm{s}}_{ji} = A^{\mathrm{s}}_{ij}, \quad A^{\mathrm{a}}_{ji} = -A^{\mathrm{a}}_{ij}. \end{aligned} \tag{2.5.7}$$

Ezen túlmenően minden szimmetrikus mátrix felbontható egyértelműen egy zérus spúrral rendelkező és egy diagonális mátrix összegére:

$$A^{\mathrm{s}}_{ji} = \left(A^{\mathrm{s}}_{ji} - \frac{1}{3}\delta_{j,i}\mathrm{SpA}\right) + \frac{1}{3}\delta_{\mathrm{j,i}}\mathrm{SpA}. \tag{2.5.8}$$

A fenti felbontások egyúttal a tenzorok egyértelmű felbontásai is, mert meg lehet mutatni, hogy nem függenek a bázis megválasztásától. (Pl. ha egy tenzor komponenseinek mátrixa valamely bázisban szimmetrikus, akkor minden bázisban szimmetrikus, stb.)

A szimmetrikus

$$\epsilon_{ij} \equiv A^{\mathrm{s}}_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial s_i}{\partial r_j} + \frac{\partial s_j}{\partial r_i}\right) \tag{2.5.9}$$

mátrix a közeg tiszta deformációját határozza meg, ezért az ϵ tenzort **a deformáció tenzorának** nevezzük. A tenzorkomponensek jelentése:

1. **A deformációs tenzor spúrja**

$$\Theta \equiv \mathrm{Sp}A = \mathrm{Sp}\epsilon = \sum_{i=1}^{3} \epsilon_{ii} = \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial s_i}{\partial r_i}, \tag{2.5.10}$$

a közeg pontjai által kijelölt ΔV infinitezimális térfogatelemnek a deformáció következtében bekövetkező tágulását ($\Theta > 0$) ill. összezsugorodását ($\Theta < 0$) méri.

Transzformáljuk ennek belátásához az ϵ szimmetrikus tenzort főtengelyre. Tekintsük az $a^{(i)}\mathbf{E}_i$, P-ben felvett, páronként ortogonális, infinitezimális, főtengelyek irányába mutató vektorok végpontjai által kijelölt infinitezimális téglatest térfogatának megváltozását:

$$\Delta V = a^{(1)}a^{(2)}a^{(3)} \to \Delta V' = \prod_{i=1}^{3}\left(a^{(i)} + \epsilon_{ii}a^{(i)}\right) \approx \Delta V\left(1 + \sum_{i=1}^{3}\epsilon_{ii}\right), \tag{2.5.11}$$

ahonnan a relatív térfogatváltozás:

$$\frac{\Delta V' - \Delta V}{\Delta V} = \sum_{i=1}^{3}\epsilon_{ii} = \Theta. \tag{2.5.12}$$

Tehát Θ, azaz a deformációs tenzor spúrja a relatív térfogatváltozás, idegen szóval térfogati expanzió.

A fentiekben azt is felhasználtuk, hogy a főtengelyek $\mathbf{E}_i$ irányaiban az anyagdarab $a^{(i)}$ hossza

$$\frac{a^{(i)\prime} - a^{(i)}}{a^{(i)}} = \epsilon_{ii} \tag{2.5.13}$$

relatív hosszváltozást szenved a deformáció során.

A deformációs tenzor diagonális elemei tehát az adott irányú relatív megnyúlást ($\epsilon_{ii} > 0$) ill. relatív összehúzódást ($\epsilon_{ii} < 0$) jellemzik.

2. **A deformációs tenzor nem diagonális elemei az ún. nyírást írják le.**

Tekintsük a tiszta deformáció tenzora komponenseinek mátrixát tetszőleges $\mathbf{E}_i$ ortonormált bázisban. Tegyük fel, hogy csak a nem-diagonális elemek különböznek zérustól. Az $a^{(i)}\mathbf{E}_i$ vektor hegye a $j \neq i$ irányban $\Delta s_j = \epsilon_{ji}a^{(i)}$-vel mozdul el, az $a^{(j)}\mathbf{E}_j$ vektor hegye pedig $\Delta s_i = \epsilon_{ij}a^{(j)}$-vel mozdul el az i irányban. Az $a^{(i)}\mathbf{E}_i$, $a^{(j)}\mathbf{E}_j$ vektorok által kijelölt infinitezimális téglalap tehát az (i,j) koordinátasíkban egy általános paralelogrammává deformálódik, amelynek oldalélei az eredeti oldalélekkel olyan φ_{ji}, ill. φ_{ij} szögeket zárnak be, hogy

$$\mathrm{tg}\varphi_{ij} = \epsilon_{ij}, \quad \mathrm{tg}\varphi_{ji} = \epsilon_{ji} = \epsilon_{ij}, \tag{2.5.14}$$

azaz a deformált paralelogrammának a csúcsszöge $\frac{\pi}{2} - \varphi_{ji} - \varphi_{ij} = \frac{\pi}{2} - 2\varphi_{ij}$ lesz. A deformációnak ezt a fajtáját nevezzük nyírásnak.

Végül megmutatjuk, hogy **az A_{ij} deformációs tenzor antiszimmetrikus része a közeg infinitezimális darabkájának merevtestként történő elfordulását írja le.**

Az antiszimmetrikus tenzor komponenseiből képezhetjük a φ axiálvektor komponenseit:

$$\varphi_k = \sum_{i,j=1}^{3}\epsilon_{kij}A^{\mathrm{a}}_{ji} = \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{3}\epsilon_{kij}\left(\frac{\partial s_j}{\partial r_i} - \frac{\partial s_i}{\partial r_j}\right), \tag{2.5.15}$$

amelynek segítségével az antiszimmetrikus tenzor komponensei:

$$A^{\mathrm{a}}_{ij} = \sum_{k=1}^{3} \epsilon_{jik}\varphi_k. \tag{2.5.16}$$

Könnyű megmutatni, hogy az antiszimmetrikus A^{a}_{ij} tenzor az A pontból kiinduló tetszőleges $\Delta\mathbf{r}$ vektort olyan $\Delta\mathbf{s}$ vektorba képezi le, amelyre

$$\Delta s_j = \sum_{i=1}^{3} A^{\mathrm{a}}_{ji}\Delta r_i = \sum_{i,k=1}^{3} \epsilon_{ijk}\varphi_k\Delta r_i = \sum_{i,k=1}^{3} \epsilon_{jki}\varphi_k\Delta r_i, \tag{2.5.17}$$

azaz

$$\Delta\mathbf{s} = \varphi \times \Delta\mathbf{r}. \tag{2.5.18}$$

Ez azt jelenti, hogy valamennyi A-ból kiinduló $\Delta\mathbf{r}$ infinitezimális vektort $|\varphi|$ szöggel forgatjuk el a $\frac{\varphi}{|\varphi|}$ irány körül a jobbkéz-szabálynak megfelelően. **A deformáció általános tenzorának antiszimmetrikus része tehát az anyagdarabkák lokális elfordulását jellemzi.**

A mechanikai feszültség tenzora. A deformált testekben kétféle erőhatás lép fel. **A hosszú hatótávolságú erők ún. térfogati erőket eredményeznek, amelyeknek nagysága arányos a makroszkopikus anyagdarabka térfogatával.** Ennek oka, hogy a dV infinitezimális térfogatelemtől távol elhelyezkedő bármely részecske a térfogatelem minden részecskéjére kb. ugyanazt az erőt fejti ki, a részecskék száma a térfogatelemben pedig arányos a térfogatelem nagyságával. Így a dV térfogatelemre ható térfogati erő nagysága $\mathbf{f}dV$, ahol $\mathbf{f}$ az ún. **térfogati erősűrűség. A részecskék között fellépő rövid hatótávolságú erők felületi erőket eredményeznek.** Az anyagban kiszemelt valamely $\mathbf{n}$ „külső" normálisú, *df* nagyságú felületelemnek a „belső" oldalán elhelyezkedő részecskékre ható $d\mathbf{F}_{\mathrm{fel}}$ erő, amelyet a felületelem külső oldalán elhelyezkedő részecskék fejtenek ki, nyilván arányos a felület mentén elhelyezkedő részecskék számával, azaz magával a felületelem nagyságával. Ha felveszünk egy ΔV, kicsiny térfogatú anyagdarabot és feltesszük, hogy az egyensúlyban van a térfogati és a felületi erők hatására, akkor nem gyorsul, azaz

$$\int_{\Delta V} \mathbf{f}dV + \int_f d\mathbf{F}_{\mathrm{fel}} = 0 \tag{2.5.19}$$

írható. Ez azt jelenti matematikailag, hogy az első tagban szereplő térfogati integrál minusz egyszerese felírható felületi integrál alakjában. A matematika vektoranalízisnek nevezett fejezete értelmében, ez azt jelenti, hogy létezik olyan $\sigma_{ij}(\mathbf{r})$ $(i,j=1,2,3)$ másodrendű tenzor, amelynek segítségével

$$\int_f dF_{\mathrm{fel}\,i} = -\int_{\Delta V} f_i dV = \int_{\Delta V} \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial\sigma_{ij}}{\partial r_j} dV = \int_f \sum_{j=1}^{3} \sigma_{ij} n_j df, \tag{2.5.20}$$

ahol $\mathbf{r}$ annak a pontnak a helyzetvektora, amelynek környezetében a ΔV térfogatelemet felvettük. Meg lehet mutatni, hogy a mechanikai feszültség tenzora szimmetrikus:

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ji}. \tag{2.5.21}$$

A feszültségtenzor σ_{ij} komponense az n_j normálisú, egységnyi felületre ható felületi erőnek az i irányú komponensével egyenlő. Pontosabban: az n normálisú, *df* felületelemre, a normális oldalán elhelyezkedő részecskék által kifejtett felületi erő i irányú komponense $\sum_{j=1}^{3} \sigma_{ij} n_j df$. A feszültségtenzor diagonális komponenseit húzó-, nyomó feszültségeknek, a nem diagonális komponenseit pedig nyíró feszültségeknek nevezzük.

Hooke törvénye. A deformációt teljesen rugalmasnak nevezzük, ha a mechanikai feszültség tenzora a közeg adott pontjában, adott időpillanatban csak a tiszta deformáció tenzorának ezen a helyen, ebben a pillanatban felvett értékétől függ. Kis deformációk esetén feltehetjük, hogy a kapcsolat a feszültség és deformáció között lineáris. Ha az anyagban deformálatlan állapotában nincsenek feszültségek, akkor a lineáris kapcsolat nem tartalmaz tiszta tagot, azaz

$$\sigma_{ij}(\mathbf{r},t) = \sum_{k,l=1}^{3} c_{ijkl}\epsilon_{kl}(\mathbf{r},t), \tag{2.5.22}$$

ahol c_{ijkl} a közeg rugalmas tulajdonságait jellemző anyagállandók. Ez Hooke törvénye általános alakban. A közeget izotrópnak nevezzük, ha a fenti lineáris kapcsolat

$$\sigma_{ij} = 2\mu\epsilon_{ij} + \lambda\Theta\delta_{i,j} = 2\mu\left(\epsilon_{ij} - \frac{1}{3}\mathrm{Sp}\epsilon\delta_{i,j}\right) + \frac{3\lambda+2\mu}{3}\mathrm{Sp}\epsilon\delta_{i,j} \tag{2.5.23}$$

alakú, ahol csak két független anyagállandó, λ és μ szerepel, és $\theta = \sum_{i=1}^{3}\epsilon_{ii}$ a tiszta deformáció tenzorának spúrja, azaz a térfogati expanzió. Látszik, hogy tiszta térfogati expanzió esetén a feszültség tenzora minden koordinátarendszerben diagonális, és mindhárom diagonális eleme megegyezik; tiszta nyirás esetén pedig $\sigma_{ij} = 2\mu\delta_{i,j}$ $(i \neq j)$ állna fenn.

Példa: Rúd nyújtása. Tegyük fel, hogy az x tengellyel párhuzamos rudat egyik végén $\mathbf{F}$, másik végén $-\mathbf{F}$ állandó erővel megnyújtott állapotban tartjuk. Ha a rúd keresztmetszete A, akkor a rúd egyensúlyának feltétele alapján (bármely rúddarabkára ható erők eredője nulla):

$$\sigma_{xx}(x,y,z) = \text{áll.} = \frac{F}{A} \tag{2.5.24}$$

a rúd bármely pontjában. Ha elhanyagoljuk a haránt irányú összehúzódást és a nyírást, akkor a deformációs tenzornak csak az ϵ_{xx} komponense különbözik zérustól:

$$\epsilon_{xx} = \frac{\delta L}{L} \tag{2.5.25}$$

ez a rúd relatív megnyúlása (L a rúd hossza, δL a rúd megnyúlása). Ekkor a feszültség és a deformáció közötti lineáris kapcsolat

$$\frac{F}{A} = Y\frac{\delta L}{L}, \qquad Y = \frac{3\lambda+2\mu}{3} \tag{2.5.26}$$

alakot ölt, ahol Y a Young-modulus. Ez **Hooke törvényének** legegyszerűbb alakja: **a feszültség arányos a relatív megnyúlással a rúd bármely pontjában.**

2.5.13 Rugalmas hullámok. Hang

Haladó hullámok. Hang. Ahelyett, hogy általánosan tárgyalnánk rugalmas hullámok terjedését rugalmasan deformálható közegekben, szorítkozzunk az x-tengellyel párhuzamosan elhelyezkedő rugalmas rúdban terjedő longitudinális hullámokra. Tegyük fel, hogy Hooke törvénye értelmében

$$\sigma_{xx}(x,t) = Y\epsilon_{xx}(x,t) \tag{2.5.1}$$

a rúd mentén tetszőleges x helyen, tetszőleges t pillanatban. Tegyük fel, hogy a feszültségtenzor többi komponensei zérussal egyenlők. Írjuk fel a rúd infinitezimális dx hosszúságú,

df keresztmetszetű darabkájának mozgásegyenletét. Ezen darabka tehetetlen tömege $dm = \rho dxdf$, ahol ρ a rúd tömegsűrűsége. A továbbiakban a sűrűségről is feltesszük, hogy állandó (térben és időben). Legyen a kiszemelt anyagdarabkának a kitérése $s_x(x,t)$, a gyorsulása $\frac{\partial^2 s_x(x,t)}{\partial t^2}$, úgyhogy a rúddarabka impulzusváltozási gyorsasága:

$$\rho \frac{\partial^2 s_x(x,t)}{\partial t^2} dxdf. \tag{2.5.2}$$

Másrészt a rúddarabkára a feszültségből származó

$$\sigma_{xx}(x+dx,t)df - \sigma_{xx}(x,t)df = \frac{\partial \sigma_{xx}(x,t)}{\partial x} dxdf = Y \frac{\partial \epsilon_{xx}(x,t)}{\partial x} dxdf = Y \frac{\partial^2 s_x(x,t)}{\partial x^2} dxdf \tag{2.5.3}$$

erő hat, ahol felhasználtuk Hooke törvényét és azt, hogy $\epsilon_{xx} = \frac{\partial s_x}{\partial x}$. Ekkor a rúddarabka mozgásegyenlete

$$\left(\frac{1}{c_l^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) s_x(x,t) = 0 \tag{2.5.4}$$

alakot ölt, ahol

$$c_l = \sqrt{\frac{Y}{\rho}} \tag{2.5.5}$$

az úgynevezett longitudinális hangsebesség. A kapott egyenlet a **hullámegyenlet** tipikus alakja. A megoldásai végtelen hosszú rúd esetén az

$$s_x(x,t) = A \cos(\omega t \pm kx + \alpha) \tag{2.5.6}$$

balra $(\omega t + kx)$ ill. jobbra $(\omega t - kx)$ haladó síkhullámok. Mivel a kitérés a hullám terjedési irányával párhuzamos, azért ezt a hullámot **longitudinális hullámnak** nevezzük. A hullám ω körfrekvenciájának és a k hullámszámnak ki kell elégítenie

$$k^2 = \frac{\omega^2}{c_l^2}, \qquad k = \frac{\omega}{c_l} \tag{2.5.7}$$

egyenlőséget ahhoz, hogy a fenti síkhullámok valóban a hullámegyenlet megoldásai legyenek. Erről meggyőződhetünk, ha behelyettesítjük a (2.5.6) függvényt a (2.5.4) hullámegyenletbe.

Szilárdtestekben nemcsak longitudinális, hanem transzverzális rugalmas hullámok is lehetségesek. A rugalmas hullám transzverzális, ha a kitérés merőleges a hullám terjedési irányára. Transzverzális hullám kétféle lehetséges, miután a kitérés a terjedési irányra merőleges síkban két független, egymásra merőleges irány mentén rezeghet. A transzverzális hullámok és a longitudinális hullámok terjedési sebessége általában különböző. Folyadékokban és gázokban csak longitudinális rugalmas hullámok lehetségesek. A deformálható közegekben terjedő rugalmas hullámokat közös néven hangnak nevezzük.

Állóhullámok. Vizsgáljuk még meg a (2.5.4) megoldását véges L hosszúságú rúdon, ha gondoskodunk róla, hogy a rúd végei rögzítettek: $s_x(0,t) = 0$ és $s_x(L,t) = 0$. Ekkor kereshetjük a hullámegyenlet megoldásait

$$s_x(x,t) = f(x)g(t) \tag{2.5.8}$$

szeparált alakban. Ezt visszahelyettesítve a (2.5.4) hullámegyenletbe,

$$\frac{d^2g}{dt^2}\frac{1}{c_l^2 g(t)} = \frac{d^2f}{dx^2}\frac{1}{f(x)} = -k^2 \tag{2.5.9}$$

adódik. $k^2 > 0$ esetén az $f(x)$ és a $g(t)$ függvényekre vonatkozó, független megoldások

$$f(x) = \sin(kx), \text{ ill. } \cos(kx), \quad g(t) = A\cos(\omega t + \alpha) \tag{2.5.10}$$

alakba írhatóak, ahol $\omega = kc_l$. Az $f(x)$-re kapott független megoldások közül csak $f(x) = \sin(kx)$ elégíti ki a rögzített végnek megfelelő határfeltételeket. Az is akkor és csak akkor, ha

$$kL = n\pi \tag{2.5.11}$$

azaz a hullámszám a diszkrét

$$k_n = \frac{n\pi}{L}, \quad n = 1, 2, 3, \ldots \tag{2.5.12}$$

értékek valamelyikét veszi fel. Ez azt jelenti, hogy a félhullámhossz egészszámszor fér rá a rúd L hosszára:

$$\lambda_n = \frac{2\pi}{k_n} = \frac{2L}{n}, \quad L = n\frac{\lambda_n}{2}. \tag{2.5.13}$$

Ennek megfelelően a hullámok körfrekvenciája is diszkrét értékeket vehet csak fel:

$$\omega_n = c_l k_n = n\omega_1, \tag{2.5.14}$$

az $\omega_1 = \frac{\pi}{L}c_l$ alapfrekvencia egészszámú többszöröseit. A kapott megoldások

$$s_x^{(n)}(x,t) = A\cos(\omega_n t + \alpha)\sin(k_n x) = A\cos(n\omega_1 t + \alpha)\sin(nk_1 x) \tag{2.5.15}$$

alakú állóhullámok, amelyek a megoldások teljes rendszerét alkotják. Ez azt jelenti, hogy a végein mereven rögzített rúdon terjedő tetszőleges hullám felbontható ilyen állóhullámok lineáris szuperpozíciójára.

Meg lehet mutatni, hogy $k^2 \le 0$ esetén a (2.5.9) egyenleteknek nincsen korlátos megoldása. Ezért ezt a lehetőséget fizikailag ki kell zárnunk. Az energia megmaradása csak korlátos megoldásokat enged meg.

Függelék

A Koordinátarendszerek

A.1 Globális és lokális koordinátarendszer

Láttuk, hogy a klasszikus mechanika szerint a tér három-dimenziós euklideszi tér. Ezért tetszőleges vonatkoztatási rendszerben természetes módon tudtunk az egész térre kiterjedő Descartes-féle koordinátarendszert értelmezni. **Az egész térben értelmezett koordinátarendszert globális koordinátarendszernek nevezzük.** A globális Descartes-féle koordinátarendszer tengelyeit az origóban felvett $\mathbf{E}_i$ $(i = 1, 2, 3)$ ortonormált bázisvektorok jelölik ki.

A tér helyzetvektoraival ellentétben az elmozdulás, a sebesség és a gyorsulás olyan vektorok, amelyek a részecske pillanatnyi tartózkodási helyén vannak értelmezve. Célszerű ezért lokális koordinátarendszerek értelmezése, amelyekben ezeket a vektorokat komponenseikre tudjuk bontani. **A tér valamely pontjának infinitezimális környezetében értelmezett koordinátarendszert lokális koordinátarendszernek nevezzük.** Értelmezzünk a tér minden pontjában lokális koordinátarendszereket úgy, hogy a tér minden P pontjában felveszünk egy $\mathbf{e}_i(P)$ $(i = 1, 2, 3)$ bázist. Ekkor a P pontban értelmezett bármely $\mathbf{v}(P)$ vektor felbontható komponenseire:

$$\mathbf{v}(P) = \sum_{i=1}^{3} v_i(P)\mathbf{e}_i(P). \tag{1.1.1}$$

Az egyszerűség kedvéért csak olyan konkrét esetekkel fogunk foglalkozni, amikor a lokális bázis ortonormált, $\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j = \delta_{i,j}$. Ekkor a vektorkomponensek:

$$v_i(P) = \mathbf{v}(P) \cdot \mathbf{e}_i(P), \qquad (i = 1, 2, 3) \tag{1.1.2}$$

Általában a lokális bázisokat teljesen tetszőlegesen felvehetjük. Ha azonban pontról pontra haladva, a térben felvett bázisok megfelelő vektorai „kellően simán" változnak, akkor a lokális koordinátarendszerek egyetlen globális koordinátarendszerré „varrhatók össze". Az „összevarrás" úgy történik, hogy rendre megkeressük azokat a görbéket, amelyeknek az rendre az $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$ és az $\mathbf{e}_3$ vektorok az érintői. Így három független görbesereget kapunk, az ún. **koordinátavonalak** seregeit. Az így kapott koordinátavonalak behálózzák a teret. Minden ponton pontosan három, különböző koordinátavonal halad át. A koordinátavonalak egyes seregeiben található koordinátavonalakat valós számokkal megjelölve, minden térbeli ponthoz 3 valós szám, 3 koordináta rendelhető. A kapott koordinátarendszert **globális, görbevonalú koordinátarendszernek** nevezzük. A globális görbevonalú koordinátarendszereket a fentiek alapján vagy azzal jellemezzük, hogy a tér minden pontjában megadjuk a megfelelő lokális bázist, vagy azzal, hogy megadjuk a térben a koordinátavonalak három seregét.

A.2 Természetes koordináták

Az elemi elmozdulás, a sebesség és a gyorsulás vektorai az anyagi pont pillanatnyi tartózkodási helyén értelmezett vektorok, az anyagi pont mozgásának lokális jellemzői. Ezeket a vektorokat felbonthatjuk összetevőikre, ha rendelkezésünkre áll az anyagi pont bármely tartózkodási helyén a térben, három lineárisan független egységvektor, úgynevezett bázis.

Miután ilyen bázisokra csak a pályagörbe pontjaiban, azaz az anyagi pont lehetséges tartózkodási helyein van szükségünk, ezért az a természetes, hogy a pálya minden pontjában értelmezünk egy egységvektorokból álló bázist. Legyen $\mathbf{t}(P_t)$ a pálya tetszőleges P_t pontjában a pályagörbének az anyagi pont haladása irányába mutató érintő egységvektora. Legyen továbbá $\mathbf{n}(P_t)$ ugyanebben a pontban a pályagörbéhez simuló kör középpontja felé mutató egységvektor, és végül $\mathbf{b}(P_t)$ a $\mathbf{t}(P_t)$ és az $\mathbf{n}(P_t)$ vektorokra merőleges, velük a $(\mathbf{t}(P_t), \mathbf{n}(P_t), \mathbf{b}(P_t))$ sorrendben jobbsodrású rendszert alkotó egységvektor. Az így értelmezett bázisok a pálya minden pontjában meghatároznak egy-egy lokális koordinátarendszert, amelyeket a **pálya természetes koordinátarendszerének** nevezünk. Az anyagi pont elemi elmozdulása érintőirányú,

$$d\mathbf{r} = \mathbf{t}ds = \mathbf{t}vdt, \tag{1.2.1}$$

így koordinátái a pálya természetes koordinátarendszerében:

$$(dr)_t = ds = vdt = Rd\varphi, \qquad (dr)_n = (dr)_b = 0. \tag{1.2.2}$$

Itt bevezettük a P_t pontban a pálya simulókörének R sugarát, az úgynevezett görbületi sugarat, és a simulókör középpontjából az anyagi pont tartózkodási pontjához húzott sugár dt idő alatt bekövetkező $d\varphi$ szögelfordulását. Következésképpen az anyagi pont sebessége,

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{t}v = \mathbf{t}\frac{ds}{dt}, \tag{1.2.3}$$

így a sebesség koordinátái a pálya természetes koordinátarendszerében:

$$v_t = v = \frac{ds}{dt}, \qquad v_n = v_b = 0. \tag{1.2.4}$$

A gyorsulást a sebesség időszerinti első deriváltjaként kapjuk meg:

$$\begin{aligned}
\mathbf{a} &= \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(v\mathbf{t}) = \frac{dv}{dt}\mathbf{t} + v\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\mathbf{t}(P_{t+dt}) - \mathbf{t}(P_t)}{\Delta t} \\
&= \frac{d^2s}{dt^2}\mathbf{t} + v\lim_{\Delta t\to 0}\mathbf{n}\frac{\Delta\varphi}{\Delta t} = \frac{d^2s}{dt^2}\mathbf{t} + \frac{v}{R}\mathbf{n}\lim_{\Delta t\to 0}\frac{R\Delta\varphi}{\Delta t} = \frac{d^2s}{dt^2}\mathbf{t} + \frac{v}{R}\mathbf{n}\frac{ds}{dt} \\
&= \frac{d^2s}{dt^2}\mathbf{t} + \frac{v^2}{R}\mathbf{n}.
\end{aligned} \tag{1.2.5}$$

Itt felhasználtuk, hogy az anyagi pont P_t és $P_{t+\Delta t}$ helyzetei és a pálya P_t pontjához tartozó simulókörének O_t középpontja által alkotott $P_tP_{t+\Delta t}O_t$ háromszög infinitezimális $\Delta t \to 0$ időtartam esetén hasonló ahhoz a háromszöghöz, amit úgy kapunk, hogy a $\mathbf{t}(P_{t+\Delta t})$ érintőt önmagával párhuzamosan a P_t pontba toljuk, és vesszük ezen eltolt egységvektor hegye, a $\mathbf{t}(P_t)$ egységvektor hegye és a P_t pont által meghatározott háromszöget. A kapott (1.2.5) összefüggés alapján a gyorsulás összetevői:

$$a_t = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2s}{dt^2}, \qquad a_n = \frac{v^2}{R}, \tag{1.2.6}$$

ahol a_t ill. a_n az úgynevezett érintőirányú (tangenciális), ill. centripetális gyorsulás. A pálya természetes koordinátarendszerét definiáló bázisvektorok páronként merőlegesek egymásra, így a gyorsulás nagyságát a vektorösszetevőkből Pitagorasz tétele segítségével kapjuk meg:

$$a = \sqrt{a_t^2 + a_n^2}. \tag{1.2.7}$$

A.3 Descartes-koordináták

Lokális, Descartes-féle koordinátarendszerhez úgy jutunk a tér minden P pontjában, hogy a vonatkoztatási rendszer O origójában felvett $\mathbf{E}_x, \mathbf{E}_y, \mathbf{E}_z$ ortonormált bázisvektorokat önmagukkal párhuzamosan eltoljuk a tér minden P pontjába. Így az elemi elmozdulás, a sebesség és a gyorsulás lokálisan értelmezett vektorai a pálya tetszőleges pontjában felbonthatók az ottani bázis szerinti lineáris kombinációra, azaz Descartes-összetevőkre. A teret behálózó globális Descartes-koordinátarendszer koordinátavonalait három, páronként merőleges egyenessereg egyenesei alkotják. Az egyes koordinátavonal-seregekbe tartozó egyenesek párhuzamosak. A tér minden P pontján pontosan három, páronként merőleges egyenes megy át, amelyeket a P pontba mutató helyzetvektor $\mathbf{r} = x\mathbf{E}_x + y\mathbf{E}_y + z\mathbf{E}_z$ felbontásában szereplő x, y és z összetevőivel jelölhetünk meg. Itt pl. x a P pontnak az (y, z) koordinátasíktól mért előjeles távolsága, stb.

Az elemi elmozdulás felbontása

$$d\mathbf{r} = dx\mathbf{E}_x + dy\mathbf{E}_y + dz\mathbf{E}_z \tag{1.3.1}$$

és ennek megfelelően a sebesség felbontása

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{dx}{dt}\mathbf{E}_x + \frac{dy}{dt}\mathbf{E}_y + \frac{dz}{dt}\mathbf{E}_z, \tag{1.3.2}$$

ahonnan leolvashatjuk a sebesség Descartes-összetevőit:

$$v_x = \frac{dx}{dt}, \quad v_y = \frac{dy}{dt}, \quad v_z = \frac{dz}{dt}. \tag{1.3.3}$$

A gyorsulás a sebesség idő szerinti első deriváltja. A bázisvektorok az anyagi pont pályája mentén most midenütt azonosak (párhuzamos eltolás erejéig), ezért azok különbsége a pálya két pontjában, amelyekben a részecske a $t + dt$ ill. a t pillanatban tartózkodik, zérus; pl. $\mathbf{e}_x(P_{t+dt}) - \mathbf{e}_x(P_t) = 0$. Tehát a bázisvektorok idő szerinti első deriváltja zérus. Így a gyorsulásra

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{dv_x}{dt}\mathbf{e}_x + \frac{dv_y}{dt}\mathbf{e}_y + \frac{dv_z}{dt}\mathbf{e}_z \tag{1.3.4}$$

adódik, ahonnan a gyorsulás Descartes-komponensei:

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}, \quad a_y = \frac{dv_y}{dt} = \frac{d^2y}{dt^2}, \quad a_z = \frac{dv_z}{dt} = \frac{d^2z}{dt^2}. \tag{1.3.5}$$

Ezután alkalmazhatjuk Pitagorász tételét a vektorok nagyságának meghatározására:

$$ds = |d\mathbf{r}| = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2}, \quad v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}, \quad a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}, \tag{1.3.6}$$

és

$$r = |\mathbf{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}. \tag{1.3.7}$$

A.4 Síkbeli polárkoordináták

Ha az anyagi pont egy adott síkon mozog, akkor használhatjuk helyzetének megadásához a síkbeli Descartes-koordinátákat. A Descartes koordinátákat ugyanúgy vezethetjük be a síkon, mint a térben. Sok esetben azonban kényelmesebb az anyagi pont helyzetét síkbeli polárkoordinátákkal megadni. Ezek:

1. a sík tetszőleges P pontjának r távolsága az O origótól, $r = |OP|$;
2. egy tetszőlegesen választott rögzített irány, pl. az O origójú Descartes-koordinátarendszer x-tengelyének pozitív iránya, és az OP sugár által bezárt, az óramutató járásával ellentétes irányban mért φ szög.

Ebből rögtön következik a Descartes-koordináták és a polárkoordináták közti kapcsolat:

$$x = r\cos\varphi, \qquad y = r\sin\varphi. \tag{1.4.1}$$

A sík tetszőleges P pontjában a vektorokat az $(\mathbf{e}_r(P), \mathbf{e}_\varphi(P))$ ortonormált bázis szerint bontjuk fel, ahol $\mathbf{e}_r(P)$ az OP sugárral párhuzamos, az origóból kifelé mutató egységvektor, $\mathbf{e}_\varphi(P)$ erre merőleges, az óramutató járásával ellentétes irányba mutató egységvektor:

$$\mathbf{e}_r(P)\cdot\mathbf{e}_r(P) = \mathbf{e}_\varphi(P)\cdot\mathbf{e}_\varphi(P) = 1, \qquad \mathbf{e}_r(P)\cdot\mathbf{e}_\varphi(P) = 0. \tag{1.4.2}$$

Ennek megfelelően a síkbeli polárkoordinátarendszer koordinátavonalai az origóból kifelé mutató félegyenesek ($\varphi =$áll.) és origó középpontú koncentrikus körök ($r =$áll.).

Az elemi elmozdulás felbontása,

$$d\mathbf{r} = dr\,\mathbf{e}_r + r\,d\varphi\,\mathbf{e}_\varphi, \tag{1.4.3}$$

elemi geometriai megfontolás alapján adódik. Ennek megfelelően az anyagi pont sebessége

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{dr}{dt}\mathbf{e}_r + r\frac{d\varphi}{dt}\mathbf{e}_\varphi \tag{1.4.4}$$

alakban bontható fel, úgyhogy a radiális és a poláris komponensei rendre:

$$v_r = \frac{dr}{dt}, \qquad v_\varphi = r\frac{d\varphi}{dt} = r\omega, \tag{1.4.5}$$

ahol bevezettük az

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt} \tag{1.4.6}$$

szögsebességet. A gyorsulást a sebességvektor idő szerinti első deriváltjaként kapjuk. Tegyük fel, hogy az anyagi pont dt idő alatt a P_t pontból az infinitezimálisan közeli P_{t+dt} pontba mozdul el. Tekintve, hogy

$$\begin{aligned}
\frac{d\mathbf{e}_r}{dt} &= \frac{\mathbf{e}_r(P_{t+dt}) - \mathbf{e}_r(P_t)}{dt} = \frac{|\mathbf{e}_r|d\varphi\mathbf{e}_\varphi}{dt} = \omega\mathbf{e}_\varphi,\\
\frac{d\mathbf{e}_\varphi}{dt} &= \frac{\mathbf{e}_\varphi(P_{t+dt}) - \mathbf{e}_\varphi(P_t)}{dt} = \frac{-|\mathbf{e}_\varphi|d\varphi\mathbf{e}_r}{dt} = -\omega\mathbf{e}_r,
\end{aligned} \tag{1.4.7}$$

a gyorsulásra az alábbi kifejezés adódik:

$$\begin{aligned}
\mathbf{a} &= \frac{\mathbf{v}}{dt} = \frac{dv_r}{dt}\mathbf{e}_r + v_r\frac{d\mathbf{e}_r}{dt} + \frac{dv_\varphi}{dt}\mathbf{e}_\varphi + v_\varphi\frac{d\mathbf{e}_\varphi}{dt}\\
&= \frac{d^2r}{dt^2}\mathbf{e}_r + v_r\omega\mathbf{e}_\varphi + \left(\frac{dr}{dt}\omega + r\frac{d\omega}{dt}\right)\mathbf{e}_\varphi - r\omega^2\mathbf{e}_r\\
&= \left(\frac{d^2r}{dt^2} - r\omega^2\right)\mathbf{e}_r + \left(r\frac{d\omega}{dt} + 2\omega\frac{dr}{dt}\right)\mathbf{e}_\varphi,
\end{aligned} \tag{1.4.8}$$

úgyhogy a gyorsulás radiális és poláris komponense, rendre:

$$a_r = \frac{d^2r}{dt^2} - r\omega^2, \qquad a_\varphi = r\frac{d\omega}{dt} + 2\omega\frac{dr}{dt}. \tag{1.4.9}$$

A.5 Hengerkoordináták

A síkban értelmezett polárkoordinátarendszer egyik lehetséges térbeli általánosítása a henger-koordinátarendszer. Használata különösen akkor előnyös, ha a mozgás, amelyet le akarunk írni, tengelyszimmetriával rendelkezik. A hengerkoordinátarendszerhez úgy jutunk, hogy választunk egy origót és egy azon keresztül menő e egyenest (rendszerint a szimmetriatengelyt). Vegyük ezután az O origón átmenő, e tengelyre merőleges S síkot. A tér egy tetszőleges P pontjához az alábbi koordinátákat rendeljük hozzá:

1. Vetítsük a P pontot merőlegesen az S síkra, és vegyük a kapott P_v pont S síkban ételmezett polárkoordinátáit: r és φ.
2. A P_vP szakasz előjeles hosszát nevezzük a P pont z koordinátájának.

Ha a Descartes-koordinátarendszer és a henger-koordinátarendszer origója egybe esik, és z-tengelyeik is egybe esnek, továbbá a φ polárszöget az pozitív x-tengelyhez képest az óramutató járásával ellentétes irányban mérjük, akkor a Descartes-koordináták és a hengerkoordináták közötti kapcsolat:

$$x = r\cos\varphi, \qquad y = r\sin\varphi, \qquad z = z. \tag{1.5.1}$$

A henger-koordinátarendszert alkotó koordinátavonalak

1. a z-tengely pontjaiból kifutó, a z tengelyre merőleges félegyenesek: r-vonalak ($\varphi =$áll., $z =$áll.);
2. a z-tengelyre merőleges síkokban elhelyezkedő körök, amelyeknek középpontja a z-tengelyen van: φ-vonalak (r=áll., $z =$áll.);
3. a z-tengellyel párhuzamos egyenesek: z-vonalak ($r =$áll., $\varphi =$áll.).

Ezen koordinátavonalak érintő egységvektorai a tér tetszőleges pontjában ortogonális bázist alkotnak. Szokásos választásuk, hogy $\mathbf{e}_r$ mutasson a z-tengelytől kifelé, és az $\mathbf{e}_r$, $\mathbf{e}_\varphi$, $\mathbf{e}_z$ sorrendben alkossanak jobbsodrású vektorrendszert.

Az elemi elmozdulás felbontása ebben a bázisban:

$$d\mathbf{r} = dr\mathbf{e}_r + rd\varphi\mathbf{e}_\varphi + dz\mathbf{e}_z, \tag{1.5.2}$$

ahonnan az anyagi pont sebességének felbontása:

$$\mathbf{v} = \frac{dr}{dt}\mathbf{e}_r + r\omega\mathbf{e}_\varphi + \frac{dz}{dt}\mathbf{e}_z, \tag{1.5.3}$$

úgyhogy

$$v_r = \frac{dr}{dt}, \qquad v_\varphi = r\omega, \qquad v_z = \frac{dz}{dt}. \tag{1.5.4}$$

A gyorsulás felbontása (felhasználva a gyorsulás S síkkal párhuzamos komponensének polárkoordináták szerinti felbontását):

$$\mathbf{a} = \left(\frac{d^2r}{dt^2} - r\omega^2\right)\mathbf{e}_r + \left(r\frac{d\omega}{dt} + 2\omega\frac{dr}{dt}\right)\mathbf{e}_\varphi + \frac{d^2z}{dt^2}\mathbf{e}_z. \tag{1.5.5}$$

A.6 Gömbi polárkoordináták

A gömbi polárkoordináták használata akkor előnyös, ha a mozgás gömbszimmetrikus. A térben a gömbi polárkoordinátákat a következőképpen értelmezzük. Válasszuk meg először a koordinátarendszer O origóját. Tekintsük a tér egy tetszőleges P pontját. Ehhez az alábbi koordinátákat rendeljük hozzá:

1. A P pont origótól mért $r = OP$ távolsága az úgynevezett radiális koordináta, $r \in [0, \infty)$.
2. Legyen az O origójú Descartes-koordinátarendszer x-tengelye és az OP szakasz (x, y) síkra vett OP_v vetületének szöge, az x-tengelyhez képest az óramutató járásával ellentétes irányban mérve, a φ polárszög, $\varphi \in [0, 2\pi]$.
3. Az OP szakasznak a pozitív z-tengellyel alkotott szöge a θ azimutszög, $\theta \in [0, \pi]$.

A Descartes-koordináták és a gömbi polárkoordináták közti kapcsolat:

$$x = r \sin\theta \cos\varphi, \qquad y = r \sin\theta \sin\varphi, \qquad z = r \cos\theta. \tag{1.6.1}$$

A koordinátavonalak

1. az origóból kifutó félegyenesek (r-vonalak),
2. a z-tengelyre merőleges síkokban elhelyezkedő, z-tengelyen fekvő origóval rendelkező, $r \sin\theta$ sugarú körök (φ-vonalak, vagy szélességi körök),
3. a z-tengellyel határolt félsíkokon elhelyezkedő, O középpontú félkörök (θ-vonalak vagy hosszúsági körök).

A tér tetszőleges pontjában ezen koordinátavonalak érintő egységvektorai ortonormált bázist alkotnak. Legyen ennek a bázisnak $\mathbf{e}_r$ a sugárirányban kifelé mutató egységvektora., Legyenek továbbá a φ- és θ-vonalak érintői, $\mathbf{e}_\varphi$ és $\mathbf{e}_\theta$ úgy irányítva, $\mathbf{e}_\varphi$ a φ polárszög óramutató járásával ellentétes értelmű megváltozásának irányába mutasson, és $\mathbf{e}_r$, $\mathbf{e}_\varphi$, $\mathbf{e}_\theta$ alkossanak ebben a sorrendben jobbsodrású vektorrendszert.

Az elemi elmozdulás és a sebesség felbontása a gömbi polárkoordináta-bázisban:

$$\begin{aligned} d\mathbf{r} &= dr\mathbf{e}_r + r\sin\theta d\varphi\mathbf{e}_\varphi + rd\theta\mathbf{e}_\theta, \\ \mathbf{v} &= v_r\mathbf{e}_r + v_\varphi\mathbf{e}_\varphi + v_\theta\mathbf{e}_\theta, \end{aligned} \tag{1.6.2}$$

ahol a sebesség összetevői:

$$v_r = \frac{dr}{dt}, \qquad v_\varphi = r\sin\theta\frac{d\varphi}{dt}, \qquad v_\theta = r\frac{d\theta}{dt}. \tag{1.6.3}$$

A sebesség időszerinti első deriváltját képezve most is meghatározhatjuk a gyorsulás komponenseit.

B A közeget jellemző térmennyiségek értelmezése

Alább azt részletezzük, hogy hogyan kell a kicsiny, makroszkopikus térfogatra vonatkozó, átlagos F mennyiségekhez tartozó f térmennyiségeket értelmezni. Olyan értelmezési utasításra van szükség, hogy a kapott térmennyiség független legyen az eljárás során változtatott ΔV térfogattól. Az f térmennyiség értelmezésének alapjául szolgáló átlagos F fizikai mennyiség, mint az a 1.3.1 fejezetben elmondott értelmezéséből következik, függ a ΔV térfogatdarabka nagyságától. Kis térfogatról lévén szó, a függés a Taylor-sor első néhány tagjának megtartásával már jól közelíthető,

$$F = F_0 + F_1 \Delta V + \mathcal{O}((\Delta V)^2) \qquad (2.0.1)$$

mindaddig, amíg ΔV makroszkopikus. A tapasztalat szerint kétféle fizikai mennyiség használata fontos a fizikában: 1. az **intenzív mennyiségeké**, amikor a nulladrendű tag a Taylor-sorban nem zérus, $F_0 \neq 0$, ill. 2. az **extenzív mennyiségeké**, amikor a nulladrendű tag eltűnik és a vezető rendű járulékot az elsőrendű tag adja.

1. *Intenzív mennyiségek.* Olyan térmennyiségek mint pl. a $\mathbf{v}(\mathbf{r}, t)$ sebességmező, vagy az $\mathbf{a}(\mathbf{r}, t)$ gyorsulásmező, csak akkor értelmezhetők egyértelműen, ha az alábbi viselkedés tapasztalható: Pl. a ΔV térfogatban a részecskék átlagos $\mathbf{V}$ sebessége konvergál egy meghatározott értékhez, amikor a tér tetszőleges P pontját tartalmazó ΔV térfogatot valamilyen nagy értékről fokozatosan csökkentjük és közben kezdjük „ráhúzni" a P pontra. Olyan lineáris függést kell tapasztaljunk, amelyet $\Delta V \to 0$-ig extrapolálva, az F_0 értéket olvashatjuk le az $F = F(\Delta V)$ diagramon. A lineáris viselkedést valóban extrapolálni kell a nulláig, mert a lineáris függés csak addig jelentkezik, amíg el nem érjük az atomok közötti távolságokkal összemérhető méreteket, azaz ΔV mikroszkopikussá nem válik. Ekkor az átlagsebesség hevesen kezd ingadozni, ahogy ΔV-t tovább csökkentjük. A leírt viselkedés pontosan akkor következik be, ha a $\mathbf{V}$ átlagsebesség Taylor-sorában (az F_0-nak megfelelő) nulladrendű tag nem zérus. Ha az értelmezni kívánt f térmennyiség alapjául szolgáló F átlagos fizikai mennyiség a fentihez hasonló viselkedést mutat, akkor azt **intenzív mennyiségnek nevezzük.** Ilyenkor a f térmennyiség értéke adott pontban a megfelelő F átlagos mennyiségnek azzal az értékével azonos definíció szerint, amit a ΔV térfogat értékének egy meghatározott intervallumában megfigyelt lineáris viselkedés zérus térfogatig történő extrapolációjával határozunk meg, azaz $f = F_0$. Ha adott mechanikai rendszer és adott F fizikai mennyiség tekintetében létezik olyan térfogatintervallum, amelyben F értéke lineárisan változik marad mielőtt elérnénk a mikroszkopikus térfogatokat, akkor azt mondjuk, hogy az adott rendszerben a makroszkopikus és a mikroszkopikus méretskálák jól elkülönülnek. Ilyenkor tudjuk értelmezni a leírt módon a megfelelő f térmennyiséget. Előfordulhat, hogy a kívánt tulajdonságú térfogatintervallum nem létezik adott mechanikai rendszer és adott F fizikai mennyiség tekintetében. Akkor nem tudunk egy F-nek megfelelő f térmennyiséget értelmezni. Ilyenkor nem válnak szét a makroszkopikus és a mikroszkopikus méretskálák.

2. *Extenzív mennyiségek.* Vannak olyan f térmennyiségek, amelyek értelmezésének alapjául szolgáló F átlagos mennyiség Taylor-sorában a tiszta tag zérus $F_0 = 0$. Ilyen pl. a ΔV térfogatban a részecskék átlagos ΔN száma. Ekkor azt a viselkedést tapasztaljuk a ΔV térfogatot tetszőleges pontra ráhúzva, hogy F azaz példánkban az átlagos ΔN részecskeszám a ΔV térfogattal arányosan változik a ΔV térfogatnak egy meghatározott ablakában, még mielőtt elérnénk a mikroszkopikus térfogatokat, és ezt a lineáris viselkedést a nulla térfogatig extrapolálva, azt találjuk, hogy az egyenes az $F = F(\Delta V)$ diagram origóján megy át. Ha létezik ΔV értékében ilyen

ablak, akkor abban képezhetjük az $\frac{F}{\Delta V} = F_1$ hányadost, ami ebben az ablakban állandó értéket vesz fel. Ezt az F mennyiség sűrűségének nevezzük és az F menynyiséghez tartozó térmennyiséget $f = F_1$ egyenlőséggel értelmezhetjük. Példánkban $\frac{\Delta N}{\Delta V} = n$ a részecskesűrűség, ha a bal oldalon álló hányadost abban a térfogatablakban képezzük, amikor a fenti hányados állandó. A ΔN részecskeszám extenzív mennyiség, de a sűrűsége már intenzív mennyiség. Ilyenkor térmennyiségnek természetesen csak a n részecskeszámsűrűséget használhatjuk. Szimbolikusan lehet írni, hogy

$$n(P) = \lim_{\Delta V \to P} \frac{\Delta N}{\Delta V}, \tag{2.0.2}$$

ahol a határértékképzést azonban a fent leírt eljárással kell elvégezni. A jelölés arra akar csupán emlékeztetni, hogy a térfogatot a P pontra kell ráhúzni.

References

[1] Budó Á., *Mechanika* (Tankönyvkiadó, Budapest, 1979.)

[2] Bába Á., *Mechanika I., II.* (KLTE, Debrecen, 1985.)

[3] L.D. Landau, E.M. Lifsic, *Elméleti fizika I.*, *Mechanika.* (Tankönyvkiadó, Budapest, 1976.)

[4] Dede M., Demény A., *Kísérleti fizika I.-II.* (Tankönyvkiadó, Budapest, 1979.)