

ÁLTALÁNOS RELATIVITÁSELMÉLET HALADÓKNAK

Sailer Kornél

Az [1] tankönyv alapján készült oktatási segédanyag.

Elméleti Fizikai Tanszék
Debreceni Egyetem
Debrecen
2015-2018

Tartalomjegyzék

1. Bevezetés	13
1.1. A gravitáció	13
1.2. A newtoni mechanika és a speciális relativitáselmélet a tér és idő fogalmáról	18
1.3. Az általános relativitáselmélet elvi alapjai	22
2. Differenciálható sokaságok, tenzorok	24
2.1. Sokaságok fogalma	24
2.2. Érintőterek és érintővektorok	25
2.3. Tenzorok	31
2.4. Metrikus tenzor	35
2.5. Jelölések, konvenciók	36
3. A téridő-sokaság görbülete	39
3.1. Általános megfontolások	39
3.2. A kovariáns deriválás operátora	40
3.3. Párhuzamos eltolás	44
3.4. A görbületi tenzor	47
3.5. Geodetikusok	54
3.5.1. A geodetikus fogalma	54
3.5.2. Geodetikusok felhasználásával szerkesztett koordinátarendszerek	56
3.5.3. A minimális ívhosszú és a maximális sajátidőtartamú görbék .	58
3.5.4. A geodetikus deviáció	61
3.6. A görbületi tenzor meghatározása	63
3.6.1. A koordináta-komponensek módszere	63
3.6.2. Tetrád-módszer	65
A. Topológikus terek	71
A.1. Topológia	71
A.2. Leképezések	72
A.3. Zárttság, összefüggés, lezárás, határok	72
A.4. Kompaktság	73
A.5. Konvergencia, megszámlálhatóság és kompaktság	74
A.6. Parakompaktság és parakompakt sokaságok tulajdonságai	75

B. Differenciál-formák	77
B.1. p -forma, ékszorzat és külső derivált	77
B.2. Integrálás	78
B.3. Integráltételek	80
B.3.1. Irányítható sokaságok és a Stokes-tétel	80
B.3.2. Térfogati integrál	81
B.3.3. A Gauss-tétel	83
B.4. Frobenius tétele	84
C. A sokaságok leképezései	87
C.1. Előre- és hátratólások	87
C.2. Diffeomorfizmusok	88
C.3. A Lie-derivált	89
C.4. A Killing-vektormező	93

Matematika tanárom, Kónya István, az ózdi József Attila Gimnázium egykori tanára emlékére.

Előszó

Ez a magyar nyelvű oktatási segédlet az [1] tankönyv alapján készült. Nagyjából követi annak a felépítését, noha néhány témakörhöz tartozó fejezetet, amely sokkal inkább önálló tanulásra, semmint előadásszerű ismertetésre alkalmas, áthelyeztem a függelékbe. Megőriztem a lemmáknak és a tételeknek az [1] tankönyvben használt sorszámozását annak érdekében, hogy könnyen visszakereshetők legyenek az eredeti tankönyvben, ahol sokszor további részletek és irodalmi hivatkozások is találhatóak.

Konvenció

Ebben az oktatási segédanyagban mindvégig a $(-, +, +, +)$ Lorentz-szignatúrát használjuk.

1. Bevezetés

1.1. A gravitáció

Az általános relativitáselmélet a gravitáció klasszikus elmélete, amely a gravitációs kölcsönhatást klasszikus, azaz nem kvantumfizikai kölcsönhatásként kezeli. A gravitációs kölcsönhatás a mindennapi életünkben, mint a tömegvonzásra vonatkozó tapasztalat jelenik meg. Két pontszerűnek tekinthető, inerciarendszerben nyugvó test, amelyek **súlyos tömege** m_{s1} és m_{s2} , vonzza egymást. A **tömegvonzás erőtvényét** Newton¹ gravitációs törvénye írja le: az 1-es test által a 2-es testre kifejtett erő

$$\vec{F}_{2 \leftarrow 1} = -G \frac{m_{s1} m_{s2}}{r_{12}^2} \frac{\vec{r}_{12}}{r_{12}}, \quad (1.1.1.)$$

ahol $G = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{m}^3 \text{kg}^{-1} \text{s}^{-2}$ a Newton-i gravitációs állandó és $\vec{r}_{12} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$. (A 3-dimenziós térbeli $\vec{v}$ vektorok hosszát $v = |\vec{v}|$ -vel jelöljük.) Ez az erő mindig vonzó, és annak következtében lép fel, hogy a testek súlyos tömeggel rendelkeznek. Jelenlegi tapasztalataink alapján minden test rendelkezik súlyos tömeggel. Az Eötvös² -kísérletek bizonyossága szerint a testek súlyos m_s és tehetetlen m tömegének aránya, m_s/m univerzális állandó, amelyre 1 adódik 10^{-12} pontossággal, ha a súlyos tömeg egységét a tehetetlen tömeg egységével azonosnak választjuk. Ezt a tapasztalatot a **súlyos és tehetetlen tömeg egyenértékűségének** nevezzük, és meghatározó szerepe van az általános relativitáselméletben. A gravitációs kölcsönhatás talán legközvetlenebbül tapasztalt megnyilvánulása a Föld felszínén a nehézségi erő, $\vec{F} = m_s \vec{g}$, amely a felszín közelében elhelyezkedő m_s súlyos tömegű testre hat, ahol $\vec{g}$ a nehézségi gyorsulás, amelynek nagysága közelítőleg $g = 9,81 \text{ms}^{-2}$. Szigorúan véve azonban a $\vec{g}$ nehézségi gyorsulás a föld-felszín különböző pontjainak közelében, különböző magasságokban sem irányát, sem nagyságát tekintve nem állandó. Jelöljük tehát a nehézségi gyorsulást a Föld felszíne közelében található tetszőleges P pontban $\vec{g}(P)$ -vel. Newton II. törvénye szerint a Föld felszíne közelében a P pontban tartózkodó, szabadon eső m tehetetlen tömegű test $\vec{a}$ gyorsulására

$$m\vec{a} = m_s \vec{g}(P) \quad (1.1.2.)$$

mozgásegyenlet áll fenn. Ebből a súlyos és tehetetlen tömeg ekvivalenciáját, azaz az $m_s = m$ azonosságot figyelembe véve, az adódik, hogy a szabadon eső test gyorsulása a nehézségi gyorsulás:

$$\vec{a} = \vec{g}(P). \quad (1.1.3.)$$

Ebből mindjárt következik egy másik fontos megállapítás. Képzeljük el, hogy a szabadon eső részecskét gondolatban körülveszi egy kicsiny „szekrényke”, amely maga is szabadon esik $\vec{g}(P)$ gyorsulással. A Földön nyugvó megfigyelő a részecskének a szabadon eső szekrénykéhez képesti mozgását a következőképpen értelmezi, amikor a részecske a P -hez közeli Q pontban tartózkodik: a részecskére az $m\vec{g}(Q)$

¹sir Isaac Newton, angol fizikus, 1643-1727.

²báró Eötvös Loránd Ágoston, magyar fizikus, 1848-1919.

nehézségi erő és a $-m\vec{a} = -m\vec{g}(P)$ tehetetlenségi erő hat, úgyhogy a részecske mozgásegyenlete:

$$m\vec{a}' = m\vec{g}(Q) - m\vec{g}(P). \quad (1.1.4.)$$

Ha $Q = P$, akkor a részecske gyorsulása a szekrénykében zérus, $\vec{a}' = 0$, ha Q csak infintezimálisan tér el P -től, akkor pedig a különbség nem zérus, de még mindig jó közelítéssel zérusnak tekinthető. Ez nyilván annál rosszabb közelítés, minél nagyobb a P és Q pontok távolsága. A szekrénykében nyugvó megfigyelő tehát a szekrénykét inerciarendszernek látja. Az ekvivalencia-elv tehát maga után vonja, hogy a szabadon eső kicsiny méretű rendszerek lokális inerciarendszerek. Ezt a gondolatsort azzal fejezzük be, hogy a szekrénykében nyugvó megfigyelő nem tudja mérni sem külön a nehézségi erőt, sem pedig a tehetetlenségi erőt. Egyedül azt tudja mérni, hogy ha a részecske nem a P hanem a közeli Q pontban esik szabadon, akkor annak mekkora a szekrénykéhez képesti kicsiny $\vec{a}'$ gyorsulása. A lokális inerciarendszerben (a szekrénykében) nyugvó megfigyelő tehát el tudja dönteni, hogy a részecske inerciális mozgást végez-e, vagy pedig attól mennyire eltérő mozgást. Arra a következtetésre jutunk tehát, hogy nem érdemes külön gravitációs erőről és tehetetlenségi erőről beszélni, amelyek külön-külön nem figyelhetők meg lokálisan. Ehelyett inkább azt kellene mondani, hogy a gravitáció meghatározza lokálisan, hogy milyen az inerciális mozgás, és azt is, hogy két szomszédos, inerciális mozgást végző részecske egymáshoz képest hogyan gyorsul. Az általános relativitáselmélet ezt a gondolatot bontja ki.

Térjünk azonban egyelőre vissza a gravitáció Newton-féle törvényéhez. A gravitációs erő konzervatív, vagyis a potenciális energia

$$U(r_{12}) = -G \frac{m_{s1}m_{s2}}{r_{12}} \quad (1.1.5.)$$

törvényéből származtatható: $\vec{F}_{2 \leftarrow 1} = -\vec{\nabla}_{r_2} U(r_{12})$. A newtoni gravitációs törvény hatására mozgó testek energiája (kinetikus és potenciális energiájuk összege) megmarad. Ez lehetővé teszi, hogy a gravitációs kölcsönhatást, ami **eredeti newtoni megfogalmazásában távolhatás** (két egymással nem érintkező pontszerű test kölcsönhatása) **közelhatásként értelmezzük**. Ennek az az ára, hogy bevezetjük a fizikai mező, a **gravitációs mező** fogalmát. A közelhatás úgy valósul meg, hogy az 1-es anyagi pont súlyos tömegénél fogva gravitációs mezőt kelt maga körül, azaz megváltoztatja az üres geometriai teret,

$$\phi(r) = -G \frac{m_{s1}}{r} \quad (1.1.6.)$$

gravitációs potenciált hoz abban létre, amely csak az 1-es anyagi ponttól mért $r = |\vec{r}|$ távolságtól függ, és ezért gömbszimmetrikus. Itt $\vec{r}$ az 1-es anyagi pontból, mint origóból kifelé mutató helyzetvektor. A 2-es anyagi pont ebben a gravitációs mezőben helyezkedik el az $\vec{r}$ helyzetvektorú pontban, súlyos tömegénél fogva tartózkodása helyén kölcsönhatásba lép a gravitációs mezővel, s ennek következtében $U(r) = m_{s2}\phi(r)$ potenciális energiára tesz szert. Ugyanezt elmondhatjuk úgy is, hogy az 1-es részecske $\vec{E}(\vec{r}) = -\vec{\nabla}\phi(r) = -G \frac{m_{s1}}{r^2} \frac{\vec{r}}{r}$ gravitációs térerősségmezőt kelt, és a 2-es anyagi pontra ez fejt ki annak $\vec{r}$ tartózkodási helyén $\vec{F} = m_{s2}\vec{E}(\vec{r}) = -G \frac{m_{s1}m_{s2}}{r^2} \frac{\vec{r}}{r}$ vonzó erőt.

Ha figyelembe vesszük az erőhatások függetlenségének elvét, azaz Newton IV. törvényét, akkor a fentiek könnyen általánosíthatók kiterjedt testek gravitációs

kölcsönhatására. Vizsgáljuk két kiterjedt test kölcsönhatását, amelyek térben diszjunkt tartományokat foglalnak el. Az 1-es kiterjedt testet jellemezze a $\rho_1(\vec{r}_1)$ (súlyos) tömegsűrűség. Ekkor a test által a geometriai tér $\vec{r}$ pontjában keltett gravitációs mező a V_1 térfogatú test egyes $\rho(\vec{r}_1)dV_1$ tömegű, dV_1 térfogatú infinitezimális darabkái által keltett gravitációs mezők lineáris szuperpozíciója, azaz

$$\phi(\vec{r}) = -G \int_{V_1} dV_1 \frac{\rho(\vec{r}_1)}{|\vec{r} - \vec{r}_1|} \quad (1.1.7.)$$

és $\vec{E}(\vec{r}) = -\vec{\nabla}_{\vec{r}}\phi(\vec{r}) = \int_{V_1} d\vec{E}$, ahol $d\vec{E}$ az egyes darabkák által keltett térerősség az $\vec{r}$ helyen. A 2-es test tömegsűrűsége legyen $\rho_2(\vec{r}_2)$ annak $\vec{r}_2$ helyzetű pontjában. Ekkor a V_2 térfogatú 2-es test potenciális energiája az 1-es test terében

$$U_{12} = \int_{V_2} dV_2 \rho_2(\vec{r}_2) \phi(\vec{r}_2) = -G \int_{V_2} dV_2 \int_{V_1} dV_1 \frac{\rho_2(\vec{r}_2) \rho_1(\vec{r}_1)}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|}, \quad (1.1.8.)$$

és a 2-es testre ható eredő gravitációs erő

$$\vec{F}_{2 \leftarrow 1} = \int_{V_2} dV_2 \rho_2(\vec{r}_2) \vec{E}(\vec{r}_2). \quad (1.1.9.)$$

Általánosan, ha a geometriai térben a gravitáló tömeg $\rho(\vec{r})$ térfogati sűrűsége sztatikus, akkor ez

$$\phi(\vec{r}) = -G \int dV' \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \quad (1.1.10.)$$

gravitációs potenciált kelt. Ha az anyag az origóban nyugvó m tömegű pontszerű test, akkor $\rho(\vec{r}) = m\delta(\vec{r})$ és visszkapjuk a potenciál $\phi(\vec{r}) = -Gm/r$ képletét, amely az origót, mint szinguláris pontot leszámítva, az egész térben kielégíti a

$$\Delta\phi = r^{-2}\partial_r(r^2\partial_r\phi) = 0, \quad r \neq 0 \quad (1.1.11.)$$

Laplace³-egyenletet. Könnyen beláthatjuk, hogy a szingularitást helyesen a

$$\Delta\phi = 4\pi Gm\delta(\vec{r}) \quad (1.1.12.)$$

egyenlet megoldása veszi figyelembe. (Integráljuk az egyenlet mindkét oldalát $\epsilon \rightarrow 0^+$ sugarú gömb térfogatára és használjuk fel a bal oldalon Gauss⁴ tételét.) Ez egyúttal azt is jelenti, hogy tetszőleges $\rho(\vec{r})$ tömegeloszlás sztatikus gravitációs potenciálja a

$$\Delta\phi = 4\pi G\rho(\vec{r}) \quad (1.1.13.)$$

Poisson⁵-egyenletet elégíti ki. Ezzel összefoglaltuk a newtoni gravitációra vonatkozó alapösszefüggéseket.

³marquis Pierre-Simon de Laplace, francia matematikus, csillagász és fizikus, 1749-1827.

⁴Johann Carl Friedrich Gauss, német matematikus és fizikus, 1777-1855.

⁵Baron Siméon Denis Poisson, francia matematikus, m'ernök és fizikus, 1781-1840.

A tapasztalatok alapján azt mondhatjuk, hogy a Newton gravitációs törvénye lényegében sztatikus esetben a 10^{-15} m (a proton sugara) és a 150 millió km (Föld-Nap távolság) méretek között, mintegy 26 nagyságrendet átfogva nagy pontossággal teljesül. A csillagászati megfigyelésekből azonban arra kell következtetnünk, hogy a gravitációs kölcsönhatás némileg eltér a newtoni gravitációs törvénytől. Említsünk meg néhány fontos megfigyelést, ami a newtoni gravitációs törvény korlátaira mutat rá:

1. A newtoni fizika szembeötlő paradoxona sokáig az volt, hogy a newtoni gravitáció alapján nem lehetett megérteni pontosan a **Merkúr Nap-közei pontjának (a perihéliumnak) a vándorlását** (precesszióját), amely az 1697 és 1848 közötti csillagászati megfigyelések gondos analízise után is eltért a newtoni elméletből számolttól. Erre az anomáliára csak az Einstein⁶ által kidolgozott, 1915-ben publikált általános relativitáselmélet adott választ.
2. A Nap gravitációs vonzásánál fogva eltéríti a távoli csillagok fényét eredeti irányától, ha a fénysugár a Nap korongja mellett elhaladva jut a földi megfigyelő szemébe. Ez a **fénygörbülés jelensége**. A fényt nagysebességű részecske mozgásának tekintve Soldner⁷ határozta meg először (1804) a fénysugár irányának eltérülését a newtoni gravitáció alapján. Soldner eredménye fele az 1919 és 1973 között egyre nagyobb pontossággal ténylegesen megfigyelt értéknek, amelyet az általános relativitáselmélet alapján lehet értelmezni, és ami igazolja Einstein 1911-es számításának eredményét.
3. Perlmutter⁸, Riess⁹, Schmidt¹⁰ és társainak 1998-as megfigyelései óta tudjuk, hogy a látható Világegyetemünk gyorsulva tágul. Ennek valószínűsíthető oka, hogy a gravitációs kölcsönhatás a ma látható Világegyetem méretskáláján (46 milliárd fényév $\approx 4,6 \cdot 10^{11} \cdot 9,46 \cdot 10^{15}$ m $\approx 4,4 \cdot 10^{27}$ m $\approx 4,6 \cdot 10^{11}/3,26$ pc $\approx 1,4 \cdot 10^{11}$ pc) taszító. Az általános relativitáselméleten alapuló kozmológiai modell erre is adhat magyarázatot, ha az úgynevezett **kozmológiai állandó** nem zérus.
4. Newton gravitációs törvényének egyik érvényességi határa abból származik, hogy sztatikus kölcsönhatás alapján nyertük ki a tapasztalatokból, vagy legalább is olyan esetekből, amikor a testek a vákuumbeli fénysebességhez képest kis sebességgel mozognak. A speciális relativitáselméletben megtanultuk, hogy a fizikai mezők nem alternatív szemléletet jelentenek, hanem valóságos fizikai tulajdonságokkal (energiával, impulzussal és impulzusmomentummal) felruházott objektumok. Ez lényegében annak a következménye, hogy bennük a változások, a zavarok véges sebességgel terjednek, nem pedig végtelen sebességgel. Ennek szép klasszikus példája az elektromágneses mező, amelyben a vákuumbeli fénysebességgel, $c = 299792458$ m/s $\approx 3 \cdot 10^8$ m/s terjednek az elektromágneses hullámok. Bár a speciális relativitáselmélet nem foglalkozik a gravitációs kölcsönhatás leírásával, sejtetni engedi a fizikai mezőről kialakított szemlélete, hogy a gravitációs kölcsönhatás mozgó testek között nem egyezhet meg pontosan a newtoni gravitációs törvényből adódó kölcsönhatással. A testek relatív távolságának megváltozása nem jelentkezik pillanatszerűen, azaz

⁶Albert Einstein, német fizikus, 1879-1955

⁷Johann Georg von Soldner, német fizikus, matematikus és csillagász, 1776-1833

⁸Saul Perlmutter, amerikai asztrofizikus, 1959-

⁹Adam Guy Riess, amerikai asztrofizikus, 1969-

¹⁰Brian Paul Schmidt, ausztrál asztrofizikus, 1967

azonnal a köztük levő erőhatásban, hanem csak valamilyen időbeli késleltetéssel, amelyet a gravitációs mezőben a forrásként szolgáló testek elmozdulása által keltett zavar terjedésének sebessége kell, hogy meghatározzon.

Bináris rendszerek megfigyeléséből közvetett bizonyítékunk van arra, hogy azok gravitációsan sugároznak. Az első ilyen felfedezés 1974-ben a Hulse¹¹-Taylor¹²-féle bináris pulzár (PSR B1913+16) megfigyelése volt. A bináris rendszer egyik tagja pulzár, amely, mint természetes óra, lehetővé teszi a keringési idő változásának pontos mérését. A keringési idő csökkenéséből arra lehetett következtetni, hogy a bináris rendszer tagjai a rendszer tömegközéppontja felé esnek, miközben egymás körül keringenek, s közben energiát sugároznak ki gravitációs hullámok alakjában. A jelenséget az általános relativitáselmélet alapján sikerült kvantitatív módon is pontosan magyarázni. A gravitációs sugárzás, a gravitációs hullámok létezése szintén túlmutat a newtoni gravitáción, viszont természetes magyarázatot nyer az általános relativitáselméletben. A gravitációs sugárzás közvetlen kísérleti megfigyelése még sokáig váratott magára, de végül 2016-ban a LIGO és a Virgo Tudományos Kollaboráció bejelentette, hogy először sikerült gravitációs hullámokat közvetlenül detektálniuk. A gravitációs sugárzás két feketelyukból álló bináris rendszertől származtak, amelyek egymásba zuhantak és összeolvadtak. Az első megfigyelést rövidesen további gravitációs források megfigyelése követte. 2017-ben Weiss¹³, Thorne¹⁴ és Barish¹⁵ fizikai Nobel-díjban részesültek a gravitációs hullámok detektálásában játszott szerepükért. A gravitációs hullámok létezése alátámasztja az általános relativitáselmélet szemléletét, miszerint a gravitáció fizikai mező.

5. Newton gravitációs törvényének további korlátja, hogy olyan esetek megfigyelésén alapszik, amikor a gravitációs mező gyenge. Ma már tudjuk, hogy nem extrapolálható olyan esetekre, mint a Világegyetem korai szakaszában, vagy a feketelyukak felszíne közelében uralkodó erős gravitációs mező leírása.

A newtoni gravitáció alapján meghatározhatjuk egy M tömegű test potenciális energiáját a sajátmaga által keltett gravitációs mezőben. Ebből kiderül, hogy az M tömegű pontszerű test saját energiája végtelennek adódik. Az általános relativitáselméletben hasonló szingularitás jelenik meg. Ha egy gömbszimmetrikus, M tömegű test a gravitációs vonzás hatására teljesen összeomlik, azaz gravitációs kollapszust szenved, akkor a Schwarzschild¹⁶-sugárnak megfelelő méretű feketelyuk keletkezik, amely a külső, távoli megfigyelő számára eltakarja a centrumban található szingularitást, ahová minden a feketelyukba belépő anyag végül véges sajátidő alatt bezuhan. Csillagászati megfigyelések közvetett módon igazolják feketelyukak létezését.

A fenti korlátokon az általános relativitás elmélete túllép, kivéve a szingularitások problematikáját. Számos olyan tapasztalati jelenség van, mint pl. a Merkúr perihélium mozgása, a fénysugár görbülése a Nap közelében, a gravitációs lencse-effektus, a gravitációs vöröseltolódás, a gravitációs sugárzás, stb., ami az általános relativitáselmélet keretében nyer magyarázatot. Az általános relativitáselmélet azonban egy alapvető szemléletváltást jelent a gravitációról alkotott elképzelésünkben.

¹¹Russell Alan Hulse, amerikai fizikus, 1950-

¹²Joseph Hooton Taylor Jr., amerikai asztrofizikus, 1941-

¹³Rainer Weiss, amerikai fizikus, 1932-

¹⁴Kip Stephen Thorne, amerikai fizikus, 1940-

¹⁵Barry Barish, amerikai fizikus, 1936-

¹⁶Karl Schwarzschild, német fizikus és csillagász, 1873-1916.

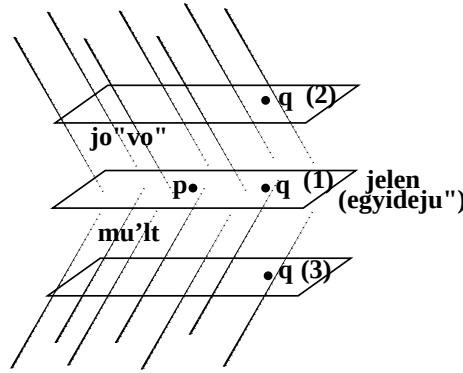
A newtoni mechanika szemlélete szerint a fizikai történések az eleve adott térben és időben mennek végbe. A speciális relativitáselmélet ugyan viszonylagossá teszi a térbeliség és az időbeliség fogalmát, de továbbra is azt mondja, hogy a fizikai történések egy eleve adott geometriai háttéren, a téridőben mennek végbe. A tér és idő a newtoni mechanikában, avagy a téridő a speciális relativitáselméletben passzív színpad szerepét tölti be, amelynek geometriáját a fizikai történések nem befolyásolják. Ezzel szemben az általános relativitáselmélet arra az álláspontra helyezkedik, hogy a téridő geometriai viszonyait maguk a fizikai történések alakítják ki, azaz az anyag mozgása határozza meg, és ezért a téridő geometriája éppen annyira dinamikai, mint az anyag viselkedése. A gravitáció többé nem fizikai mezőként jelenik meg, hanem a téridő geometriájaként, amelyet az anyag gravitációs hatásánál fogva tud alakítani, meghatározni.

Az általános relativitáselmélet klasszikus fizikai elmélet, ami egyúttal érvényességi határt is jelent számára. A feketelyukakban vagy a Világegyetem korai, a Nagy Bumm-ot követő szakaszában uralkodó gravitációs mező annyira erős, hogy a mező gravitációs energiasűrűsége összemérhető az anyag zérusponthoz közeli kvantumfluktuációiból adódó kinetikus energiasűrűségével. Ekkor várható, hogy a gravitációs effektusok mellett a kvantumfizikai effektusok is jelentős szerepet játszanak, ami túlmutat az általános relativitáselmélet keretein.

1.2. A newtoni mechanika és a speciális relativitáselmélet a tér és idő fogalmáról

A térről és időről alkotott foglmaink folyamatosan változtak, számos korábbi elképzelésünk ezekről a fogalmakról a speciális relativitáselmélet szerint helytelennek bizonyult, majd az általános relativitáselméletben még gyökeresebben megváltozott. Az általános relativitás elmélete előtti fizikai világképünk szerint minden fizikai történés, folyamat **elemi események** egymásutánjaként fogható fel, amelyek definíció szerint pontszerűeknek (azaz térbeli kiterjedés nélkülieknek) és pillanatszerűeknek tekinthetők. Az elemi események folytonos ponthalmazt alkotnak (pontosabb matematikai megjelöléssel sokaságot), amelyet **téridőnek** nevezünk. A téridőben minden elemi esemény (vagy legalábbis minden elemi esemény egy tetszőleges másik elemi esemény kicsiny környezetében) 4 adattal, azaz 4 koordinátával jellemezhető bármely megfigyelő számára: 3 térkoordinátával és egy időadattal. A téridő tehát 4-dimenziós folytonos sokaság. Az általános relativitás elmélete előtti fizikában a téridő-sokaság nem fizikai objektum, hanem eleve adott háttér, amely jól definiált geometriával rendelkezik, és amelyen a fizikai objektumok közötti történések végbemennek anélkül, hogy azok bármilyen kihatással lennének a téridő geometriájára. Az általános relativitáselméletben a téridőről alkotott fogalmunk gyökeresen megváltozik: egyrészt a téridőt a mozgó anyag hozza létre, tehát a téridő-sokaság dinamikai objektum, amely magával a gravitációs mezővel azonosítható; másrészt a téridő pontjai elveszítik fizikai tartalmukat, az elemi események a fizikai objektumok koincidenciái, ezek hordoznak fizikai tartalmat, mint például két részecske találkozása, vagy két fizikai mező lokálisan megfigyelt (tehát) összetartozó értékei.

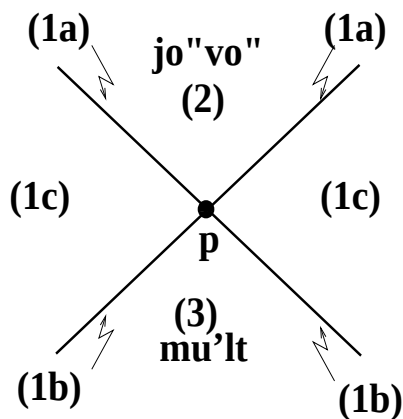
A newtoni mechanika a téridőt további szerkezettel ruházza fel. Tetszőleges p elemi eseményhez képest a többi q esemény a következőképpen osztályozható. (1) Vannak azok a q elemi események, amelyekre az igaz, hogy semmilyen megfigyelő vagy anyagi pont nem lehet jelen mindkét (p és q) eseménynél. (2) Vannak azok a q események, amelyekbe egy megfigyelő vagy anyagi pont el tud jutni p -ből, ezek a p -hez képest jövőbeli események. (3) Vannak azok a q események,



1. ábra. A newtoni mechanika téridő-szerkezetének sematikus szemléltetése

amelyekből egy anyagi pont vagy megfigyelő el tud jutni p -be, ezek a p -hez képest múltbeli események. Az eseményeknek ez az osztályozása lényegében nemcsak a téridő geometriai szerkezetének, hanem kauzális szerkezetének is az alapja. Az (1) típusú q eseményekkel p nem lehet ok-okozati, vagyis kauzális kapcsolatban, a (2) típusú q események lehetnek a p esemény következményei; a (3) típusú q események lehetnek a p esemény okai. A newtoni mechanika szerint az (1) tulajdonságú események p -vel egyidejűek, és egy 3-dimenziós sokaságot alkotnak, amely kifeszíti a geometriai teret. Az egyidejűség vonatkoztatási rendszertől független tény. Olyan ekvivalencia relációt jelent a téridő pontjainak halmazán, amely szerint az események egyidejű események ekvivalencia osztályába sorolhatók. Az egyes ekvivalencia osztályok pedig folytonos időparaméterrel jelölhetők meg, amely konvenció szerint monoton növekszik aszerint, ahogy haladunk valamely ekvivalencia-osztály felől az ahhoz képest jövőbeli ekvivalencia-osztály felé.

A téridő fenti szerkezete, ami az események tetszőleges p elemi eseményhez képesti (1), (2), (3) tulajdonságú halmazokba történő besorolását illeti, érvényes marad a speciális relativitáselméletben is. Nem érvényes azonban, hogy az (1) tulajdonságú események 3-dimenziós sokaságot alkotnának, és hogy azokat egyidejűeknek tekinthetné bármely megfigyelő. Az (1) tulajdonságú események tovább osztályozhatók: (1a) Vannak azok a q pontok, amelyek a p -hez képest jövőbeli események halmazának határán helyezkednek el. Ezeket p -ből induló anyagi pont nem érheti el, viszont elérheti p -ből induló fénysugár. Ezek alkotját a p -hez tartozó jövőbeli fénykúpot, ami egy 3-dimenziós sokaság. (1b) Hasonlóan értelmezhetjük a p -hez tartozó múltbeli fénykúpot. (1c) Végül vannak azok a q pontok, amelyek (1) tulajdonságúak és nincsenek rajta sem a p -hez tartozó jövőbeli, sem a p -hez tartozó múltbeli fénykúpon. Ezeket a pontokat p -hez képest térszerűen elválasztottaknak nevezzük, és ezek 4-dimenziós sokaságot képeznek. Megjegyezzük, hogy a fénykúpon és a fénykúpon belül elhelyezkedő pontokat szokás rendre p -hez képest fényszerűen, és időszerűen elválasztott pontoknak nevezni. A téridő itt leírt szerkezete bármely megfigyelő számára azonos, abszolút érvényű. Az, hogy a téridő geometriai szerkezete különbözik a newtoni mechanikában megszokottól, annak tulajdonítható, hogy nincsen abszolút egyidejűség, mint vonatkoztatási rendszertől független fogalom. Természetesen bármely megfigyelő definiálhatja az egyidejű események halmazát, ami továbbra is 3-dimenziós sokaság. Az egyidejű események halmaza azonban függeni fog attól, hogy hogyan mozog az adott megfigyelő, aki az egyidejűséget definiálja. Az egyidejűség fogalmának relativizálása okozta talán a legdrámaibb változást a fizikusok téridőről alkotott szemléletében, amikor bebizonyosodott, hogy



2. ábra. A speciális relativitáselmélet téridő-szerkezetének sematikus szemléltetése

a speciális relativitáselmélet a tágabb érvényességi körű helyes fizikai elmélet, és a newtoni fizika csak ennek jó közelítése akkor, ha a mozgó testek sebessége a vákuumbeli fénysebességhez képest kicsiny.

A speciális relativitáselmélet (és a newtoni mechanika) szerint kitüntetett szerepük van az inerciális, azaz nem gyorsuló mozgást végző testeknek. Ezek olyan mozgó testek, amelyekre nem hatnak külső erők. A tehetetlenségi mozgást végző testhez, ill. megfigyelőhöz rögzíthetünk gondolatban egy távolságmérésre szolgáló vonalzókból (standard hosszúságmérő eszköz) álló merev rendszert, amelynek geometriáját euklideszinek feltételezzük. Ennek pontjait (x, y, z) Descartes¹⁷-koordinátákkal jelölhetjük meg. Végül a merev rendszer minden pontjában nyugvó órákat (standard időmérő eszköz) helyezünk el. Utóbbiakat szimmetrikus eljárással szinkronizáljuk, megkövetelve, hogy bármely két szinkronizálni kívánt óra esetén a köztük félúton elhelyezkedő megfigyelő által küldött fényjel mindkét órához azonos óramutatóállásnál érkezzen meg. Itt kihasználjuk, hogy vákuumban a fénysebesség nagysága minden megfigyelő számára minden irányban azonos (a newtoni mechanikában végtelen, a speciális relativitáselméletben c). A szinkronizálás a téridő bonyolultabb kauzális szerkezete miatt a speciális relativitáselméletben nem triviális. Végül a megfigyelő magával hordozhatja ezt a nyugvó szinkronizált órákkal ellátott merev rendszert nem forgó módon. Ekkor a téridő minden p eseményét el tudja látni az (x, y, z) térkoordinátákkal és az óráján (a merev rendszer szinkronizált óráin) leolvasott t mutatóállással: $p \leftrightarrow (t, x, y, z)$. Így **globális inerciális vonatkoztatási rendszert**, ill. koordinátarendszert értelmeztünk. Végül összehasonlíthatjuk a téridő pontjainak koordinátáit különböző inerciális vonatkoztatási rendszerekben. A newtoni mechanikában a kapcsolatot a Galilei¹⁸-transzformáció írja le. Legyen O az egyik megfigyelő, aki a p eseményt a (t, x, y, z) koordinátákkal jelöli meg. Legyen továbbá O' egy másik megfigyelő, akinek O -val történő találkozása a $t = x = y = z = 0$ esemény, és aki O -hoz képest az x -irányban v állandó sebességgel mozog. Ekkor az O' -höz rögzített inerciarendszerben a p esemény koordinátái $t' = t$, $x' = x - vt$, $y' = y$, $z' = z$. A speciális relativitáselméletben ezt a

¹⁷René Descartes (Renatus Cartesius), francia filozófus, matematikus és természettudós, 1596-1650.

¹⁸Galileo Galilei, olasz fizikus, csillagász, matematikus, természettudós, 1564-1642

kapcsolatot a Lorentz¹⁹-transzformáció írja le:

$$t' = \frac{t - \frac{vx}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \quad x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \quad y' = y, \quad z' = z. \quad (1.2.1.)$$

A fenti transzformációkkal kapcsolatban azonban fontos tudatosítanunk, hogy a speciális relativitáselméletben (és a newtoni mechanikában) nincsen kitüntetett inerciarendszer, hanem minden inerciarendszer egyenértékű. Ezért az egyik vagy másik inerciális megfigyelő által az elemi eseményekhez (azonos eljárással) rendelt koordináták függenek a megfigyelőtől, nem abszolút jellegűek. Nem jellemzik megfigyelőtől, azaz vonatkoztatási rendszertől függetlenül a téridő geometriai és kauzális szerkezetét. Jogos tehát az a kérdés, hogy melyek a téridő geometriai szerkezetének vonatkoztatási rendszertől független jellemzői, és azokat hogyan lehet kifejezni a globális inerciális koordinátákkal. A newtoni mechanikában az egyedüli ilyen mennyiségek a következők: (1) két esemény között eltelt Δt idő; (2) két egyidejű esemény térbeli távolsága $\Delta \ell = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2}$. Ezeket és csak ezeket találja bármely inerciális megfigyelő azonosaknak. Ez megfelel annak, hogy a téridő egyidejű események 3-dimenziós sokaságaival rétegezhető, az egyes rétegek megjelölhetők egy t világidővel, és valamely $t = t_0$ időkoordinátájú rétegen értelmezett térbeli koordinátarendszer átemelhető a többi rétegre.

A speciális relativitáselméletben sem az időtartamok, sem a valamely megfigyelő által egyidejűnek észlelt események térbeli távolsága nem független a vonatkoztatási rendszertől. A téridő egyetlen vonatkoztatási rendszertől független jellemzője:

$$I = -(\Delta t)^2 + \frac{1}{c^2}[(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2]. \quad (1.2.2.)$$

A globális inerciarendszerek közti összes lehetséges transzformációk a Poincaré²⁰-transzformációk. Ezek olyan (inhomogén) lineáris transzformációk, amelyek az I mennyiséget invariánsan hagyják. (A Poincaré-transzformációk a térbeli eltolásokat, az időbeli eltolásokat és a Lorentz-transzformációkat foglalják magukba.) Az I invariáns jellegzetessége, hogy $(\Delta t)^2$ előjele negatív. Ha pozitív lenne, akkor $c^2 I$ a lapos (nem görbült) euklideszi távolságnégyzet kifejezése lenne egy 4-dimenziós térben. A negatív előjel miatt a speciális relativitáselmélet szerint a téridő nem euklideszi metrikájú, hanem Lorentz-metrikájú, úgynevezett Minkowski²¹-tér. A metrika pontosabb fogalmával később ismerkedünk meg. Az invariáns „távolságnégyzet” kifejezésében szereplő $(-, +, +, +)$ előjeleket szignatúrának nevezzük. A Minkowski-téridő lapos (nem görbült), a tehetetlenségi mozgást végző anyagi pontok világvonalai pedig egyenesek.

Megjegyzés: Mindez természetesen nem mond ellent annak, hogy a Minkowski-téridőben a fentebb bevezetett inerciális (t, x, y, z) koordináták helyett használhatunk görbült koordinátarendszert, mint pl. az egyenletesen gyorsuló megfigyelő által definiált Rindler²²-koordinátákat (amelyekről később teszünk említést).

¹⁹Hendrik Antoon Lorentz, holland fizikus, 1853-1928

²⁰Jules Henri Poincaré, francia matematikus, fizikus, filozófus, 1854-1912

²¹Hermann Minkowski, német matematikus, 1864-1909.

²²Wolfgang Rindler, osztrák fizikus, 1924- .

1.3. Az általános relativitáselmélet elvi alapjai

Mint azt fentebb már említettük, a gravitáció Newton-féle törvénye feltételezi, hogy az egyik test pillanatszerűen fejti ki gravitációs hatását a másakra. Ez nem egyeztethető össze a speciális relativitáselmélettel, amely szerint minden fizikai hatás véges sebességgel terjed. Lehetne azonban arra gondolni, hogy a gravitációs törvény általánosítható olyan módon, hogy figyelembe vegye a kölcsönhatás retardáltságát. Einstein azonban nem ezen az úton indult el, amikor megalkotta a gravitáció elméletét.

Mi indíthatta arra, hogy más úton keresse a gravitáció leírását? Az egyik indíték **az ekvivalencia elve**, amely szerint minden test alá van vetve a gravitációnak és azonos módon esik szabadon gravitációs mezőben, mint azt már Galilei is megfigyelte. Ez annak a következménye, hogy a testek súlyos és tehetetlen tömegének hányadosa univerzális állandó, mint azt az Eötvös-kísérlet bizonyítja. A szabadesés független tehát a szabadon eső test tulajdonságaitól. Ezért a szabadon eső testek világvonalai kitüntetett görbék a téridőben, amelyek szintén függetlenek a szabadon eső test tulajdonságaitól. Ez veti fel annak a lehetőségét, hogy a gravitációs mező tulajdonságait magával a téridő szerkezetével hozzuk közvetlen kapcsolatba. A speciális relativitáselmélet szerint a tehetetlenségi mozgást végző testek világvonalai a Minkowski-téridő geodetikusai, és ezek alkotják a téridő szerkezetét jellemző kitüntetett görbesereget. Ez sejteti, hogy a szabadon eső testek világvonalai lehetnek általában (gravitáció jelenlétében) a téridő geodetikusai, a téridő geometriája azonban általában nem Minkowski-metrikával jellemezhető, amely lapos (nem görbült) sokaságot határoz meg, hanem valamilyen görbült sokaságot leíró metrikával.

Másik indítékul szolgálhattak a **Mach²³-elv** néven összefoglalható gondolatok. A newtoni mechanika és a speciális relativitáselmélet szerint is a téridő szerkezete egyszer s mindenkorra adott és független attól, hogy jelen van-e anyag és az hogyan mozog. Például az is független a Világegyetemben jelenlevő anyagtól, hogy mit jelent a nem gyorsuló (a tehetetlenségi) mozgás és a nem forgó mozgás. Mach és több más fizikus ezt nem találta kielégítőnek. Azt a sejtést fogalmazták meg, hogy a Világegyetemben levő összes anyagnak kell azt befolyásolnia, meghatároznia, hogy lokálisan mit nevezhetünk nem gyorsuló, ill. nem forgó mozgásnak, továbbá, hogy ezeknek a fogalmaknak anyag nélküli Világegyetemben egyáltalán nincs is jelentésük. Einstein annyit mindenképpen figyelembe vett ezekből a gondolatokból, hogy olyan leírását kereste a gravitációnak, amikor az anyag jelenléte döntően befolyásolja a téridő szerkezetét.

A gravitáció Einstein által kidolgozott elméletében, **az általános relativitáselméletben** a téridő szerkezete maga is éppen annyira dinamikai, mint az anyag. A téridőnek a megfigyelőktől független szerkezetét ugyanúgy a metrika írja le, mint

²³Ernst Waldfried Josef Wenzel Mach, cseh-osztrák fizikus és filozófus, 1838-1916

a speciális relativitáselméletben. Ez a metrika azonban nem a lapos (nem görbült) sokaság Minkowski-féle metrikája, hanem általában görbülettel rendelkező sokaság metrikája. A téridő görbülete, azaz az eltérés a nem görbült téridőtől, hivatott a gravitáció leírására. Az Einstein által posztulált egyenlet értelmében a téridő görbülete az anyag energiaimpulzus-tenzorával van kapcsolatban. Így a téridő szerkezete, ill. az azt meghatározó metrika szoros kapcsolatban áll a Világegyetemben található anyaggal. Azóta számos kísérleti bizonyíték támasztja alá az általános relativitáselméletet.

2. Differenciálható sokaságok, tenzorok

2.1. Sokaságok fogalma

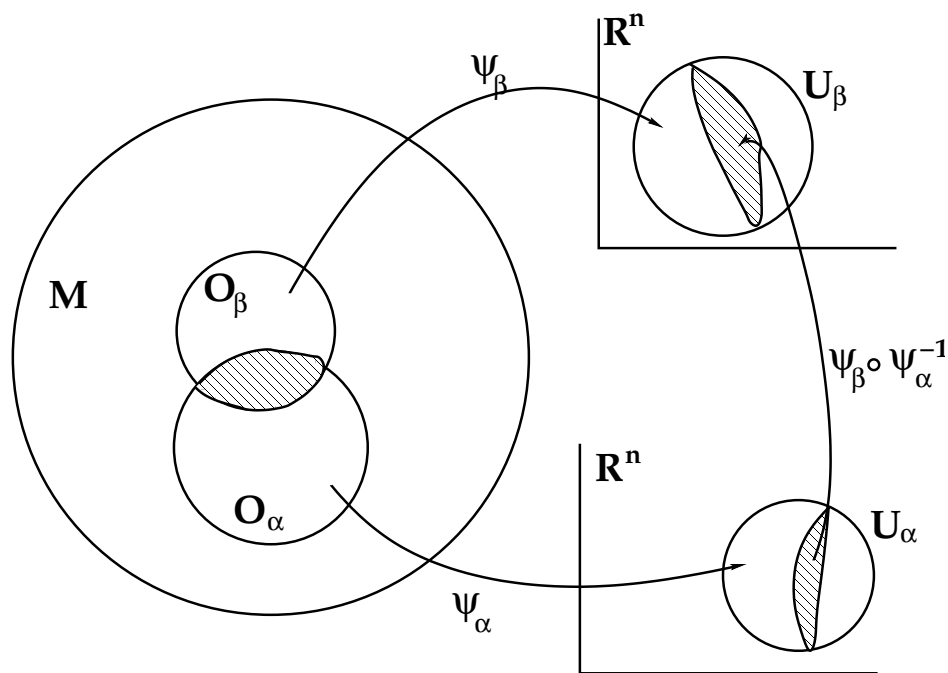
Amikor a téridő szerkezetét akarjuk feltérképezni, akkor két fontos szempont vezérel. Egyrészt nem akarunk eleve feltételezni semmit a téridő globális szerkezetéről, hanem a téridőt csak lokálisan, minden egyes pontja környezetében szeretnénk koordinátázni. Másrészt, a téridőnek, mint ponthalmaznak a strukturáját a sokaság belső tulajdonságaiként akarjuk definiálni, mert jelenlegi ismereteink szerint a 4-dimenziós téridő nincsen beágyazva valamely magasabb dimenziós térbe.

A sokaság olyan M halmaz, amely lokálisan olyan, mint $\mathbb{R}^n$ nyílt halmaza, és ilyen lokális tartományokból „simán” van összevarrva. Pontosabban:

Definíció: Sokaság: az M halmazt az azon O_α részhalmazainak $\{O_\alpha\}$ együttesével együtt nevezzük sokaságnak, amelyek a következő tulajdonságoknak tesznek eleget:

1. $\forall p \in M$ ponthoz található olyan α , hogy $p \in O_\alpha$, vagyis az O_α részhalmazok lefedik M -et;
2. $\forall \alpha$ -hoz létezik olyan $\psi_\alpha : O_\alpha \mapsto U_\alpha \subset \mathbb{R}^n$ leképezés, amely kölcsönösen egyértelműen képezi le O_α -t az $\mathbb{R}^n$ egy U_α nyílt részhalmazára, vagyis a sokaság bármely pontjának környezete olyan, mint $\mathbb{R}^n$ egy nyílt halmaza;
3. Ha O_α és O_β bármely két olyan részhalmaza az $\{O_\alpha\}$ lefedésnek, hogy $O_\alpha \cap O_\beta \neq \emptyset$, és $\psi_\alpha : O_\alpha \mapsto U_\alpha \subset \mathbb{R}^n$ és $\psi_\beta : O_\beta \mapsto U_\beta \subset \mathbb{R}^n$, akkor tekinthetjük a $\psi_\beta \circ \psi_\alpha^{-1}$ leképezést, amely $\psi_\alpha(O_\alpha \cap O_\beta) \subset U_\alpha \subset \mathbb{R}^n$ -t képezi le $\psi_\beta(O_\alpha \cap O_\beta) \subset U_\beta \subset \mathbb{R}^n$ -ra. Ekkor megköveteljük, hogy $\psi_\alpha(O_\alpha \cap O_\beta)$ és $\psi_\beta(O_\alpha \cap O_\beta)$ nyílt halmazok legyenek, és $\psi_\beta \circ \psi_\alpha^{-1}$, mint $\mathbb{R}^n$ -ből $\mathbb{R}^n$ -be történő leképezés, C^∞ típusú, azaz végtelen sokszor differenciálható legyen. Ez a tulajdonság fejezi ki, hogy a lokális leképezések simán vannak összevarrva. ($A \circ$ jel a leképezések kompozícióját, azaz egymás utáni végrehajtását jelenti.)

Érdemes emlékeztetni rá, hogy $\mathbb{R}^n$ -ben az r sugarú, $x = (x^1, \dots, x^n)$ középpontú nyílt gömb azon y pontok halmaza, amelyekre $|x - y| = \sqrt{\sum_{\mu=1}^n (x^\mu - y^\mu)^2} < r$. Az U_α nyílt halmazok olyan részhalmazai $\mathbb{R}^n$ -nek, amelyek ilyen nyílt gömbök egyesítésekként állíthatók elő. Az egyes ψ_α leképezéseket **lokális térképeknek**, vagy **lokális koordinátarendszereknek** szokták nevezni, ezek szinonim fogalmak. Fel szokás tételezni, hogy $\{O_\alpha\}$ és $\{\psi_\alpha\}$ maximális, azaz a sokaság-fogalom tartalmazza az összes lehetséges lokális koordinátarendszert, amely eleget tesz a fenti tulajdonságoknak. A sokaság topológikus térré tehető, amikor is az O_α halmazok játsszák a nyílt halmazok szerepét és a ψ_α lokális térképektől megköveteljük,



3. ábra. A sokaságot lefedő lokális térképek sima összevarrásának személtetése.

hogy homeomorfizmusok legyenek. Továbbiakban csak olyan sokaságokról lesz szó, amelyek, mint topológikus terek Hausdorff²⁴-típusúak és parakompaktak.

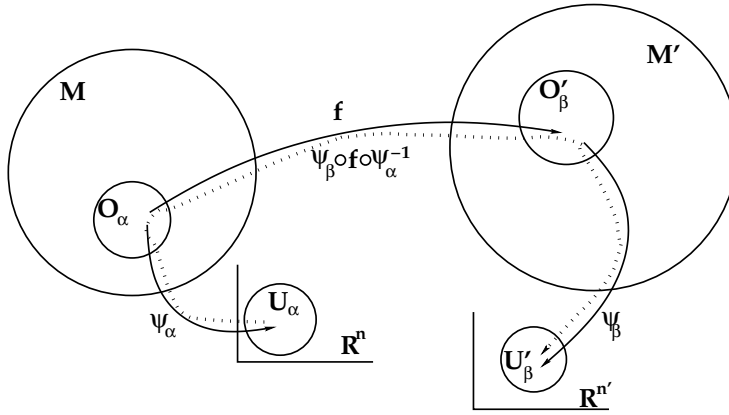
Fontos még annak az eldöntése, hogy mely sokaságok struktúrája azonos. Ehhez értelmezzük a diffeomorfizmusokat. Azon sokaságok struktúrája azonos, amelyek diffeomorfizmus révén képezhetők le egymásra. Az ilyen sokaságokat **diffeomorfaknak** nevezzük.

Definíció: Diffeomorfizmus: az M sokaságnak M' sokaságra történő $f : M \mapsto M'$ leképezését diffeomorfizmusnak nevezzük, ha kölcsönösen egyértelmű, „-ra” történő leképezés, amelynek létezik inverze és az C^∞ . Azon, hogy f C^∞ , azt értjük, hogy ha M az $\{O_\alpha, \psi_\alpha\}$, az M' pedig az $\{O'_\beta, \psi'_\beta\}$ lokális térképekkel van lefedve, akkor bármely α és β esetén az a $\psi'_\beta \circ f \circ \psi_\alpha^{-1}$ leképezés C^∞ , amelyik $U_\alpha \subset \mathbb{R}^n$ -et leképezi $U'_\beta \subset \mathbb{R}^{n'}$ -be.

2.2. Érintőterek és érintővektorok

A newtoni mechanika szerint a 3-dimenziós térben a véges elmozdulások a vektorösszeadás szabályai szerint összeadhatók, továbbá számmal szorozhatók, azaz nyújthatók és zsugoríthatók. Más szóval a newtoni mechanika 3-dimenziós tere egy 3-dimenziós lineáris vektortér. Hasonlóan a Minkowski-téridő 4-esvektorok

²⁴Felix Hausdorff, német matematikus, 1868-1942.



4. ábra. Az M sokaságot az M' sokaságra leképező f diffeomorfizmus személtetése.

lineáris vektortere. A téridőnek ez a szerkezete azonban nincsen meg, ha görbült. Például egy gömb felületén nincsen értelme annak, hogy hogyan lehet a felület egyik pontjához a másikat úgy „hozzáadni”, hogy a felület egy harmadik pontját kapjuk eredményül. Ugyanakkor lokálisan a görbült felület minden pontja kicsiny környezetében értelmezhetjük az infinitezimális eltolások összeadását és számszorosát. Ha a görbült tér egy magasabb dimenziós térbe beágyazott felület lenne, akkor minden pontban érintő hipersíkot képzelhetnénk el, s ennek a vektoraival azonosítanánk az infinitezimális eltolásokat. Mivel legjobb tudásunk szerint a téridő nincsen beágyazva ilyen módon, azért a vektorok fogalmát a sokaságok szerkezetének belső tulajdonságaira alapozva, külső beágyazó térre történő hivatkozás nélkül kell értelmezni.

A vektorok definícióját az motiválja, hogy $\mathbb{R}^n$ -ben a vektoroknak kölcsönösen egyértelműen iránymenti deriváltak feleltethetők meg: a $v = (v^1, \dots, v^n)$ vektornak a $\sum_{\mu=1}^n v^\mu (\partial/\partial x^\mu)$ iránymenti derivált, és fordítva. Az iránymenti derivált az $\mathbb{R}^n$ -en értelmezett skalármezőkön van értelmezve, és meghatározza a mező infinitezimális megváltozását egy olyan görbe mentén, amelynek érintője v . A sokaság tetszőleges pontjában az érintővektorokat ennek mintájára definiáljuk.

Definíció: Érintővektor. Legyen M sokaság, p a sokaság tetszőleges pontja és $\mathcal{F}$ azon f C^∞ -függvények halmaza, amelyek M -ből $\mathbb{R}$ -be képeznek le. Ekkor a p pontbeli v érintővektort azzal a $v : \mathcal{F} \mapsto \mathbb{R}$ leképezéssel definiáljuk, amely lineáris, azaz amelyre $v(af + bg) = av(f) + bv(g)$, $\forall a, b \in \mathbb{R}$, $\forall f, g \in \mathcal{F}$, és amelyre érvényes a Leibnitz²⁵-szabály, azaz $v(fg) = f(p)v(g) + g(p)v(f)$.

Következmény: Ha $h \in \mathcal{F}$ konstans függvény, azaz $h(q) = c = \text{const.} \neq 0$ $\forall q \in M$, akkor $v(h) = 0$. Valóban, a Leibnitz-szabály miatt ekkor $v(h^2) = 2hv(h) = 2cv(h)$, másrészt a linearitás miatt $v(h^2) = v(ch) = cv(h)$, úgyhogy $2cv(h) = cv(h)$, azaz $v(h) = 0$ adódik.

²⁵Gottfried Wilhelm Leibnitz (vagy Leibniz), német matematikus, 1646-1716

A $p \in M$ pontban értelmezett v vektorok összessége egy V_p lineáris vektorteret alkot a $(v_1 + v_2)(f) = v_1(f) + v_2(f)$ összeadásra és az $(av)(f) = av(f)$ számmal történő szorzásra nézve. Ez a sokaság **érintőtere** p -ben.

2.2.1 tétel: Ha M n -dimenziós sokaság és a $p \in M$ pontban az érintőtere V_p , akkor $\dim V_p = n$.

Valóban meg lehet mutatni, hogy V_p -ben értelmezhető pontosan n darab lineárisan független vektorból álló vektorrendszer, amely kifeszíti V_p -t. Egy ilyen bázishoz a következőképpen jutunk. Legyen $p \in O$ és $\psi : O \mapsto U \subset \mathbb{R}^n$ lokális térkép. Legyenek továbbá $\mathbb{R}^n$ -ben a koordináták $x = (x^1, \dots, x^n)$. Definíció szerint bármely $f \in \mathcal{F}$ esetén $f \circ \psi^{-1} : U \mapsto \mathbb{R}$ C^∞ , ezért ennek a függvénynek léteznek az x^μ koordináták szerinti parciális deriváltjai a $\psi(p) \in U$ pontban. A $p \in M$ pontbeli V_p érintőtér szóban forgó bázisvektorait

$$X_\mu(f) = \frac{\partial}{\partial x^\mu}(f \circ \psi^{-1}) \quad \mu = 1, \dots, n \quad (2.2.1.)$$

összefüggéssel értelmezzük. Ezekről a vektorokról megmutatható, hogy lineárisan függetlenek, és hogy bármely $v \in V_p$ vektor felírható ezen bázisvektorok lineáris kombinációjaként, azaz hogy $\forall f \in \mathcal{F}$ fennáll, hogy

$$v(f) = \sum_{\mu=1}^n v^\mu X_\mu(f), \quad (2.2.2.)$$

ahol

$$v^\mu = v(x^\mu \circ \psi) \quad (2.2.3.)$$

a v vektor komponensei az $\{X_\mu\} \subset V_p$ bázisban, hiszen

$$v(x^\mu \circ \psi) = \sum_{\nu=1}^n v^\nu (\partial/\partial x^\nu)(x^\mu \circ \psi \circ \psi^{-1}) = v^\mu. \quad (2.2.4.)$$

Az így bevezetett $\{X_\mu\}$ bázist **koordináta-bázisnak** nevezik. Egy másik szokásos jelölés X_μ helyett $\partial/\partial x^\mu$.

Következmény: Bázistranszformáció. Ha a ψ lokális térkép helyett egy másik ψ' lokális térképet használunk, akkor másik $\{X'_\mu\}$ koordinátabázist kapunk. Ha felhasználjuk a közönséges analízis láncszabályát, akkor

$$X_\mu = \sum_{\nu=1}^n \frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\mu} \Big|_{\psi(p)} X'_\nu \quad (2.2.5.)$$

adódik, ahol $x'^\nu = x'^\nu(x^1, \dots, x^n) = (\psi' \circ \psi^{-1})^\nu$ határozza meg az $\mathbb{R}^n$ -beli új és régi koordináták kapcsolatát. Ekkor $v = \sum_{\mu=1}^n v^\mu (\partial/\partial x^\mu) = \sum_{\mu,\nu=1}^n \frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\mu} \Big|_{\psi(p)} v^\mu (\partial/\partial x'^\nu)$

miatt

$$v'^\nu = \sum_{\mu=1}^n \frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\mu} \Big|_{\psi(p)} v^\mu \quad (2.2.6.)$$

a vektorkomponensek transzformációs szabálya.

Fontos vektorok a sima görbék érintői.

Definíció: Sima görbének nevezzük az $\mathbb{R}$ valós számegyenesnek vagy a valós számegyenes egy intervallumának C leképezését M -be, $C : \mathbb{R} \mapsto M$, ha az C^∞ .

Definíció: A C sima görbe érintője a sokaság tetszőleges $p \in M$ pontjában az a $T \in V_p$ vektor, amelyet tetszőleges $f \in \mathcal{F}$ esetén a

$$T(f) = \frac{d}{dt}(f \circ C) \quad (2.2.7.)$$

összefüggés definiál, ahol az $f \circ C : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ valós függvény értelmezési tartományának pontjait t valós paraméterrel jelöltük, $p = C(t)$, és az egyenlet jobb oldalán valós függvény közösleges deriváltja áll.

Ha a $p \in M$ pont környezetében választott ψ lokális koordinátarendszer koordinátái x^μ , akkor a görbe paraméteres egyenlete ebben a koordinátarendszerben $(\psi \circ C)^\mu = x^\mu(t)$ és $f \circ \psi^{-1} = f(x^1, \dots, x^n)$, így az f függvénynek a C görbe pontjain felvett értékei $f \circ C = f \circ \psi^{-1} \circ \psi \circ C = f(x^1(t), \dots, x^n(t))$. Ezért írhatjuk, hogy

$$T(f) = \frac{d}{dt}(f \circ C) = \frac{d}{dt}(f \circ \psi^{-1} \circ \psi \circ C) = \sum_{\mu=1}^n \frac{\partial}{\partial x^\mu}(f \circ \psi^{-1}) \frac{dx^\mu}{dt}, \quad (2.2.8.)$$

ahonnan

$$T(f) = \sum_{\mu=1}^n \frac{dx^\mu}{dt} X_\mu(f), \quad (2.2.9.)$$

avagy rövidebben a C sima görbe érintővektora a $p \in M$ pontban

$$T = \sum_{\mu=1}^n \frac{dx^\mu}{dt} X_\mu \equiv \sum_{\mu=1}^n T^\mu X_\mu \quad (2.2.10.)$$

és ennek komponensei

$$T^\mu = \frac{dx^\mu}{dt} \quad (2.2.11.)$$

az $\{X_\mu\}$ koordinátabázisban.

Megjegyzés: Ha C olyan görbe, amelynek mentén minden koordináta állandó a μ_0 -adik x^{μ_0} kivételével, azaz C ehhez a koordinátához tartozó **koordinátavonal**,

akkor $T = X_{\mu_0}$. **A bázisvektorok tehát ilyen koordinátavonalak érintői.** (A lapos téridőben is hasonló a helyzet; a görbült téridőben azonban az érintővektor az érintőtér vektora és nem a téridősokaság p pontjából annak egy másik pontjába mutató nyíl.)

Megjegyzés: Tekintsük a V_p és V_q érintőtereket a sokaságnak rendre a p és $q \neq p$ pontjaiban. Ha csak a sokaság-struktúrát adtuk meg, akkor V_p és V_q vektorai között **nem találunk semmilyen természetes megfeleltetést.** Ilyen kapcsolatot csak alább fogunk találni, amikor a sokaságot további tulajdonságokkal látjuk el: értelmezni fogjuk a konnexit, segítségével a deriválás operátorát, azaz a gradiens-operátort, majd végül a párhuzamos eltolást, amely lehetővé fogja tenni, hogy V_p vektorait leképezzük V_q vektoraira. Ez a párhuzamos eltolás azonban függeni fog attól, hogy melyik, p -ből q -ba menő görbén végezzük el.

Definíció: (Érintő)vektormezőről beszélünk, ha a sokaság minden $p \in M$ pontjában adott egy $v|_p \in V_p$ vektor. Akkor mondjuk, hogy a **vektormező sima**, ha bármely $f : M \mapsto \mathbb{R}$ sima függvény esetén $v|_p(f) : M \mapsto \mathbb{R}$ sima függvény. Meg lehet mutatni, hogy az X_μ koordinátabázis-mezők simák. Ezért a v vektormező akkor és csak akkor sima, ha a v^μ koordinátái sima függvények.

Az $\mathbb{R}^n$ -ben az adott irányú elmozdulások egy-paraméteres folytonos csoportot alkotnak, és ezen elmozdulások generátora az adott irányú egységvektor. Ennek analógiájára meg lehet mutatni, hogy az M sokaságon értelmezett vektormező vektorai egy-paraméteres diffeomorfizmusok csoportjának generátorai, és hogy minden vektormezőhöz tartozik az egy-paraméteres diffeomorfizmusok egy csoportja. Ezért az érintővektorokat infinitezimális eltolásokkal hozhatjuk közvetlen kapcsolatba.

Definíció: A $\phi_t : \mathbb{R} \times M \mapsto M$ C^∞ leképezést **egy-paraméteres diffeomorfizmusok csoportjának** nevezzük, ha bármely rögzített $t \in \mathbb{R}$ esetén $\phi_t : M \mapsto M$ diffeomorfizmus, és bármely $t, s \in \mathbb{R}$ esetén $\phi_t \circ \phi_s = \phi_{t+s}$. Ekkor $\phi_{t=0}$ az egységelem és ϕ_{-t} a ϕ_t inverze.

Állítás: Minden ϕ_t egy-paraméteres diffeomorfizmus-csoporthoz rendelhetünk egy v vektormezőt. Legyen $p \in M$ rögzített. Ekkor $\phi_t(p) : \mathbb{R} \mapsto M$ olyan görbe, amelynek $t = 0$ paraméterű pontja p . Ezt nevezzük **a diffeomorfizmus-csoport pályájának, vagy orbitájának.** Legyen ezek után $v|_p$ az a vektor, amely a p -n áthaladó orbita érintője a p pontban: $v|_p(f) = \frac{d}{dt}(f \circ \phi_t(p)) \forall f : M \mapsto \mathbb{R}$. Ez a vektor tekinthető úgy, mint az orbita mentén p pontból történő infinitezimális eltolás generátora. Ha p befutja M -et, akkor így az egy-paraméteres diffeomorfizmus-csoportból tartozó vektormezőt kapunk.

Fordítva, minden sima v vektormezőhöz tartozik egy egy-paraméteres diffeomorfizmus-csoport. Legyen adott a v sima vektormező. Ekkor minden $p \in M$ ponton pontosan egy olyan görbe halad át, amelynek érintője p -ben $v|_p$. Ezek a görbék **a v vektormező $\mathcal{C}$ integrálgörbéi.** Meg lehet mutatni, hogy az integrálgörbék megkeresése egy közönséges elsőrendű differenciálegyenlet-rendszer megoldásának meg-

határozásával egyenértékű $\mathbb{R}^n$ -ben. Ha a p pont környezetében bevezetjük a ψ koordinátatérképet az $(x^1, \dots, x^n)$ koordinátákkal, akkor $x^\mu(t) = \psi \circ \mathcal{C}$ határozza meg a $t \in \mathbb{R}$ paraméterértékhez tartozó $\mathbb{R}^n$ -beli pontok $x^\mu(t)$ koordinátáit. Ezek a keresett $\mathcal{C}(t) = \phi_t(p)$ integrálgörbe pontjainak koordinátái, a keresett $x^\mu(t)$ függvények. Legyen $q = \mathcal{C}(t) \in M$ futó pont a $\mathcal{C}$ görbe mentén és $p = \mathcal{C}(0) = \phi_0(p)$. Ekkor tetszőleges $f \in \mathcal{F}$ sima függvény esetén

$$\begin{aligned} v_p(f) &= \frac{d}{dt}(f \circ \phi_t(p)) = \frac{d}{dt}(f \circ \mathcal{C}) = \frac{d}{dt}(f \circ \psi^{-1} \circ \psi \circ \mathcal{C}) \\ &= \sum_{\mu=1}^n \frac{\partial}{\partial x^\mu}(f \circ \psi^{-1}) \frac{dx^\mu}{dt}. \end{aligned} \quad (2.2.12.)$$

Másésszt viszont $v_p(f)$ felbontása az $\partial/\partial x^\mu$ koordinátabázisban

$$v_p(f) = \sum_{\mu=1}^n v^\mu(x^1, \dots, x^n) \frac{\partial}{\partial x^\mu}(f \circ \psi^{-1}). \quad (2.2.13.)$$

Ezért a szóbanforgó differenciálegyenlet-rendszer a $\partial/\partial x^\mu$ bázisban

$$v^\mu(x^1, \dots, x^n) = \frac{dx^\mu(t)}{dt}. \quad (2.2.14.)$$

Ennek a $t = 0$ -ban adott $p \in M$ kezdőponthoz, azaz adott $x^\mu(0) = x^\mu|_p$ kezdeti feltételekhez tartozó megoldása egyértelműen létezik. Ez a p ponton $t = 0$ paraméterértékkel áthaladó integrálgörbe paraméteres egyenlete. Ezután a $\phi_t(p)$ -t úgy definiáljuk, mint a p -n áthaladó integrálgörbe t paraméterértékhez tartozó pontját. Az így kapott ϕ_t egy egy-paraméteres diffeomorfizmus-csoport, leszámítva azt az esetet, ha t nem futhatja be csak a valós számegegyenes valamely véges intervallumát.

A későbbiekben hasznos lesz a v és w vektormezők kommutátorának fogalma.

Definíció: Legyen adott az M sokaságon a v és a w vektormező, ezek **kommutátorán** a

$$[v, w](f) = v(w(f)) - w(v(f)) \quad \forall f \in \mathcal{F} \quad (2.2.15.)$$

vektormezőt értjük. Be lehet bizonyítani, hogy a $[v, w]$ kommutátor valóban eleget tesz a linearitásnak és a Leibnitz-szabálynak, azaz valóban vektor.

Következmény: Mivel $X_\nu(f) = (\partial/\partial x^\nu)(f \circ \psi^{-1}) = \partial f(x^1, \dots, x^n)/\partial x^\nu$, azt kapjuk, hogy koordináta-bázisvektorok kommutátora zérus:

$$[X_\mu, X_\nu](f) = \frac{\partial}{\partial x^\mu} \left(\frac{\partial f(x^1, \dots, x^n)}{\partial x^\nu} \right) - \frac{\partial}{\partial x^\nu} \left(\frac{\partial f(x^1, \dots, x^n)}{\partial x^\mu} \right) = 0. \quad (2.2.16.)$$

Megfordítva, ha adottak az $X_1, \dots, X_n$ el nem tűnő vektormezők, amelyek páronként kommutálnak, azaz amelyekre $[X_\mu, X_\nu] = 0$, $\mu, \nu = 1, \dots, n$, akkor mindig létezik olyan lokális koordináta-rendszer, amelynek $\{X_\mu\}$ a bázisa.

Állítás: Az $\{X_\mu\}$ koordinátabázisban a kommutátor komponensei

$$[v, w]^\mu = \sum_{\nu=1}^n \left(v^\nu \frac{\partial w^\mu}{\partial x^\nu} - w^\nu \frac{\partial v^\mu}{\partial x^\nu} \right). \quad (2.2.17.)$$

Valóban, részletesen kiírva azt kapjuk, hogy $\forall f \in \mathcal{F}$ esetén

$$\begin{aligned} v(w(f)) &= \sum_{\nu} v^\nu X_\nu(w(f)) = \sum_{\nu} v^\nu X_\nu \left(\sum_{\mu} w^\mu X_\mu(f) \right) = \sum_{\nu} v^\nu X_\nu \left(\sum_{\mu} w^\mu \frac{\partial f(x^1, \dots, x^n)}{\partial x^\mu} \right) \\ &= \sum_{\nu, \mu} v^\nu \frac{\partial}{\partial x^\nu} \left(w^\mu \frac{\partial f}{\partial x^\mu} \right), \end{aligned} \quad (2.2.18.)$$

és hasonlóan

$$w(v(f)) = \sum_{\nu, \mu} w^\nu \frac{\partial}{\partial x^\nu} \left(v^\mu \frac{\partial f}{\partial x^\mu} \right), \quad (2.2.19.)$$

úgyhogy ezek különbsége

$$[v, w](f) = \sum_{\mu, \nu} \left(v^\nu \frac{\partial w^\mu}{\partial x^\nu} - w^\nu \frac{\partial v^\mu}{\partial x^\nu} \right) \frac{\partial f}{\partial x^\mu} \equiv [v, w]^\mu X_\mu(f), \quad (2.2.20.)$$

ahonnan a $[v, w]^\mu$ komponensekre a keresett kifejezés adódik.

2.3. Tenzorok

Már a newtoni mechanikában és a speciális relativitáselméletben is megtapasztaltuk, hogy a fizikai mennyiségek egy része skalár, ill. vektor, de azt is láttuk, hogy szükségünk van tenzoriális mennyiségekre is, mint pl. a mechanikai feszültség vagy az energia-impulzus tenzora. Hasonlóan, az általános relativitáselméletben a görbült téridő-sokaságon értelmezhetünk tenzorokat. Ehhez először definiáljuk a duális vektorokat, majd pedig a tenzorokat, mint a vektorok és duális vektorok multilineáris függvényeit. Az így értelmezett tenzor-fogalom független a lokális koordináta-rendszer-választástól.

Definíció: Legyen V lineáris vektortér. (Esetünkben $V = V_p$ a sokaság érintőtere a $p \in M$ pontban.) Ekkor a V **vektortér** V^* **duálisán** azon $\omega : V \mapsto \mathbb{R}$ leképezéseket értjük, amelyek lineárisak. A V vektortér lineáris leképezései a leképezések összeadásának és számmal való szorzásának triviális értelmezése esetén lineáris vektorteret alkotnak.

Állítás: Legyen adott a $\{v_\mu\}$ bázis a V vektortérben, akkor a

$$v^{\mu*}(v_\nu) = \delta_\nu^\mu \quad (2.3.1.)$$

összefüggés által definiált $\{v^{\mu*}\} \subset V^*$ vektorrendszer bázis a duális vektortérben; ez a **duális bázis**.

Megjegyzés: A duális bázis és a bázis közötti összefüggés ugyan megfeleltetést, izomorfizmust létesít a V vektortér és V^* duális vektortér elemei között, ez a megfeleltetés azonban függ a $\{v_\mu\}$ bázis megválasztásától. Ha nem adunk meg további szerkezetet a sokaságon, akkor nem lehet természetes megfeleltetést létesíteni V és V^* elemei között.

Megjegyzés: Meg lehet mutatni, hogy a duális vektortér duálisa, V^{**} izomorf az eredeti V vektortérrel, és ez egy természetes (bázisválasztástól független) megfeleltetés. Így a többszöri duálisképzés nem vezet új eredményre, és a továbbiakban V^{**} és V azonosnak tekinthetők, $V^{**} \equiv V$.

Definíció: Legyen V lineáris vektortér és V^* a duálisa. Ekkor a (k, l) típusú T **tenzor** a $T : \underbrace{V^* \times \dots \times V^*}_k \times \underbrace{V \times \dots \times V}_l \mapsto \mathbb{R}$ multilineáris leképezést értjük.

A (k, l) -típusú tenzorokat $k + l$ -**rendűeknek** nevezzük. A tenzor rendje azonban nem határozza meg egyértelműen a típusát.

Állítás: A szokásos összeadásra és számmal történő szorzásra nézve a (k, l) -típusú tenzorok $\mathcal{T}(k, l)$ lineáris vektorteret alkotnak.

Megjegyzés: Mivel V^{**} azonosítható V -vel, ezért az $(1, 0)$ -típusú tenzorok (a duális vektorok terén értelmezett lineáris leképezések) a vektorok. Nyilvánvalóan a $(0, 1)$ -típusú tenzorok pedig a duális vektorok.

Mivel a tenzorok multilineáris leképezések, ezért a $\{v_\mu\} \subset V$ bázisvektorokon és $\{v^{\nu*}\} \subset V^*$ duális bázison felvett értékeik teljesen meghatározzák őket. Ha $\dim V = \dim V^* = n$, akkor a (k, l) -típusú tenzorok argumentuma ezen bázisvektorokkal n^{k+l} különböző módon adható meg, úgyhogy $\dim \mathcal{T}(k, l) = n^{k+l}$.

Megjegyzés: Fontos megemlíteni, hogy a magasabb rendű tenzorokat többféle, egymással egyenértékű módon lehet szemlélni annak köszönhetően, hogy V^{**} és V azonosítható egymással. Például az $(1, 1)$ -típusú tenzor $T : V^* \times V \mapsto \mathbb{R}$ multilineáris leképezés. Ezért, rögzített $v \in V$ változó esetén $T(\cdot; v) : V^* \mapsto \mathbb{R}$ a V^{**} eleme (a duális téren értelmezett lineáris leképezés), és ezért minden rögzített $v \in V$ -hez hozzárendel egy másik V -beli vektort, azaz úgy tekinthető, mint egy $V \mapsto V$ lineáris leképezés. Hasonlóan az $(1, 1)$ típusú tenzort úgy is tekinthetjük, mint egy $V^* \mapsto V^*$ lineáris leképezést.

A tenzorokon az alábbi műveleteket szokás értelmezni.

Definíció: Kontrakció: a (k, l) -típusú tenzornak az i -edik duális vektorváltozója és a j -edik vektorváltozója szerinti C kontrakciója a

$$CT = \sum_{\sigma=1}^n T(\dots, v^{\sigma*}, \dots; \dots, v_\sigma, \dots) \quad (2.3.2.)$$

összefüggéssel meghatározott $(k-1, l-1)$ típusú tenzor, ahol a jobb oldalon az i -edik duális vektor- és a j -edik vektor-pozícióban álló változókat tüntettük fel. A kontrakció eredménye független a bázisválasztástól.

Definíció: A T (k, l) -típusú és a T' (k', l') -típusú **tenzorok** $T \otimes T'$ **külső szorzatán** azt a $(k+k', l+l')$ -típusú tenzort értjük, amelyet a következő szabály szerint képezhetünk. Legyenek $w_1, \dots, w_l \in V$ és $v^{1*}, \dots, v^{k*} \in V^*$ azok a vektorok és duális vektorok, amelyeken T hat, és rendre $w_{l+1}, \dots, w_{l+l'}$, ill. $v^{k+1*}, \dots, v^{k+k'*}$ azok, amelyeken T' hat, ekkor

$$\begin{aligned} (T \otimes T')(v^{1*}, \dots, v^{k+k'*}; w_1, \dots, w_{l+l'}) \\ = T(v^{1*}, \dots, v^{k*}; w_1, \dots, w_l) T'(v^{k+1*}, \dots, v^{k+k'*}; w_{l+1}, \dots, w_{l+l'}). \end{aligned} \quad (2.3.3.)$$

A külső szorzás lehetővé teszi, hogy tetszőleges (k, l) -típusú tenzorokat úgynevezett egyszerű tenzorokból szerkesszünk meg.

Definíció: Legyenek $\{v_\mu\}$ és $\{v^{\nu*}\}$ rendre bázis V -ben és a megfelelő duális bázis V^* -ban. Ekkor a (k, l) -típusú **egyszerű tenzorok**

$$v_{\mu_1} \otimes \dots \otimes v_{\mu_k} \otimes v^{\nu_1*} \otimes \dots \otimes v^{\nu_l*}. \quad (2.3.4.)$$

Állítás: Összesen n^{k+l} különböző (k, l) -típusú egyszerű tenzor konstruálható adott bázisok esetén. Ezek $\mathcal{T}(k, l)$ -ben bázist képeznek. Következésképpen bármely $T \in \mathcal{T}(k, l)$ tenzor kifejezhető ebben a bázisban:

$$T = \sum_{\mu_1, \dots, \mu_k, \nu_1, \dots, \nu_l=1}^n T^{\mu_1 \dots \mu_k}_{\nu_1 \dots \nu_l} v_{\mu_1} \otimes \dots \otimes v_{\mu_k} \otimes v^{\nu_1*} \otimes \dots \otimes v^{\nu_l*}. \quad (2.3.5.)$$

A kifejtésben szereplő $T^{\mu_1 \dots \mu_k}_{\nu_1 \dots \nu_l}$ együtthatókat nevezzük a T **tenzor komponenseinek** az adott bázisban. **A tenzorfogalom független mindenféle bázisválasztástól**, míg a tenzorkomponensek bázisfüggőek, azaz értékük függ attól, hogy milyen bázissal és a duálisával dolgozunk.

Megjegyzés: Tenzorkomponensek segítségével a kontrakció

$$(CT)^{\mu_1 \dots \mu_{k-1}}_{\nu_1 \dots \nu_{l-1}} = \sum_{\sigma=1}^n T^{\mu_1 \dots \sigma \dots \mu_{k-1}}_{\nu_1 \dots \sigma \dots \nu_{l-1}}, \quad (2.3.6.)$$

a külső szorzat pedig

$$S^{\mu_1 \dots \mu_{k+k'}}_{\nu_1 \dots \nu_{l+l'}} = T^{\mu_1 \dots \mu_k}_{\nu_1 \dots \nu_l} T'^{\mu_{k+1} \dots \mu_{k+k'}}_{\nu_{l+1} \dots \nu_{l+l'}} \quad (2.3.7.)$$

alakot ölt.

A koordinátabázis vektorainak szokásos jelölése $X_\mu = \frac{\partial}{\partial x^\mu} \in V$, a megfelelő duális bázisvektorokat dx^μ -vel jelöljük, úgyhogy definíció szerint $dx^\mu(\partial/\partial x^\nu) = \delta^\mu_\nu$.

Korábban már megmutattuk, hogy valamely lokális $(x^1, \dots, x^n)$ koordinátarendszer-ről egy másik $(x'^1, \dots, x'^n)$ koordinátarendszerre történő áttérés során a v vektor komponensei

$$v'^{\mu'} = \sum_{\mu=1}^n v^{\mu} \frac{\partial x'^{\mu'}}{\partial x^{\mu}} \quad (2.3.8.)$$

szabály szerint transzformálódnak. Ezt felhasználva beláthatjuk, hogy tetszőleges $\omega \in V^*$ duális vektor komponensei

$$\omega'_{\mu'} = \sum_{\mu=1}^n \omega_{\mu} \frac{\partial x^{\mu}}{\partial x'^{\mu'}} \quad (2.3.9.)$$

módon transzformálódnak.

Ehhez először belátjuk, hogy $\forall \omega \in V^*, \forall w \in V$ esetén

$$\omega(w) = \sum_{\mu=1}^n \omega_{\mu} w^{\mu}. \quad (2.3.10.)$$

Valóban, ha a koordinátabázis V -ben $\{v_{\mu}\}$ és ennek duálisa V^* -ben $\{v^{\mu*}\}$, akkor

$$\omega(w) = \sum_{\mu} \omega_{\mu} v^{\mu*}(w) = \sum_{\mu} \omega_{\mu} v^{\mu*} \left(\sum_{\nu} w^{\nu} v_{\nu} \right) = \sum_{\mu, \nu} \omega_{\mu} w^{\nu} v^{\mu*}(v_{\nu}) = \sum_{\mu, \nu} \omega_{\mu} w^{\nu} \delta_{\nu}^{\mu} = \sum_{\mu} \omega_{\mu} w^{\mu}. \quad (2.3.11.)$$

Koordinátatranszformáció során

$$\omega(w) = \sum_{\mu} \omega_{\mu} w^{\mu} = \sum_{\mu'} \omega'_{\mu'} w'^{\mu'} = \sum_{\mu', \mu} \omega'_{\mu'} w^{\mu} \frac{\partial x'^{\mu'}}{\partial x^{\mu}}, \quad (2.3.12.)$$

ahonnan

$$\omega_{\mu} = \sum_{\mu'} \omega'_{\mu'} \frac{\partial x'^{\mu'}}{\partial x^{\mu}}. \quad (2.3.13.)$$

Jelöljük most át a vesszős koordinátarendszert vesszőtlenre és fordítva a vesszőtlenet vesszősre, akkor

$$\omega'_{\mu'} = \sum_{\mu=1}^n \omega_{\mu} \frac{\partial x^{\mu}}{\partial x'^{\mu'}} \quad (2.3.14.)$$

adódik.

Ezeket felhasználva, tetszőleges (k, l) -típusú tenzor komponenseinek transzformációs szabályára

$$T'^{\mu'_1 \dots \mu'_k}_{\nu'_1 \dots \nu'_l} = \sum_{\mu_1 \dots \mu_k} T^{\mu_1 \dots \mu_k}_{\nu_1 \dots \nu_l} \frac{\partial x'^{\mu'_1}}{\partial x^{\mu_1}} \dots \frac{\partial x'^{\mu'_k}}{\partial x^{\mu_k}} \quad (2.3.15.)$$

adódik.

Megjegyzés: A tenzorokat koordináta-rendszer-választástól függetlenül definiáltuk. Lehetne azonban a tenzorokat a komponenseik transzformációs tulajdonságaival is definiálni. Ez azonban előnytelen, mert a legtöbb esetben olyan állításokat fogunk megfogalmazni, amelyek koordináta-rendszertől függetlenek, hiszen alapelv az általános relativitáselméletben, hogy a Természet törvényei vonatkoztatási rendszertől függetlenek.

Megjegyzés: Szokás a $p \in M$ pontbeli V_p érintőtér vektorait **tangens-**, azaz **érintővektoroknak**, ill. **kontravariáns vektoroknak**, a duális V_p^* tér vektorait **kotangensvektoroknak**, ill. **kovariáns vektoroknak** nevezni.

Definíció: Amennyiben a sokaság minden p pontjában értelmezve van a $T(k, l)$ -típusú tenzor, akkor **tenzormezőről** beszélünk. Egy tenzormezőt akkor nevezünk simának, ha sima függvénye a vektor- és duális vektor-változóinak, amelyek maguk is sima mezők. Függvények és vektormezők simaságát már értelmeztük. Az ω duális vektormezőt akkor nevezzük simának (C^∞ -nek), ha tetszőleges, sima v vektormező esetén $\omega(v)$ sima függvény.

2.4. Metrikus tenzor

A metrikus tenzort annak érdekében vezetjük be, hogy a sokaságon „infinitezimális távolságnégyzetet” értelmezzünk, s tesszük ezt, mint az „infinitezimális elmozdulás” négyzetét. Az „infinitezimális elmozdulásoknak” viszont a sokaság érintővektorait feleltettük meg. Ezért a metrikát, mint $(0, 2)$ -típusú g tenzort vezetjük be.

Definíció: A g **metrikus tenzor** a sokaság $p \in M$ pontjában értelmezett olyan $(0, 2)$ -típusú tenzor, amely **szimmetrikus**, azaz $\forall v_1, v_2 \in V_p$ esetén $g(v_1, v_2) = g(v_2, v_1)$, és **nem elfajult**, azaz $g(v, v_1) = 0$ tetszőleges $v \in V_p$ esetén akkor és csak akkor, ha $v_1 = 0 \in V_p$.

Megjegyzés: A metrika tehát az érintőtéren értelmezett belső szorzat, amely azonban nem feltétlenül pozitív definit.

Valamely lokális koordináta-bázisban a metrikus tenzor

$$g = \sum_{\mu, \nu} g_{\mu\nu} dx^\mu \otimes dx^\nu \quad (2.4.1.)$$

alakba írható. Szokás ezt az összefüggést a ds^2 **invariáns ívelemnégyzet** segítségével

$$ds^2 = \sum_{\mu, \nu} g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \quad (2.4.2.)$$

alakba írni, amikor elhagytuk a jobb oldalon a külső szorzat jelét. Ez az írásmód tükrözi, hogy „infinitezimális elmozdulás négyzetének” megfelelő matematikai kép-

lettel van dolgunk. Ne felejtsük azonban el, hogy sem a jobb oldal, sem a bal oldal nem szám, hanem bilineáris leképezés; valós számot akkor kapunk, ha $g(v, v) \in \mathbb{R}$ -t képezzük valamely $v \in V_p$ vektor segítségével. Ha v integrálgörbéje mentén mozdulunk el a sokaságon a t paraméterű $p \in M$ pontból a $t + dt$ paraméterű $q \in M$ infinitezimálisan közeli pontba, akkor az integrálgörbén az ívhossznégyzet arányos $g(v, v)$ -vel, $g(v, v)dt^2 \in \mathbb{R}$. A görbék ívhosszáinak értelmezésére később még visszatérünk.

Állítás: Ha adott a g metrika, akkor az érintőtérben mindig találhatunk **ortonormált bázist**, azaz olyan $v_1, \dots, v_n$ bázisvektorokat V_p -ben, amelyekre $g(v_\mu, v_\nu) = 0$, ha $\mu \neq \nu$ és $g(v_\mu, v_\mu) = \pm 1$. Végtelen sok ortonormált bázis létezik. Bármelyiket is választjuk azonban, a sokaságra egyértelműen jellemző azon vektorok száma, amelyekre $g(v_\mu, v_\mu) = +1$, és amelyekre $g(v_\mu, v_\mu) = -1$. A $+$ és $-$ előjelek számát a **metrika szignatúrájának** nevezzük. A $(++++)$ szignatúrájú metrikát **Riemann²⁶-metrikának**, a $(-+++)$ szignatúrájú **Lorentz-metrikának** nevezzük. A téridő metrikája a speciális és az általános relativitáselmélet szerint Lorentz-metrika.

Legyen értelmezve a g metrika a téridő p pontjában, mint a $g : V_p \otimes V_p \mapsto \mathbb{R}$ bilineáris leképezés. Rögzített $v \in V$ esetén a $g(\cdot, v) : V_p \mapsto \mathbb{R}$ lineáris leképezés a duális vektortér eleme, $g(\cdot, v) \in V_p^*$. Ha $v \in V_p$ végigfut a V_p érintőtér elemein, akkor tehát $g(\cdot, v)$ minden $v \in V_p$ vektorhoz hozzárendel egy $v^* \in V_p^*$ duális vektort. Ez a hozzárendelés kölcsönösen egyértelmű, mert a metrika nem elfajult, és „-ra” történő leképezés, úgyhogy létezik az inverz leképezés is. A metrika segítségével tehát kölcsönösen egyértelmű megfeleltetés létesíthető a vektortér és duálisának elemei között. Ha adott a metrika, ez azt is jelentheti, hogy nem érdemes külön bevezetni a duális vektorokat. Így szoktunk eljárni pl. a newtoni mechanikában. Az általános relativitáselméletben azonban nem ismert előre a metrika, úgyhogy ekkor világos különbséget kell tenni a vektorok és a duális vektorok között.

2.5. Jelölések, konvenciók

A tenzorok jelölésére olyan konvenciót fogunk használni, amikor a jelölés egyértelműsíti a tenzor típusát, ugyanakkor nem keverhető össze a tenzornak és a komponenseinek a jelölése. Ez a jelölés azt is egyértelműsíti, hogy ha egyenletet írunk fel, akkor az tenzorokra vonatkozó, lokális koordinátarendszer-választástól független érvényű egyenlet, avagy csak a tenzorkomponensekre valamilyen speciális koordinátarendszerben érvényes összefüggés.

Ezért a $T(k, l)$ -típusú tenzort $T^{a_1 \dots a_k}_{b_1 \dots b_l}$ módon fogjuk jelölni ellátva k darab kontravariáns és l darab kovariáns latin indexszel. Ugyanennek a tenzornak a komponenseit valamely adott koordináta-rendszerben megfelelő görög indexszekkel látjuk el, $T^{\mu_1 \dots \mu_k}_{\nu_1 \dots \nu_l}$. További megállapodás, hogy a kontrakciót, ami akár

²⁶Georg Friedrich Bernhard Riemann, német matematikus, 1826-1866.

a tenzor kontrakciója, akár a kontrahált tenzor komponensei esetén összegzést jelent egy megegyező kontravariáns és kovariáns indexpárra, az összegzés jelének elhagyásával és azonos felső és alsó (latin, ill. görög) indexszel jelöljük, mint pl. $T^{a_1 \dots c \dots a_{k-1}}_{b_1 \dots c \dots b_{l-1}}$ a $T^{a_1 \dots a_k}_{b_1 \dots b_l}$ tenzor kontrakcióját jelenti az i -edik kontravariáns és a j -edik kovariáns index szerint, ha c a kontravariáns indexek között az i -edik helyen és a kovariáns indexek között a j -edik helyen áll. A megfelelő kontrahált tenzor komponensei valamely koordinátarendszerben $T^{\mu_1 \dots \sigma \dots \mu_{k-1}}_{\nu_1 \dots \sigma \dots \nu_{l-1}}$.

További szabályok vonatkoznak a metrikus tenzor hatásának jelölésére. A $(0, 2)$ -típusú metrikus tenzort g_{ab} -vel jelöljük. A metrikus tenzor minden $v \in V_p$ vektorhoz hozzárendeli a $v^* = g(\cdot, v) \in V_p^*$ duálisvektort. Konvenciónknak megfelelően a v kontravariáns vektort v^a -val, a metrikus tenzor által értelmezett izometria révén hozzárendelt v^* duális vektort (kovariáns vektort) pedig v_a -val jelöljük, úgyhogy $g_{ab}v^b = v_a$ írható, ami explicit módon kifejezi a V_p és V_p^* közti izometriát. A metrikus tenzor inverze $(2, 0)$ -típusú tenzor, amit jelölhetnénk $(g^{-1})^{ab}$ -vel. Ehelyett azonban általánosan elfogadott egyszerűen g^{ab} -vel jelölni. Ekkor definíció szerint

$$g^{ab}g_{bc} = \delta_c^a \quad (2.5.1.)$$

a $V_p \mapsto V_p$ azonossági leképezés. Hasonlóan a metrika inverzének az ω_a duális vektorra vett hatásaként előálló vektort ω^a -val jelöljük, azaz $g^{ab}\omega_b = \omega^a$. Ezt a jelölésmódot az indexek fel- és lehúzásával következetesen alkalmazhatjuk bármely tenzor bármely indexére, s így az eredeti tenzorral (izometria erejéig) azonos tenzort kapunk. A jelölés következetes abban is, hogy a metrikus tenzorból indexfelhúzással kapjuk az inverz metrikát, $g^{ab} = g^{ac}g^{bd}g_{cd}$.

További egyszerűsödés, hogy jelölésünk különbséget tud tenni pl. a $(0, 2)$ -típusú tenzor esetén $T(v, w) = T_{ab}v^aw^b$ és $T'(w, v) = T'_{ab}w^bv^a$ között, ha T' csak annyiban különbözik T -től, hogy a v és w vektorokat felcseréljük az argumentában; írhatjuk ugyanis, hogy $T'_{ab} = T_{ba}$. Amennyiben $T_{ab} = T_{ba}$, akkor azt mondjuk, hogy a T_{ab} **tenzor szimmetrikus**. A metrikus tenzor például szimmetrikus, $g_{ab} = g_{ba}$. Bármely kontravariáns vagy kovariáns indexpárra hasonló szabályt alkalmazhatunk. Érdemes külön jelölést bevezetni a tenzorok teljesen szimmetrikus és teljesen antiszimmetrikus részére. A $(0, 2)$ -típusú T_{ab} tenzorok esetén a szimmetrikus, ill. az antiszimmetrikus részre írhatjuk rendre, hogy

$$T_{(ab)} = \frac{1}{2}(T_{ab} + T_{ba}), \quad \text{ill.} \quad T_{[ab]} = \frac{1}{2}(T_{ab} - T_{ba}). \quad (2.5.2.)$$

Ekkor mindig igaz, hogy $T_{ab} = T_{(ab)} + T_{[ab]}$, azaz egy $(0, 2)$ -típusú tenzor mindig egyértelműen felbontható egy szimmetrikus és egy antiszimmetrikus rész összegére. Az indexek fel- és lehúzásának szabályait figyelembe véve ez azt is jelenti, hogy bármely másodrendű tenzor hasonlóképpen felbontható. Általánosabban, pl. egy $T_{a_1 \dots a_l}$ $(0, l)$ -típusú tenzor teljesen szimmetrikus, ill. teljesen antiszimmetrikus része

rendre

$$\begin{aligned} T_{(a_1 \dots a_l)} &= \frac{1}{l!} \sum_{\pi} T_{a_{\pi(1)} \dots a_{\pi(l)}}, \\ T_{[a_1 \dots a_l]} &= \frac{1}{l!} \sum_{\pi} \delta_{\pi} T_{a_{\pi(1)} \dots a_{\pi(l)}}, \end{aligned} \quad (2.5.3.)$$

ahol az összegzés az indexek összes π permutációjára történik és δ_{π} egyenlő $+1$ -gyel, ill. -1 -gyel rendre aszerint, hogy a π permutáció páros, ill. páratlan. Hasonló szimmetrizálási, ill. antiszimmetrizálási szabályt alkalmazhatunk a kontravariáns és a kovariáns indexek bármely együttesére.

Definíció: A teljesen antiszimmetrikus $(0, l)$ -típusú $T_{a_1 \dots a_l}$ tenzorokat **differenciális l -formáknak nevezik**; esetükben $T_{a_1 \dots a_l} = T_{[a_1 \dots a_l]}$.

3. A téridő-sokaság görbülete

3.1. Általános megfontolások

A görbületről alkotott naív fogalmunk olyan esetekből származik, amikor egy 2-dimenziós felület be van ágyazva egy magasabb dimenziós térbe, mint például a Föld felszíne a 3-dimenziós euklideszi térbe. A felületet akkor nevezzük görbültnek, ha a beágyazó euklideszi térben nem síkfelület. A görbület ilyen értelmezésének a külső görbület fogalma felel meg, amit a beágyazó tér jelenlétére alapozunk. A külső görbületet a felület valamely pontjában az jellemzi, hogy a felület normálisa mennyire nem marad (a külső euklideszi térben) önmagával párhuzamos, ha kicsit odább mozdulunk a felület mentén. Ilyenkor a vektorok párhuzamossága a beágyazó euklideszi térben van értelmezve. A külső görbület a felület **külső tulajdonságain** alapszik.

Jelenlegi legjobb tudásunk szerint azonban a téridő-sokaság nincsen beágyazva egy külső, magasabb dimenziós sokaságba. Ezért az általános relativitáselméletben olyan görbület-fogalomra van szükségünk, amely a sokaság, a görbült felület belső tulajdonságain alapszik. Az ilyen, úgynevezett **belső görbület** fogalmának kidolgozása Gauss nevéhez fűződik, szokás **Gauss-görbületnek** is nevezni. A belső görbület definiálásának ötlete a következő észrevételen alapszik. Vigyünk körbe egy vektort a felület egy zárt görbéje mentén úgy, hogy a vektor mindig benne maradjon a felület érintősíkjában és önmagával párhuzamos maradjon. Ha ezt a sík bármely zárt görbéje mentén tesszük, akkor mindig visszajutunk az eredeti vektort, amikor visszaérünk a kiindulási pontba. Ha ugyanezt a gömbfelületen, mondjuk egy gömbi háromszög mentén tesszük, akkor általában nem kapjuk vissza ugyanazt a vektort. A felület belső görbületét tehát azzal fogjuk jellemezni, hogy ha egy vektort a felületen tetszőleges zárt görbe mentén önmagával párhuzamosan eltolunk, akkor mennyire különböző vektort kapunk az eredeti vektorhoz képest, ha visszaérünk a kiindulási pontba. A kényes kérdés az, hogy pontosan mit is értsünk párhuzamos eltoláson. Látni fogjuk, hogy a párhuzamos eltolás fogalma egyértelművé tehető, ha metrikát értelmezzük a felületen, mint pontsokaságon.

A görbület, avagy általánosabban a **görbületi tenzor** értelmezéséhez a következő lépésekben jutunk el:

1. Értelmezzük vektormező görbementi deriváltját; ennek során bevezetjük a **kovariáns deriválás operátorát**.
2. Értelmezzük a **párhuzamos eltolást** a sokaságon, mint a sokaság egy járulékos geometriai tulajdonságát.
3. Értelmezzük a görbületet az alapján, hogy vektort zárt görbe mentén párhuzamosan eltolva mekkora lesz az eltérés az új (zárt görbe mentén párhuzamosan

eltolt) és az eredeti vektor között. Látni fogjuk, hogy ez az eltérés azzal lesz kapcsolatos, hogy a kovariáns deriválások operátorai nem kommutálnak.

Végül meg fogjuk mutatni, hogy a párhuzamos eltolás, mint a sokaság járulékos geometriai szerkezete, származtatható a metrikából, ha az értelmezve van a sokaságon. Ebben az esetben egyértelműen létezik olyan párhuzamos eltolás, amelyik skalárszorozattartó (azaz távolság- és szögtartó). A téridő metrikájából tehát egyértelműen következik egyfajta párhuzamos eltolás és görbület.

Megjegyzés: Azt azonban érdemes megemlíteni, hogy nem kötelező a gravitáció elméletében ilyen szorosan összekötni a párhuzamos eltolást és a metrika létezését, hanem lehet ezeket független geometriai struktúrákként kezelni, amelyeket az anyag dinamikája határoz meg. Einstein az általános relativitáselméletben azt az utat választotta, amikor a párhuzamos eltolás és a görbület a metrika által egyértelműen meghatározott jellemzők. Mi is ezt az utat követjük.

3.2. A kovariáns deriválás operátora

Definíció: A kovariáns deriválás ∇ operátora, a gradiens-operátor olyan leképezés, amely bármely sima (vagy legrosszabb esetben differenciálható) $T \in \mathcal{T}(k, l)$ tenzormezőt átvisz egy $\nabla T \in \mathcal{T}(k, l+1)$ tenzormezőbe, és eleget tesz az alábbi tulajdonságoknak:

1. lineáris, azaz

$$\nabla_c(\alpha A^{a_1 \dots a_k}_{b_1 \dots b_l} + \beta B^{a_1 \dots a_k}_{b_1 \dots b_l}) = \alpha \nabla_c A^{a_1 \dots a_k}_{b_1 \dots b_l} + \beta \nabla_c B^{a_1 \dots a_k}_{b_1 \dots b_l}, \quad (3.2.1.)$$

ahol $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tetszőleges valós számok, $A, B \in \mathcal{T}(k, l)$ tetszőleges tenzorok;

2. teljesíti a Leibnitz-szabályt, azaz

$$\begin{aligned} \nabla_c(A^{a_1 \dots a_k}_{b_1 \dots b_l} B^{a'_1 \dots a'_{k'}}_{b'_1 \dots b'_{l'}}) &= (\nabla_c A^{a_1 \dots a_k}_{b_1 \dots b_l}) B^{a'_1 \dots a'_{k'}}_{b'_1 \dots b'_{l'}} \\ &\quad + A^{a_1 \dots a_k}_{b_1 \dots b_l} (\nabla_c B^{a'_1 \dots a'_{k'}}_{b'_1 \dots b'_{l'}}) \end{aligned} \quad (3.2.2.)$$

bármely $A \in \mathcal{T}(k, l)$, $B \in \mathcal{T}(k', l')$ esetén;

3. felcserélhető a kontrakcióval, azaz

$$\nabla_d(A^{a_1 \dots c \dots a_k}_{b_1 \dots c \dots b_l}) = \nabla_d A^{a_1 \dots c \dots a_k}_{b_1 \dots c \dots b_l}, \quad (3.2.3.)$$

bármely $A \in \mathcal{T}(k, l)$ -re, ahol a jobb oldalon a ∇A deriválttenzor kontraháltja áll;

4. összhangban van az érintővektoroknak skalármezők iránymenti deriváltjaként történő értelmezésével, azaz $\forall f \in \mathcal{F}$ függvény és $\forall t^a \in V_p$ vektor esetén

$$t(f) = t^a \nabla_a f \quad (3.2.4.)$$

teljesül;

5. **torziómentes**, azaz $\forall f \in \mathcal{F}$ függvény esetén

$$\nabla_a \nabla_b f = \nabla_b \nabla_a f, \quad (3.2.5.)$$

vagyis a kovariáns deriválások operátorai skalárfüggvényre történő hatásukban felcserélhetők.

Megjegyzés: Vigyázat! Az 5. tulajdonság nem jelenti, hogy bármilyen tenzormezőre való hatásukban a kovariáns deriválások operátorai felcserélhetők lennének.

Megjegyzés: Az 5. tulajdonság elnevezése onnan származik, hogy amennyiben nem rójuk ki az 5. feltételt, akkor meg lehet mutatni, hogy a többi 4 tulajdonság megkövetelése miatt létezik olyan T^c_{ab} , az a, b indexekben antiszimmetrikus tenzor, a **torzió tenzora**, hogy

$$\nabla_a \nabla_b f - \nabla_b \nabla_a f = -T^c_{ab} \nabla_c f, \quad \forall f \in \mathcal{F}. \quad (3.2.6.)$$

Az 5. tulajdonság tehát azt jelenti, hogy a torzió tenzora eltűnik.

A fenti definícióval kapcsolatban először is az a kérdés merül fel, hogy létezik-e egyáltalán az 1.-5. tulajdonságoknak eleget tevő deriválási operátor, és amennyiben létezik, egyértelműen meg van-e határozva.

Könnyen meg lehet mutatni, hogy léteznek az 1.-5. tulajdonsággal rendelkező deriválási operátorok. Legyen ψ egy lokális koordinátarendszer, és legyenek $\{\partial/\partial x^\mu\}$ és $\{dx^\mu\}$ a megfelelő koordinátabázisok. Abban a tartományban, amelyet ez a koordinátarendszer lefed, értelmezhetjük az **adott koordináta-rendszerhez tartozó közönséges deriválás ∂_a operátorát** a következőképpen: vegyünk egy tetszőleges $T^{a_1 \dots a_k}_{b_1 \dots b_l}$ sima tenzormezőt, amelynek komponensei a ψ koordinátarendszerben $T^{\mu_1 \dots \mu_k}_{\nu_1 \dots \nu_l}$, és legyen $\partial_c T^{a_1 \dots a_k}_{b_1 \dots b_l}$ az a tenzormező, amelynek komponensei

$$\partial T^{\mu_1 \dots \mu_k}_{\nu_1 \dots \nu_l} / \partial x^\mu. \quad (3.2.7.)$$

A közönséges parciális deriválás tulajdonságai következtében az 1.-5. tulajdonságok ekkor mind teljesülnek. Az 5. tulajdonság a közönséges parciális deriválás felcserélhetősége miatt azt jelenti, hogy ∂_a és ∂_b bármely tenzormezőre vett hatásában felcserélhető. Beláttuk tehát, hogy létezik az 1.-5. tulajdonságoknak eleget tevő deriválási operátor: a közönséges deriválás ∂_a operátora ilyen.

Vegyünk most egy másik ψ' lokális koordinátarendszert, amelynek van átfedése az előző ψ koordinátarendszerrel. Ekkor a fenti eljárással egy másik ∂'_a deriválási

operátort kapunk. A bonyodalmat az okozza, hogy $\partial'_c T^{a_1 \dots a_k}_{b_1 \dots b_l}$ komponensei a ψ' koordinátarendszerben nem fognak megegyezni a $\partial_c T^{a_1 \dots a_k}_{b_1 \dots b_l}$ vesszős koordinátarendszerben vett komponenseivel. **A közönséges deriválás operátora tehát koordinátarendszer-függő;** nem társítható koordináta-független, azaz természetes módon a sokaság geometriai struktúrájához.

Vizsgáljuk meg következő lépésként, hogy mennyire van egyértelműen meghatározva az 1.-5. tulajdonságokkal definiált derivált operátor. Tegyük fel, hogy létezik két különböző derivált operátor, ∇_a és $\tilde{\nabla}_a$, amelyek mindegyike eleget tesz az 1.-5. követelményeknek. A 4. tulajdonság következtében skalármezőre vett hatásukban ezeknek a deriválási operátoroknak azonosaknak kell lenniük, $\nabla_a f = \tilde{\nabla}_a f \ \forall f \in \mathcal{F}$. Ahhoz, hogy esetleges különbözősükről felvilágosítást kapjunk, vizsgáljuk meg hatásukat eggyel magasabb rendű tenzormezőkre. Legyen ω_a tetszőleges sima duális vektormező. A 2. és a 4. követelmény értelmében

$$\tilde{\nabla}_a(f\omega_b) - \nabla_a(f\omega_b) = f(\tilde{\nabla}_a\omega_b - \nabla_a\omega_b) \quad \forall f \in \mathcal{F}. \quad (3.2.8.)$$

Az egyenlet jobb oldalán álló $\tilde{\nabla}_a\omega_b - \nabla_a\omega_b$ különbség értéke a sokaság bármely $p \in M$ pontjában csak ω_b -nek a p pontban felvett értékétől függ.

Ezt a következőképpen láthatjuk be. Tegyük fel, hogy ω'_b olyan duális vektormező, amelyik a p pontban megegyezik ω_b -vel, azaz amelyre $(\omega'_b - \omega_b)|_p = 0$, és mutassuk meg, hogy $\tilde{\nabla}_a\omega_b - \nabla_a\omega_b = \tilde{\nabla}_a\omega'_b - \nabla_a\omega'_b$. Mivel $(\omega'_b - \omega_b)|_p = 0$, ezért meg lehet mutatni, hogy létezik a p pontnak olyan környezete, amelyben léteznek olyan duális $\mu_b^{(\alpha)}$ bázisvektormezők, hogy alkalmas, a p pontban eltűnő $f_{(\alpha)}$ függvények segítségével az $\omega'_b - \omega_b$ különbség

$$\omega'_b - \omega_b = \sum_{\alpha=1}^n f_{(\alpha)} \mu_b^{(\alpha)} \quad (3.2.9.)$$

alakba írható. Ekkor a p pontban

$$\begin{aligned} & \tilde{\nabla}_a\omega'_b - \nabla_a\omega'_b - (\tilde{\nabla}_a\omega_b - \nabla_a\omega_b) \\ &= \tilde{\nabla}_a(\omega'_b - \omega_b) - \nabla_a(\omega'_b - \omega_b) = \sum_{\alpha=1}^n \left(\tilde{\nabla}_a(f_{(\alpha)}\mu_b^{(\alpha)}) - \nabla_a(f_{(\alpha)}\mu_b^{(\alpha)}) \right) \\ &= \sum_{\alpha=1}^n f_{(\alpha)} (\tilde{\nabla}_a\mu_b^{(\alpha)} - \nabla_a\mu_b^{(\alpha)}) = 0 \end{aligned} \quad (3.2.10.)$$

hiszen a p pontban valamennyi $f_{(\alpha)}$ függvény eltűnik. Ezzel beláttuk, amit bizonyítani akartunk.

A (3.2.8.) egyenletnek ezek szerint a bal oldala is csak ω_b -nek a p pontban felvett értékétől függ. Ezzel megmutattuk, hogy $\tilde{\nabla}_b - \nabla_b$ a p pontban vett duális vektorok terének leképezését definiálja az ezen pontban vett $(0, 2)$ -típusú tenzorok terére, továbbá az 1. tulajdonság alapján ez a leképezés lineáris. Ezért $\tilde{\nabla}_b - \nabla_b$ egy $(1, 2)$ típusú C^c_{ab} tenzort definiál a p pontban,

$$\tilde{\nabla}_a\omega_b = \nabla_a\omega_b + C^c_{ab}\omega_c, \quad (3.2.11.)$$

avagy átrendezés után

$$\nabla_a\omega_b = \tilde{\nabla}_a\omega_b - C^c_{ab}\omega_c. \quad (3.2.12.)$$

Ez azonban bármely p pontban elmondható, úgyhogy C_{ab}^c tenzormező. Ez az összefüggés fejezi ki, hogy két különböző deriválási operátor duális vektormezőkre vett hatásában milyen módon különbözhet. A C_{ab}^c tenzor az a és b indexekben szimmetrikus, $C_{ab}^c = C_{ba}^c$. A C_{ab}^c tenzort **konnexiónak** nevezzük.

Válasszuk speciálisan ω_b -t $\omega_b = \tilde{\nabla}_b f = \nabla_b f$ -nek, ahol $f \in \mathcal{F}$ tetszőleges. Ekkor

$$\nabla_a \nabla_b f = \tilde{\nabla}_a \tilde{\nabla}_b f - C_{ab}^c \nabla_c f \quad (3.2.13.)$$

adódik. Itt $\tilde{\nabla}_a \tilde{\nabla}_b f$ és $\nabla_a \nabla_b f$ is szimmetrikus, ha megköveteljük a torziómentességet, úgyhogy ebből következik a kívánt tulajdonság.

A (3.2.12.) reláció, a Leibnitz-szabály és a 4. tulajdonság meghatározza a deriválási operátorok közti különbséget vektormezőkre, ill. bármely más tenzormezőre való hatásukban. Legyen t^a sima vektormező, ekkor

$$\nabla_a t^b = \tilde{\nabla}_a t^b + C_{ac}^b t^c. \quad (3.2.14.)$$

Mivel tetszőleges ω duális vektormező esetén $\omega_b t^b$ skalármező, ezért írhatjuk a 4. tulajdonság következményeként, hogy

$$(\tilde{\nabla}_a - \nabla_a)(\omega_b t^b) = 0, \quad (3.2.15.)$$

ahonnan a Leibnitz-szabály és a (3.2.12.) összefüggés segítségével

$$0 = C_{ab}^c \omega_c t^b + \omega_b (\tilde{\nabla}_a - \nabla_a) t^b = \omega_b [(\tilde{\nabla}_a - \nabla_a) t^b + C_{ac}^b t^c] \quad (3.2.16.)$$

$\forall \omega_b$, úgyhogy innen következik a (3.2.14.) reláció.

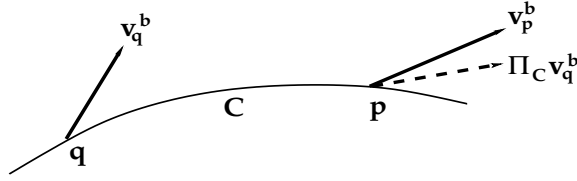
Hasonlóan kaphatjuk meg tetszőleges tenzorra való hatásában a deriválási operátorok különbségét. Legyen $T \in \mathcal{T}(k, l)$ tetszőleges sima tenzormező, ekkor

$$\begin{aligned} \nabla_a T^{a_1 \dots a_k}_{b_1 \dots b_l} &= \tilde{\nabla}_a T^{a_1 \dots a_k}_{b_1 \dots b_l} \\ &+ \sum_{i=1}^k C_{ac}^{a_i} T^{a_1 \dots c \dots a_k}_{b_1 \dots b_l} - \sum_{j=1}^l C_{ab_j}^c T^{a_1 \dots a_k}_{b_1 \dots c \dots b_l}, \end{aligned} \quad (3.2.17.)$$

ahol a jobboldali első és második összegben a kontrakció rendre az i -edik és a j -edik tenzorindexre vonatkozik. A (3.2.12.), (3.2.14.) és (3.2.17.) összefüggések azt mutatják, hogy a C_{ab}^c tenzor teljesen meghatározza a deriválási operátorok közötti lehetséges különbséget a különböző típusú tenzorokra való hatásukban. Ezért rendkívül nagy a deriválási operátor megválasztásában a szabadságunk, hiszen a konnexiónak minden pontban $n \frac{1}{2} n(n+1)$ független komponense van. Szokásos az a választás, amikor $\tilde{\nabla}_a$ -t valamely lokális koordinátarendszerben a közönséges deriválási operátornak választjuk, ekkor a C_{ab}^c -t **Christoffel**²⁷ **-szimbólumnak** nevezzük és Γ_{ab}^c -vel jelöljük. Ekkor például a (3.2.14.) összefüggés

$$\nabla_a t^b = \partial_a t^b + \Gamma_{ac}^b t^c \quad (3.2.18.)$$

²⁷Elvin Bruno Christoffel, német matematikus és fizikus, 1829-1900



5. ábra. A $\delta v^b|_p = v_p^b - \Pi_C v_q^b = t^a \nabla_a v^b|_p \delta \lambda$ különbség méri, hogy a C görbe környezetében értelmezett v^b vektormező a görbe mentén mennyire tér el a v_p^b vektor görbementi párhuzamos eltolásával kapott vektormezőtől.

alakot ölt, a (3.2.12.) egyenlőség pedig

$$\nabla_a \omega_b = \partial_a \omega_b - \Gamma_{ab}^c \omega_c \quad (3.2.19.)$$

alakot.

Megjegyzés: A (3.2.18.) és (3.2.19.) egyenlőségek jobb oldalának első tagja nem a tenzorkomponensek transzformációs szabálya szerint változik, ha áttérünk másik lokális koordinátarendszerre. Ez azzal kapcsolatos, hogy amikor koordinátarendszert váltunk, akkor a ∂_a operátorról áttérünk a másik ∂'_a operátorra. Ugyanakkor az egyenlőségek bal oldalán álló tenzorok komponensei a tenzorkomponensek transzformációs szabályai szerint változnak. Ez azt kell jelentse, hogy **a Christoffel-szimbólumoknak szintén koordinátarendszer-függő az értelmezésük:** amikor koordinátarendszert váltunk, akkor a Γ_{ab}^c tenzorról is át kell térjünk az új Γ'_{ab}^c tenzorra. A Christoffel-szimbólumok komponenseinek azonban a koordinátatranszformációk során úgy kell változniuk – nem tenzorkomponensek transzformációs szabályai szerint, hogy a két, jobb oldalon álló és nem szabályosan transzformálódó tag összege már kövesse a tenzorkomponensek transzformációs szabályát.

3.3. Párhuzamos eltolás

A kovariáns deriválás operátorának segítségével most definiáljuk vektoroknak a görbementi párhuzamos eltolását.

Definíció: Legyen C egy sima görbe és t^a a görbe érintővektora. Akkor mondjuk, hogy a C görbe pontjaiban adott v^a **vektor párhuzamosan van eltolva a C görbe mentén**, ha fennáll a

$$t^a \nabla_a v^b = 0 \quad (3.3.1.)$$

egyenlőség a görbe mentén.

Ez geometriailag a következőt jelenti. Legyen p a C görbe t paraméterű pontja, q pedig a $t - dt$ paraméterű pontja, továbbá $\Pi_C(q \rightarrow p)v_q^b$ a q pontban értelmezett v_q^b vektor párhuzamos eltoltja a C görbe mentén q -ból p -be, v_p^b pedig a vektormező

értéke a p pontban. Általában $v_p^b - \Pi_C(q \rightarrow p)v_q^b = t^a \nabla_a v^b|_p dt$. Tehát $t^a \nabla_a v^b$ azt méri, hogy a v^b vektormező vektorai mennyire nem egymás párhuzamos eltolatai. Ha tehát a (3.3.1.) egyenlőség fennáll valamely C görbe mentén, akkor a v^a vektormező vektorai a görbe mentén egymásból a görbe mentén történő párhuzamos eltolással kaphatók meg.

Általánosabban, tetszőleges T tenzor párhuzamosan van eltolva a C görbe mentén, ha

$$t^a \nabla_a T^{a_1 \dots a_k}_{b_1 \dots b_l} = 0 \quad (3.3.2.)$$

teljesül a görbe mentén.

Ha lokális koordinátarendszert választunk, akkor a (3.3.1.) egyenlet

$$t^a \partial_a v^b + t^a \Gamma^b_{ac} v^c = 0 \quad (3.3.3.)$$

alakot ölt, amelyet komponensekben kiírva

$$\frac{dv^\nu}{dt} + \Gamma^\nu_{\mu\lambda} t^\mu v^\lambda = 0 \quad (3.3.4.)$$

adódik, ahol $dv^\nu/dt = (\partial v^\nu/\partial x^\mu)(dx^\mu/dt)$ és $x^\mu = x^\mu(t)$ a C görbe paraméteres egyenlete.

A geometriai jelentés alapján a vektormező q -ban vett vektorának p -be történő párhuzamos eltolása a

$$\Pi_C(q \rightarrow p)v_q^b = v_p^b - t^a \nabla_a v^b|_p dt \quad (3.3.5.)$$

vektort eredményezi a p pontban. A lokális x^μ koordinátarendszerben tehát a párhuzamosan eltoló vektor komponensei

$$\begin{aligned} \Pi_C(q \rightarrow p)v_q^\nu &= v^\nu(x(t)) - \left(\frac{dv^\nu}{dt} + \Gamma^\nu_{\mu\lambda} t^\mu v^\lambda \right) dt \\ &= v^\nu(x(t)) - \left(v^\nu(x(t)) - v^\nu(x(t-dt)) + \Gamma^\nu_{\mu\lambda} v^\lambda dx^\mu \right) \\ &= v^\nu(x(t-dt)) - \Gamma^\nu_{\mu\lambda} v^\lambda dx^\mu. \end{aligned} \quad (3.3.6.)$$

Megjegyzés:

1. A párhuzamos eltolást így a görbe mentén adott vektorokra értelmeztük, hiszen az nem függ csak v^a -nak a görbe mentén felvett értékeitől.
2. A közönséges elsőrendű differenciálegyenletek elméletéből azt is tudjuk, hogy ha a görbe egy pontjában adott a v^a vektor, akkor a görbe mentén párhuzamosan eltoló vektorra vonatkozó differenciálegyenletnek egyértelműen létezik a megoldása.

3. Az előző két megjegyzés alapján lehetőségünk van arra, hogy azonosítsuk, azaz egymásra leképezzük a sokaság $p \in M$ és $q \in M$ pontjaiban vett V_p és V_q érintőtereket, ha van olyan C görbe, amely összeköti a p és a q pontot. Ez az azonosítás függ attól, hogy melyik, a p -t q -val összekötő görbe mentén végezzük a párhuzamos eltolást. Az érintőterek ilyen, görbefüggő azonosításával a sokaságon nyert járulékos matematikai struktúrát **konnexiónak** nevezzük.

A deriválási operátor végtelen sokféleképpen megválasztható, és ennek következtében végtelen sokféle párhuzamos eltolás képzelhető el, amelyek közül a sokaság nem tüntet ki egyet sem. Ha azonban értelmezve van a sokaságon a g_{ab} **metrika**, akkor az **kitüntetett egyetlen deriváló operátort és ezáltal egyetlen párhuzamos eltolást**. Az a kitüntetett párhuzamos eltolás, amely változatlanul hagyja a vektorok skalárszorzatát. Ha adottak a tetszőleges v^a és w^a párhuzamosan eltoló vektorok a C görbe mentén, akkor a metrika által kitüntetett párhuzamos eltolás olyan, hogy

$$t^a \nabla_a (g_{bc} v^b w^c) = 0. \quad (3.3.7.)$$

Felhasználva, hogy a párhuzamosan eltoló vektorokra $t^a \nabla_a v^b = 0$ és $t^a \nabla_a w^c = 0$, az adódik, hogy

$$t^a v^b w^c \nabla_a g_{bc} = 0. \quad (3.3.8.)$$

Ez az összefüggés akkor és csak akkor áll fenn tetszőleges C görbe, és annak mentén párhuzamosan eltoló tetszőleges v^a és w^a vektorokra, ha

$$\nabla_a g_{bc} = 0. \quad (3.3.9.)$$

Ezért a metrika által kitüntetett kovariáns derivált az 1.-5. követelmények mellett még annak a követelménynek is eleget kell tennie, hogy a metrika kovariáns deriváltja zérus.

3.1.1. tétel: Ha adott a g_{ab} metrika, akkor egyetlen olyan ∇_a deriváló operátor létezik, amelyre $\nabla_a g_{bc} = 0$. Ha $\tilde{\nabla}_a$ -t valamely ψ koordinátarendszerhez tartozó közönséges parciális deriválás ∂_a operátorának választjuk, akkor a metrika által indukált ∇_a operátort a metrikával

$$\Gamma^c_{ab} = \frac{1}{2} g^{cd} (\partial_a g_{bd} + \partial_b g_{ad} - \partial_d g_{ab}) \quad (3.3.10.)$$

alakban kifejezett Christoffel-szimbólum határozza meg, amelynek komponenseit

$$\Gamma^\rho_{\mu\nu} = \frac{1}{2} \sum_\sigma g^{\rho\sigma} \left(\frac{\partial g_{\nu\sigma}}{\partial x^\mu} + \frac{\partial g_{\mu\sigma}}{\partial x^\nu} - \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\sigma} \right) \quad (3.3.11.)$$

a metrikus tenzor komponensei és azoknak első parciális deriváltjai egyértelműen meghatározzák.

A tétel bizonyításához válasszuk $\tilde{\nabla}_a$ -t valamely koordináta-rendszerhez tartozó közönséges ∂_a deriváló operátornak. Ezután meghatározzuk C_{ab}^c -t úgy, hogy a $\tilde{\nabla}_a$ és C_{ab}^c által meghatározott ∇^a deriváló operátor elégítse ki a $\nabla_a g_{bc} = 0$ feltételt. Ehhez C_{ab}^c -nek olyannak kell lennie a (3.2.17.) egyenlőség szerint, hogy

$$0 = \nabla_a g_{bc} = \tilde{\nabla}_a g_{bc} - C_{ab}^d g_{dc} - C_{ac}^d g_{bd}, \quad (3.3.12.)$$

azaz

$$C_{cab} + C_{bac} = \tilde{\nabla}_a g_{bc} \quad (3.3.13.)$$

teljesüljön. Az a, b indexek felcserélése, majd ezután a b és c indexek további felcserélése további összefüggéseket eredményez:

$$C_{cba} + C_{abc} = \tilde{\nabla}_b g_{ac}, \quad (3.3.14.)$$

$$C_{bca} + C_{acb} = \tilde{\nabla}_c g_{ab}. \quad (3.3.15.)$$

Adjuk össze a (3.3.13.) és (3.3.14.) egyenletek megfelelő oldalait, majd vonjuk ki ezekből a (3.3.15.) egyenlet megfelelő oldalait és használjuk fel, hogy $C_{cab} = C_{cba}$, ekkor

$$2C_{cab} = \tilde{\nabla}_a g_{bc} + \tilde{\nabla}_b g_{ac} - \tilde{\nabla}_c g_{ab} \quad (3.3.16.)$$

adódik, ahonnan

$$C_{ab}^c = \frac{1}{2} g^{cd} (\tilde{\nabla}_a g_{bd} + \tilde{\nabla}_b g_{ad} - \tilde{\nabla}_d g_{ab}). \quad (3.3.17.)$$

Ezzel a C_{ab}^c -vel $\nabla_a g_{bc} = 0$ és látjuk azt is, hogy C_{ab}^c -t a metrika és első deriváltjai egyértelműen meghatározzák.

3.4. A görbületi tenzor

Az előzőekben megmutattuk, hogy ha adott a kovariáns deriválás operátora, akkor jól definiált az is, hogy mit értünk egy $v \in V_p$ vektornak valamely C görbe mentén a p pontból a q pontba történő párhuzamos eltolásán. Azt is láttuk, hogy az eltolás eredménye, azaz hogy a párhuzamos eltolás, mint leképezés a V_q érintőtér melyik vektorát eredményezi, attól is függ, hogy az eltolást melyik, a p pontot a q ponttal összekötő C görbe mentén végezzük. Ennek az lesz a következménye, hogy ha egy vektort párhuzamosan eltolunk egy zárt görbe mentén a p pontból ugyanebbe a p pontba, akkor általában nem az eredeti vektort kapjuk vissza. Az eltérés a vektor és párhuzamos eltoltja között (zárt görbe menti eltolás esetén mindkettő V_p eleme) jellemzi a sokaság görbültségét. Ennek kvantitatív jellemzéséhez úgy jutunk, hogy először értelmezzük a Riemann-féle görbületi tenzort annak alapján, hogy két egymást követő kovariáns deriválás végrehajtása valamely duális vektormezőn mennyire különböző eredményre vezet, ha felcseréljük a deriválások sorrendjét. Ezután megmutatjuk, hogy az így definiált Riemann-féle görbületi tenzor azt is meghatározza, hogy vektornak infinitezimális zárt görbe mentén történő párhuzamos eltolása az eredeti vektorhoz képest mennyire különböző vektort eredményez.

Legyen ∇_a a kovariáns deriválás operátora, ω_a tetszőleges duális vektormező és f tetszőleges sima függvény. Határozzuk meg két egymást követő kovariáns deriválás hatását az $f\omega_a$ duális vektormezőre:

$$\begin{aligned}\nabla_a \nabla_b (f\omega_c) &= \nabla_a (\omega_c \nabla_b f + f \nabla_b \omega_c) \\ &= (\nabla_a \nabla_b f) \omega_c + (\nabla_b f) \nabla_a \omega_c + (\nabla_a f) \nabla_b \omega_c + f \nabla_a \nabla_b \omega_c, \quad (3.4.1.)\end{aligned}$$

majd fordított sorrendben

$$\nabla_b \nabla_a (f\omega_c) = (\nabla_b \nabla_a f) \omega_c + (\nabla_a f) \nabla_b \omega_c + (\nabla_b f) \nabla_a \omega_c + f \nabla_b \nabla_a \omega_c. \quad (3.4.2.)$$

Vonjuk ki a két egyenlet megfelelő oldalait egymásból és használjuk ki a torziómentes-séget, ekkor

$$(\nabla_a \nabla_b - \nabla_b \nabla_a)(f\omega_c) = f(\nabla_a \nabla_b - \nabla_b \nabla_a)\omega_c \quad (3.4.3.)$$

adódik. Hasonló érveléssel, mint amelyet a deriváló operátorok vizsgálata során alkalmaztunk, be lehet látni, hogy $(\nabla_a \nabla_b - \nabla_b \nabla_a)\omega_c$ értéke valamely p pontban csak ω_c ezen pontban felvett értékétől függ, mégpedig lineárisan. Ezért létezik olyan $R_{abc}{}^d$ tenzor, amelynek segítségével a kovariáns deriváltak kommutátorának hatása a duális vektormezőre

$$[\nabla_a, \nabla_b]\omega_c = R_{abc}{}^d \omega_d \quad (3.4.4.)$$

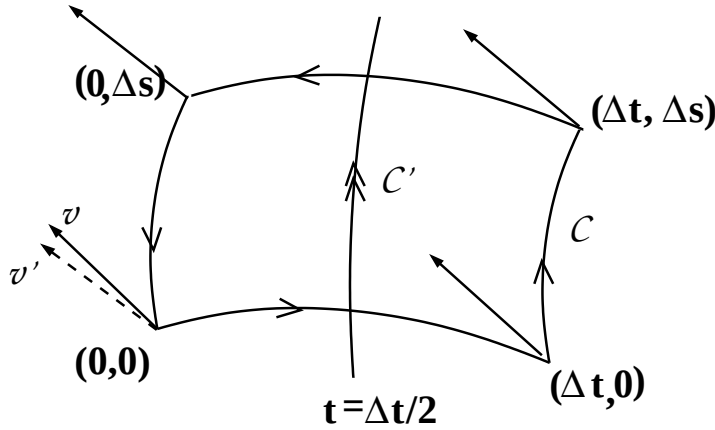
alakba írható. Itt $R_{abc}{}^d$ a **Riemann-féle görbületi tenzor**. Érdemes megjegyezni, hogy az a és b indexek a sokaságon értelmezett ψ lokális koordinátarendszernek megfelelő indexek, ugyanakkor a c és d indexek rendre a V_p érintőtérben és a V_p^* duális vektortérben használt (a ψ lokális térképhez tartozó) bázisok szerinti indexek.

Megjegyzés: A levezetés során a (3.4.3.) összefüggés adódott, ami biztosítja, hogy a (3.4.4.) egyenlőség duális vektoroknak tetszőleges sima függvényekkel képezett lineáris kombinációjára is fennáll.

Most megmutatjuk, hogy az $R_{abc}{}^d$ Riemann-féle görbületi tenzor azt is meghatározza, hogy mennyire kapunk az eredeti vektortól különböző vektort, ha egy vektort infinitezimális zárt görbe mentén párhuzamosan eltolunk. A következőképpen járunk el. Tekintsünk a $p \in M$ ponton átmenő tetszőleges 2-dimenziós S felületet. Legyenek ezen a koordináták t és s olyanok, hogy $t = s = 0$ felel meg a p pontnak. Tekintsük ezután a $(0, 0)$, $(\Delta t, 0)$, $(\Delta t, \Delta s)$, $(0, \Delta s)$ pontok által kijelölt infinitezimális paralelogrammát (Δt , Δs infinitezimális), amelynek oldalai által meghatározott infinitezimális zárt görbe mentén a v^a vektort párhuzamosan eltoljuk (ld. 6. ábra). Azt fogjuk megmutatni, hogy **az infinitezimális zárt görbe mentén történő párhuzamos eltolás során a v^a vektor megváltozása**

$$\delta v^a = \Delta t \Delta s v^d T^c S^b R_{cd}{}^a, \quad (3.4.5.)$$

ahol T^a és S^a rendre az $s = \text{áll.}$ és $t = \text{áll.}$ koordinátavonalak érintővektorai.



6. ábra. A v vektor párhuzamos eltolása infinitezimális zárt C görbe mentén, a vektor és párhuzamos eltoltja közti különbség $\delta v = v' - v$.

Legyen továbbá ω_a tetszőleges duális vektormező. Vizsgáljuk meg, hogyan változik az $\omega_a v^a$ skalár a v^a vektor párhuzamos eltolása során. Legyen rendre ez a megváltozás $\delta_1, \delta_2, \delta_3, \delta_4$ a zárt görbe $(0,0) - (\Delta t, 0), (\Delta t, 0) - (\Delta t, \Delta s), (\Delta t, \Delta s) - (0, \Delta s), (0, \Delta s) - (0, 0)$ szakaszain. Jelölje rendre T^a és S^a az $s = \text{const.}$ és a $t = \text{const.}$ koordinátavonalak érintővektorait. Ekkor jó közelítéssel

$$\begin{aligned}
 \delta_1 &= \Delta t \frac{\partial}{\partial t} (\omega_a v^a) \Big|_{(\Delta t/2, 0)} + \mathcal{O}((\Delta t)^2) \\
 &= \Delta t (T^b \nabla_b) (\omega_a v^a) \Big|_{(\Delta t/2, 0)} + \mathcal{O}((\Delta t)^2) \\
 &= \Delta t \left[v^a (T^b \nabla_b) \omega_a + \omega_a (T^b \nabla_b) v^a \right] \Big|_{(\Delta t/2, 0)} + \mathcal{O}((\Delta t)^2) \\
 &= \Delta t \left[v^a (T^b \nabla_b) \omega_a \right] \Big|_{(\Delta t/2, 0)} + \mathcal{O}((\Delta t)^2), \tag{3.4.6}
 \end{aligned}$$

ahol felhasználtuk a kovariáns deriválás 4. tulajdonságát, a Leibnitz-szabályt, és azt, hogy a görbe mentén párhuzamosan eltoló vektornak a görbe érintőjének irányában vett iránymenti deriváltja zérus. Hasonlóan adódik, hogy

$$\delta_3 = -\Delta t \left[v^a (T^b \nabla_b) \omega_a \right] \Big|_{(\Delta t/2, \Delta s)} + \mathcal{O}((\Delta t)^2), \tag{3.4.7}$$

ahol a mínusz előjel a jobb oldalon azt veszi figyelembe, hogy az $s = \Delta s$ koordinátavonalon ellentétes irányban haladunk, mint az $s = 0$ koordinátavonalon tettük. Adjuk össze ezt a két megváltozást:

$$\delta_1 + \delta_3 = \Delta t \left[v^a (T^b \nabla_b) \omega_a \Big|_{(\Delta t/2, 0)} - v^a (T^b \nabla_b) \omega_a \Big|_{(\Delta t/2, \Delta s)} \right]. \tag{3.4.8}$$

Hasonló kifejezést kapunk $(\delta_2 + \delta_4)$ -re:

$$\delta_2 + \delta_4 = \Delta s \left[v^a (S^b \nabla_b) \omega_a \Big|_{(\Delta t/2, \Delta s/2)} - v^a (S^b \nabla_b) \omega_a \Big|_{(0, \Delta s/2)} \right]. \tag{3.4.9}$$

Látjuk, hogy ha $\Delta s \rightarrow 0$, akkor a (3.4.8.) kifejezés első rendben eltűnik. Hasonlóképpen a (3.4.9.) kifejezés is elsőrendben eltűnik, ha $\Delta t \rightarrow 0$. A párhuzamos eltolás tehát Δt -ben és Δs -ben első rendben nem jelent változást.

Határozzuk meg azonban $(\delta_1 + \delta_3)$ -at másodrendű pontossággal. Ehhez meg kell határozni a (3.4.8.) egyenlet jobb oldalán a szögletes zárójelben álló kifejezést Δs -ben elsőrendű pontossággal. Képzeljük el ehhez, hogy a $v|_{(\Delta t/2, \Delta s)}$ vektor a $v|_{(\Delta t/2, 0)}$ vektorból a $t = \Delta t/2$ görbe (a 6. ábrán a C' görbe) mentén történő párhuzamos eltolással adódik. Ekkor azonban $v|_{(\Delta t/2, \Delta s)} = v|_{(\Delta t/2, 0)} + \mathcal{O}((\Delta s)^2)$, mert a párhuzamos eltolás első rendben nem függ a görbétől, amely mentén végeztük. Ugyanakkor $T^b \nabla_b \omega_a|_{(\Delta t/2, \Delta s)}$ a párhuzamos eltolástól (ami első rendben $T^b \nabla_b \omega_a|_{(\Delta t/2, 0)}$ -vel azonos) $\Delta s S^c \nabla_c (T^b \nabla_b \omega_a)|_{(\Delta t/2, 0)}$ -vel különbözik,

$$T^b \nabla_b \omega_a|_{(\Delta t/2, \Delta s)} = T^b \nabla_b \omega_a|_{(\Delta t/2, 0)} + \Delta s S^c \nabla_c (T^b \nabla_b \omega_a)|_{(\Delta t/2, 0)}. \quad (3.4.10.)$$

Ezért azt kapjuk, hogy

$$\delta_1 + \delta_3 = -\Delta t \Delta s v^a S^c \nabla_c (T^b \nabla_b \omega_a) \quad (3.4.11.)$$

másodrendű pontossággal, ahol a jobboldali kifejezést vehetjük a $(0, 0)$ pontban, azaz a p pontban. Teljesen hasonlóan adódik, hogy

$$\delta_2 + \delta_4 = \Delta t \Delta s v^a T^c \nabla_c (S^b \nabla_b \omega_a). \quad (3.4.12.)$$

Az $\omega_a v^a$ skalár megváltozása tehát a v^a vektornak az infinitezimális zárt görbe mentén történő eltolása során

$$\begin{aligned} \delta(\omega_a v^a) &= \delta_1 + \delta_2 + \delta_3 + \delta_4 \\ &= \Delta t \Delta s v^a \left(T^c \nabla_c (S^b \nabla_b \omega_a) - S^c \nabla_c (T^b \nabla_b \omega_a) \right) \\ &= \Delta t \Delta s v^a \left[T^c S^b [\nabla_c, \nabla_b] \omega_a + \left(T^c (\nabla_c S^b) - S^c (\nabla_c T^b) \right) \nabla_b \omega_a \right]. \end{aligned} \quad (3.4.13.)$$

Itt a jobb oldalon a kerekzárójeles kifejezés éppen koordináta-bázisvektorok kommutátora

$$T^c (\nabla_c S^b) - S^c (\nabla_c T^b) = [T, S]^b = 0, \quad (3.4.14.)$$

amely mindig zérus, hiszen koordináta-bázisvektorok mindig felcserélhetők. Ezt is figyelembe véve azt kapjuk, hogy

$$\delta(\omega_a v^a) = \Delta t \Delta s v^a T^c S^b [\nabla_c, \nabla_b] \omega_a. \quad (3.4.15.)$$

A Riemann-féle görbületi tenzor segítségével írhatjuk azonban, hogy

$$[\nabla_c, \nabla_b] \omega_a = R_{cba}{}^d \omega_d \quad (3.4.16.)$$

tetszőleges ω_a duális vektormező esetén. Végül tehát

$$\delta(\omega_a v^a) = \Delta t \Delta s v^a T^c S^b R_{cba}{}^d \omega_d \quad (3.4.17.)$$

adódik, ami tetszőleges ω_a duális vektormezőre akkor és csak akkor állhat fenn (Δt -ben és Δs -ben másodrendű pontossággal), ha az infinitezimális zárt görbe mentén történő párhuzamos eltolás során a v^a vektor megváltozása

$$\delta v^a = \Delta t \Delta s v^d T^c S^b R_{cbd}{}^a, \quad (3.4.18.)$$

ami éppen a keresett (3.4.5.) összefüggés.

A (3.4.5.) egyenlőség közvetlenül mutatja, hogy a görbületi tenzor meghatározza azt, hogy egy vektort infinitezimális zárt görbe mentén párhuzamosan eltolva, az eredményül kapott vektor mennyire tér el az eredeti vektortól. A levezetésből az is kiderült, hogy ez az eltérés abból adódik, hogy két egymás után végrehajtott kovariáns deriválás a duális vektormezőkre vett hatásában mennyire nem felcserélhető.

Állítás: A kovariáns deriválások operátorai kommutátorának hatása t^a sima vektormezőre:

$$[\nabla_a, \nabla_b]t^c = -R_{abd}{}^c t^d. \quad (3.4.19.)$$

Legyen ω_a tetszőleges duális vektormező. Ekkor a torziómentesség feltétele alapján

$$\begin{aligned} 0 &= [\nabla_a, \nabla_b](t^c \omega_c) \\ &= \nabla_a(\omega_c \nabla_b t^c + t^c \nabla_b \omega_c) - \nabla_b(\omega_c \nabla_a t^c + t^c \nabla_a \omega_c) \\ &= \omega_c [\nabla_a, \nabla_b]t^c + t^c [\nabla_a, \nabla_b]\omega_c, \end{aligned} \quad (3.4.20.)$$

ahonnan

$$\omega_c [\nabla_a, \nabla_b]t^c = -t^c R_{abc}{}^d \omega_d \quad (3.4.21.)$$

áll fenn tetszőleges duális vektormezőre, úgyhogy innen következik a bizonyítani kívánt összefüggés.

Állítás: Teljes indukcióval belátható, hogy a kovariáns deriválások operátorai kommutátorának hatása tetszőleges tenzormezőre:

$$[\nabla_a, \nabla_b]T^{a_1 \dots a_k}{}_{b_1 \dots b_l} = -\sum_{i=1}^k R_{abc}{}^d T^{a_1 \dots c \dots a_k}{}_{b_1 \dots b_l} + \sum_{j=1}^l R_{abb_j}{}^c T^{a_1 \dots a_k}{}_{b_1 \dots c \dots b_l}. \quad (3.4.22.)$$

A Riemann-féle görbületi tenzor néhány fontos tulajdonsággal rendelkezik:

1. Az első két indexében (a sokaság-indexekben) antiszimmetrikus:

$$R_{abc}{}^d = -R_{bac}{}^d. \quad (3.4.23.)$$

Ez közvetlenül kiolvasható a Riemann-tenzort definiáló (3.4.4.) egyenlőségből.

- 2.

$$R_{[abc]}{}^d = 0. \quad (3.4.24.)$$

Először belátjuk, hogy $\forall \omega_c$ tenzormező esetén

$$\nabla_{[a} \nabla_b \omega_c] = 0. \quad (3.4.25.)$$

Valóban, $T_{bc} \equiv \nabla_b \omega_c = \partial_b \omega_c - \Gamma_{bc}^d \omega_d$ és

$$\nabla_a T_{bc} = \partial_a T_{bc} - \Gamma_{ab}^e T_{ec} - \Gamma_{ac}^e T_{be} \quad (3.4.26.)$$

miatt

$$\begin{aligned} \nabla_a T_{bc} &= \partial_a \partial_b \omega_c - (\partial_a \Gamma_{bc}^d) \omega_d - \Gamma_{bc}^d \partial_a \omega_d - \Gamma_{ab}^e (\partial_e \omega_c - \Gamma_{ec}^d \omega_d) \\ &= \partial_a \partial_b \omega_c - \Gamma_{bc}^d \partial_a \omega_d - \Gamma_{ab}^e \partial_e \omega_c - (\partial_a \Gamma_{bc}^d) \omega_d + \Gamma_{ab}^e \Gamma_{ec}^d \omega_d, \end{aligned} \quad (3.4.27.)$$

és ennek a kifejezésnek a teljes antiszimmetrizáltja zérusnak adódik, ha felhasználjuk, hogy a közönséges parciális deriváltak sorrendje felcserélhető, és hogy $\Gamma_{ab}^c = \Gamma_{ba}^c$. (A belátott (3.4.25.) azonosság lényegében a $d^2 \omega = \nabla \wedge (\nabla \wedge \omega) = 0$ azonosság, ami a differenciálformákra vonatkozó általános érvényű azonosság speciális esete, amikor ω 1-forma.)

Ekkor viszont írhatjuk, hogy

$$\begin{aligned} 0 &= 2\nabla_{[a} \nabla_b \omega_{c]} = \nabla_{[a} \nabla_b \omega_{c]} - \nabla_{[b} \nabla_a \omega_{c]} \\ &= R_{[abc]}^d \omega_d, \end{aligned} \quad (3.4.28.)$$

amit bizonyítani akartunk.

3. Ha a ∇_a deriválási operátor a metrikához természetes módon hozzárendelt kovariáns deriválás operátora, azaz olyan, amelyre $\nabla_a g_{bc} = 0$, akkor

$$R_{abcd} = -R_{abdc} \quad (3.4.29.)$$

(antiszimmetria az érintőtérhez tartozó indexekben).

Ez az azonosság a (3.4.20.) szabályból következik, ha azt a g_{ab} metrikára alkalmazzuk:

$$0 = [\nabla_a, \nabla_b] g_{cd} = R_{abc}^e g_{ed} + R_{abd}^e g_{ce} = R_{abcd} + R_{abdc}, \quad (3.4.30.)$$

ami éppen a bizonyítani kívánt tulajdonság.

4. Teljesül a Bianchi²⁸-azonosság:

$$\nabla_{[a} R_{bc]d}^e = 0. \quad (3.4.31.)$$

Alkalmazzuk a (3.4.20.) szabályt duális vektormező kovariáns deriváltjára:

$$[\nabla_a, \nabla_b](\nabla_c \omega_d) = R_{abc}^e (\nabla_e \omega_d) + R_{abd}^f (\nabla_c \omega_f). \quad (3.4.32.)$$

Másrésről írhatjuk, hogy

$$\nabla_a [\nabla_b, \nabla_c] \omega_d = \nabla_a (R_{bcd}^e \omega_e) = \omega_e \nabla_a R_{bcd}^e + R_{bcd}^e \nabla_a \omega_e. \quad (3.4.33.)$$

Antiszimmetrizáljunk most az a, b, c indexek tekintetében mind a (3.4.32.), mind a (3.4.33.) egyenlőség mindkét oldalán. Ekkor az egyenletek bal oldalai meg fognak egyezni. A jobb oldalak egyenlősége pedig az alábbi azonosságot eredményezi:

$$R_{[abc]}^e (\nabla_e \omega_d) + R_{[ab|d]}^f (\nabla_c \omega_f) = \omega_e \nabla_{[a} R_{bc]d}^e + R_{[bc|d]}^e \nabla_a \omega_e. \quad (3.4.34.)$$

²⁸Luigi Bianchi, olasz matematikus, 1856-1928

A függőleges elválasztóvonalak azt jelölik, hogy d -re nem antiszimetrizálunk. A baloldali első tag a Riemann-tenzor 2. tulajdonsága miatt zérus. A második tagok a két oldalon éppen megegyeznek és kiejtik egymást. Ezért végül a

$$0 = \omega_e \nabla_{[a} R_{bc]d}{}^e \quad (3.4.35.)$$

azonosságot kapjuk tetszőleges ω_a 1-formamezőre. Ez éppen a bizonyítani akart azonosság érvényességét jelenti.

A Riemann-féle R_{abcd} görbületi tenzor egyértelműen felbontható egy zérus spúrú C_{abcd} és egy nem zérus spúrú tenzor összegére. Ehhez először bevezetjük az R_{ab} Ricci²⁹-tenzort és az R skalárgörbületet (Gauss-görbületet).

Definíció: A Ricci-tenzor:

$$R_{ac} = R_{abc}{}^b. \quad (3.4.36.)$$

Következmény: A Ricci-tenzor szimmetrikus:

$$R_{ac} = R_{ca}. \quad (3.4.37.)$$

Valóban, az $R_{abcd} = R_{cdab}$ tulajdonság következtében

$$R_{ca} = R_{cba}{}^b = g^{bd} R_{cbad} = g^{bd} R_{adcb} = R_{adc}{}^d = R_{ac} \quad (3.4.38.)$$

adódik.

Definíció: A skalárgörbület a Ricci-tenzor spúrja,

$$R = R_a{}^a. \quad (3.4.39.)$$

Állítás: Az $n \geq 3$ dimenziós sokaságok esetén a Riemann-tenzor felbontása zérus és nem zérus spúrú tenzorok összegére:

$$R_{abcd} = C_{abcd} + \frac{2}{n-2} \left(g_{a[c} R_{d]b} - g_{b[c} R_{d]a} \right) - \frac{2}{(n-1)(n-2)} R g_{a[c} g_{d]b}, \quad (3.4.40.)$$

ahol C_{abcd} az úgynevezett **Weyl**³⁰-tenzor. A Weyl-tenzor spúrja bármely két indexében zérus, és eleget tesz a Riemann-tenzor 1., 2. és 3. tulajdonságának.

Megjegyzés: A Weyl-tenzor a metrika konform transzformációi során nagyon egyszerűen transzformálódik és ezért szokás **konform tenzornak** is nevezni.

Definíció: Az Einstein-tenzort a

$$G_{ab} = R_{ab} - \frac{1}{2} R g_{ab} \quad (3.4.41.)$$

²⁹Gregorio Ricci-Curbastro, olasz matematikus, 1853-1925

³⁰Hermann Klaus Hugo Weyl, német matematikus, fizikus és gondolkodó, 1885-1955

összefüggéssel származtatjuk a Riemann-tenzorból.

Megjegyzés: Az Einstein-tenzor nagyon fontos szerepet játszik az általános relativitáselméletben. Segítségével írhatók fel az **Einstein-egyenletek**, amelyek leírják, hogy az anyag mozgásának hatására hogyan változik a téridő-sokaság szerkezete, pontosabban a metrikája.

Állítás: Az Einstein-tenzor kovariáns deriváltja azonosan eltűnik,

$$\nabla^a G_{ab} = 0. \quad (3.4.42.)$$

Induljunk ki a Bianchi-azonosságból, $\nabla_{[a} R_{bc]d}{}^e = 0$, és kontraháljuk az a és e indexek tekintetében,

$$\begin{aligned} 0 &= \nabla_a R_{bcd}{}^a + \nabla_b R_{cad}{}^a + \nabla_c R_{abd}{}^a - \nabla_c R_{bad}{}^a - \nabla_b R_{acd}{}^a - \nabla_a R_{cbd}{}^a \\ &= \nabla_a R_{bcd}{}^a + \nabla_b R_{cd} - \nabla_c R_{bd} - \nabla_c R_{bd} + \nabla_b R_{cd} + \nabla_a R_{bcd}{}^a \\ &= 2(\nabla_a R_{bcd}{}^a + \nabla_b R_{cd} - \nabla_c R_{bd}). \end{aligned} \quad (3.4.43.)$$

Húzzuk fel most a metrikával a d indexet,

$$0 = \nabla_a R_{bc}{}^{da} + \nabla_b R_c{}^d - \nabla_c R_b{}^d, \quad (3.4.44.)$$

majd kontraháljunk a b és d indexek tekintetében. Ekkor megkapjuk a bizonyítani kívánt azonosságot:

$$\begin{aligned} 0 &= \nabla_a R_{bc}{}^{ba} + \nabla_b R_c{}^b - \nabla_c R = \nabla_b R_{ac}{}^{ab} + \nabla_b R_c{}^b - \nabla_c R \\ &= 2\nabla^b R_{cb} - \nabla_c R = 2\nabla_b \left(R_{cb} - \frac{1}{2} R g_{cb} \right) = 2\nabla_b G_{cb}, \end{aligned} \quad (3.4.45.)$$

ahol felhasználtuk, hogy

$$R_{ac}{}^{ab} = g^{ae} g^{bf} R_{acef} = -g^{ae} g^{bf} R_{caef} = -g^{ae} g^{bf} R_{efca} = g^{ae} g^{bf} R_{feca} = g^{bf} R_{fec}{}^e = g^{bf} R_{fc}, \quad (3.4.46.)$$

és hogy $\nabla_b (g^{bf} R_{fc}) = g^{bf} \nabla_b R_{fc} = \nabla^f R_{fc} = \nabla^b R_{cb}$, továbbá hogy $\nabla_a g_{bc} = 0$.

Megjegyzés: A (3.4.42.) azonosság az általános relativitáselméletben, mint az Einstein-egyenletek konzisztenciájának feltétele fog szerepelni.

3.5. Geodetikusok

3.5.1. A geodetikus fogalma

A görbült sokaságban vannak „kitüntetett görbék”, az úgynevezett **geodetikusok**. Ezek azok a görbék, amelyek a „legkevésbé görbülnek.”

Definíció: Geodetikusoknak azokat a görbéket nevezzük, amelyek mentén az érintővektorok megkaphatók egymásból a görbe menti párhuzamos eltolással, azaz amelyek T^a érintővektorai eleget tesznek a

$$T^a \nabla_a T^b = 0 \quad (3.5.1.)$$

egyenletnek.

Megjegyzés: Ha nem ragaszkodunk hozzá, hogy a párhuzamos eltolás során az érintővektor hossza ne változzon, akkor csak azt kell megkövetelni, hogy a görbe tetszőleges p pontjában az érintővektor párhuzamos legyen azzal a vektorral, amelyet egy tetszőleges másik q pontban vett érintővektornak a p pontba történő párhuzamos eltolásával kapunk. Ekkor az egyenlet, amely a görbe geodetikusságának feltétele,

$$T^a \nabla_a T^b = \alpha T^b \quad (3.5.2.)$$

alakra módosul, ahol α a görbén értelmezett tetszőleges függvény. A (3.5.2.) egyenlet azt fejezi ki, hogy a görbe tetszőleges p pontjában a T_p^a érintővektor és a p -hez infinitezimálisan közeli q görbe-pontból a p -be párhuzamosan eltolt ΠT_q^a vektor párhuzamosak, de nem azonos hosszúságúak. Meg lehet mutatni, hogy a görbe átparaméterezésével mindig elérhetjük, hogy a (3.5.2.) feltétel a (3.5.1.) alakot öltse. Ha a geodetikust úgy paraméterezzük, hogy egyenlete (3.5.1.) alakot ölt, akkor azt mondjuk, hogy **affin paraméterezést** használunk. A továbbiakban a geodetikusokat affin paraméterükkel fogjuk parametrizálni.

Állítás: Írjuk át a geodetikusok egyenletét valamely ψ koordinátarendszerben koordinátakomponensekre vonatkozó egyenletté. Legyen a geodetikus képe $\mathbb{R}^n$ -ben $x^\mu(t)$. A geodetikusok egyenlete ekkor

$$0 = \frac{d^2 x^\mu}{dt^2} + \sum_{\sigma\nu} \Gamma^\mu_{\sigma\nu} \frac{dx^\sigma}{dt} \frac{dx^\nu}{dt} \quad (3.5.3.)$$

alakot ölt.

A geodetikusok érintővektoraira vonatkozó egyenlet,

$$0 = T^a (\partial_a T^b + \Gamma^b_{ac} T^c), \quad (3.5.4.)$$

koordinátakomponensekben

$$0 = \frac{dT^\mu}{dt} + \sum_{\sigma,\nu} \Gamma^\mu_{\sigma\nu} T^\sigma T^\nu, \quad (3.5.5.)$$

ahol felhasználtuk a kovariáns deriváló operátor 3. tulajdonságát. A ψ koordinátarendszerben az érintővektor komponensei $T^\mu = dx^\mu/dt$, úgyhogy azonnal adódik a geodetikusok egyenletének (3.5.3.) alakja.

Állítás: A geodetikusok affin paramétere nem egyértelmű. Ha t affin paraméter, akkor bármely $t' = at + b$ is affin paraméter, ahol a, b valós állandók.

Ez annak a következménye, hogy a geodetikusok egyenletében csak $x^\mu(t)$ első és második deriváltja szerepel,

$$\frac{dx^\mu}{dt} = a \frac{dx^\mu}{dt'}, \quad \frac{d^2 x^\mu}{dt^2} = a^2 \frac{d^2 x^\mu}{dt'^2}, \quad (3.5.6.)$$

úgyhogy a geodetikus egyenlete az új paraméterben is az eredeti alakú marad egy a^2 állandó szorzótól eltekintve.

A geodetikusok (3.5.3.) egyenlete közönséges másodrendű differenciálegyenlet az $x^\mu(t)$ komponensfüggvények együttesére. Ennek egyértelműen létezik a megoldása, ha a görbe valamely pontja és abban a pontban a görbe érintővektora adott. Ez a következőt jelenti:

Állítás: A sokaság bármely $p \in M$ pontján áthalad pontosan egy olyan geodetikus, amelynek érintője a p pontban a tetszőlegesen választott $T^a|_p \in V_p$ érintővektor.

3.5.2. Geodetikusok felhasználásával szerkesztett koordinátarendszerek

Ellentétben a lapos, azaz nem görbült sokaságok esetével a sokaság $p \in M$ pontjában értelmezett érintővektorok nem tekinthetők a sokaság p pontjából annak más pontjaiba mutató nyilaknak, hanem azok az érintővektorok V_p terének az elemei. A geodetikusok segítségével azonban leképezhetjük az érintővektorok V_p terét a sokaságra. Ez az úgynevezett **exponenciális leképezés**, amikor a $p \in M$ pontban értelmezett V_p érintőtér tetszőleges $v_p \in V_p$ vektorához a sokaság azon q pontját rendeljük, amely a p -ból induló, v_p érintővektorú, egyértelműen meghatározott geodetikus mentén fekszik az affin paraméterben mért $t = 1$ távolságra. (Ne feledjük, hogy V_p bármely v és v' vektora, amelyekre $v' = \alpha v$, ahol α tetszőleges valós szám, különböző geodetikusokat határoznak meg.) Meg lehet mutatni, hogy bármely $p \in M$ pont esetén a V_p érintőtér origójának van olyan kis környezete (kellően kis hosszúságú v vektorok esete), hogy ez a hozzárendelés létezik és kölcsönösen egyértelmű. (Ha $v \in V_p$ elég nagy, akkor előfordulhat, hogy a hozzátartozó geodetikus mentén szingularitást találunk még mielőtt elérjük a $t = 1$ affin paraméterű pontot. Az is lehet, hogy ilyenkor egy p -ból induló másik geodetikus metszi a v -hez tartozót annak $t < 1$ paraméterű pontjában.) A V_p érintőtérnek, mint n -dimenziós vektortérnek ez a kis környezete azonosítható $\mathbb{R}^n$ origó körüli környezetével, és így az exponenciális leképezés segítségével koordinátarendszert vezethetünk be a p pont környezetében, amelyet **Riemann-féle normálkoordináta-rendszernek** nevezünk. Ebben a koordinátarendszerben a p pontban (a koordinátarendszer origójában) a Christoffel-szimbólumok eltűnnek. A p ponttól kellően távol a geodetikusok metszhetik egymást vagy szingularitásba futhatnak, ezért a koordinátarendszer csak a p pont megfelelően kis környezetében használható, lokális koordinátarendszer.

Amennyiben a kovariáns derivált a 6. tulajdonságnak is eleget tesz, azaz a metrika által egyértelműen meghatározott kovariáns derivált, akkor a geodetikusok segítségével értelmezhetjük a **Gauss-féle normálkoordinátákat**. Ezek akkor használhatók előnyösen, ha az n -dimenziós M sokaságban létezik a beágyazott $(n - 1)$ -dimenziós S hiperfelületek serege. Ekkor a S hiperfelület bármely $p \in S$ pontjában a hiperfelület $\tilde{V}_p$ érintőtere $(n - 1)$ -dimenziós altere az M sokaság ugyan-ezen p -pontban vett V_p érintőterének. Ezért a nagyságától eltekintve egyértelműen létezik olyan $n^a \in V_p$ vektor, amely a g_{ab} metrika szerint ortogonális a $\tilde{V}_p$ érintőtér

minden $\tilde{v}^a \in \tilde{V}_p$ vektorára, $g_{ab}\tilde{v}^a n^b = 0$. Ezt az n^a a vektort az S **hiperfelület normálisának** nevezzük. Ha a sokaság metrikája Riemann-metrika, akkor n^a nem lehet benne $\tilde{V}_p$ -ben, $n^a \notin \tilde{V}_p$. Ha a sokaság metrikája indefinit (pl. Lorentz-szignatúrájú), akkor n^a lehet null-vektor, $g_{ab}n^a n^b = 0$, és ilyenkor $n^a \in \tilde{V}_p$, és akkor S ott **nullfelület**. Ha S sehol sem nullfelület, akkor aszerint, hogy n^a térszerű vagy időszerű, normálhatjuk rendre $g_{ab}n^a n^b = +1$, ill. $= -1$ szerint. Ha az S hiperfelület nem nullfelület, akkor a **Gauss-féle normálkoordinátarendszert** a következőképpen értelmezzük. Határozzuk meg az S hiperfelület minden egyes $p \in S$ pontjában az adott ponton áthaladó, n^a érintővektorú γ_p geodetikust. Ezen geodetikuskok és az S hiperfelület metszéspontjaihoz rendeljük a $t = 0$ affin paraméterértéket. Vegyünk fel továbbá az S hiperfelületen (vagy annak egy tartományában) értelmezett $(x^1, \dots, x^{n-1})$ koordinátákat. Az S hiperfelület környezetében levő tetszőleges $q \in M$ ponthoz a következőképpen rendelünk koordinátákat: (a) megkeressük, hogy melyik az a $\gamma_{p'}$ (S -re ortogonális) geodetikus, amely S -et p' -ben metszi és átmegy q -n; (b) q -hoz ugyanazokat az $(x^1, \dots, x^{n-1})$ koordinátákat rendeljük, mint amelyek $p' \in S$ megfelelő koordinátái; (c) q -hoz azt az $x^n = t$ koordinátaértéket rendeljük, amilyen t affin paraméterértékhez tartozik $q \in \gamma_{p'}$. Ekkor az összes $q \in M$ pont, amelynek azonos az $x^n = t$ koordinátája, definiálja az S_t hiperfelületet. Ekkor mondhatjuk, hogy az S hiperfelületen értelmezett koordinátákat a leírt módon „átemeltük” az S_t hiperfelületekre.

Állítás: A Gauss-féle normálkoordinátarendszer azzal a tulajdonsággal rendelkezik, hogy a $t = 0$ affin paraméterértékhez tartozó S hiperfelületet annak normálisa irányában metsző geodetikuskok az összes, $t = \text{áll.}$ affin paraméterértékhez tartozó S_t hiperfelületre ortogonálisak.

A bizonyításhoz azt kell belátni, hogy a geodetikus érintővektor-mezeje, n^a ortogonális marad az $X_1^a, \dots, X_{n-1}^a$ bázisvektor-mezőkre, amelyek kifeszítik S_t érintőterét. Ehhez elegendő azt belátni, hogy az $n_a X^a$ skalárszorzat a geodetikuskok mentén történő párhuzamos eltolás során nem változik, azaz, hogy $n^b \nabla_b (n_a X^a) = 0$, ahol X^a az $X_1^a, \dots, X_{n-1}^a$ vektormezőik bármelyike lehet. A bal oldalon álló kifejezés tovább alakítható,

$$n^b \nabla_b (n_a X^a) = n^b (\nabla_b n_a) X^a + n^b n_a \nabla_b X^a = n^b n_a \nabla_b X^a, \quad (3.5.7.)$$

mert n^a geodetikus érintővektora, amelyre $n^b \nabla_b n^a = 0$. Mivel n^a és X^a koordináta-bázisvektorok, azért felcserélhetők, $0 = [n, X]^a = n^b \nabla_b X^a - X^b \nabla_b n^a$, úgyhogy

$$n^b \nabla_b (n_a X^a) = n_a n^b \nabla_b (X^a) = n_a X^b \nabla_b n^a. \quad (3.5.8.)$$

Innen a Leibnitz-szabályt alkalmazva és figyelembe véve, hogy az S -en érvényes $n_a n^a = \pm 1$ normálási feltétel megőrződik a párhuzamos eltolások során, az adódik, hogy

$$n^b \nabla_b (n_a X^a) = \frac{1}{2} X^b \nabla_b (n_a n^a) = 0, \quad (3.5.9.)$$

amit bizonyítani akartunk. Mivel az $n_a X^a = 0$ ortogonalitási feltételek fennállnak az S hiperfelület valamelyik pontjában, amelyet koordinátarendszerünk origójának választottunk, ezért a $n^b \nabla_b (n_a X^a) = 0$ egyenlőség azt jelenti, hogy ennek a pontnak M -beli környezetében (a koordinátarendszer érvényességi tartományában) is teljesülnek az $n_a X^a = 0$ ortogonalitási feltételek bármely $X^a = X_1^a, \dots, X_{n-1}^a$ bázisvektor-mezőre.

3.5.3. A minimális ívhosszú és a maximális sajátidőtartamú görbék

A metrikához tartozó (azaz a $\nabla_a g_{bc} = 0$ tulajdonságot is kielégítő) kovariáns derivált segítségével definiált geodetikusok fontos tulajdonsága, hogy szélsőértékké teszik az adott két pontot összekötő görbe hosszát.

Definíció: Legyen az M sokaságon adott a g_{ab} Riemann-metrika. Legyen C sima (vagy legalább egyszer differenciálható) görbe és T^a ennek érintővektora, t pedig a paramétere. A görbe t_1 és t_2 paraméterhez tartozó pontjai közti görbeív hosszán az

$$\ell = \int_{t_1}^{t_2} (g_{ab} T^a T^b)^{1/2} dt \quad (3.5.10.)$$

integrált értjük.

Definíció: Legyen az M sokaságon adott a g_{ab} Lorentz-metrika. Legyen C sima (vagy legalább egyszer differenciálható) görbe és T^a ennek érintővektora, t pedig a paramétere. A C görbét időszerűnek, null-görbének vagy térszerűnek nevezzük rendre aszerint, hogy érintőjének normanégyszete mindenütt negatív ($g_{ab} T^a T^b < 0$), zérus ($g_{ab} T^a T^b = 0$), vagy pozitív ($g_{ab} T^a T^b > 0$). Térszerű görbe ívhosszán ismét a (3.5.10.) kifejezést értjük. Időszerű görbe ívhosszán a

$$\tau = \int_{t_1}^{t_2} (-g_{ab} T^a T^b)^{1/2} dt \quad (3.5.11.)$$

integrált értjük, amit **sajátidőnek** nevezünk. A null-görbék ívhossza zérus.

Állítás: Lorentz-metrikájú sokaságban bármely geodetikus érintője vagy mindenütt időszerű, vagy mindenütt térszerű, vagy mindenütt null-vektor. Ezért egy geodetikus vagy időszerű, vagy térszerű, vagy null-geodetikus.

Ez közvetlen következménye annak, hogy a geodetikusok érintővektorai egymásnak párhuzamos eltolásai, és a párhuzamos eltolás megőrzi a vektorok normanégyszetét.

Állítás: Görbe ívhossza (ill. az ívéhez tartozó sajátidő) nem függ a görbe paraméterezésétől.

Tekintsük pl. az ívhossz esetét. Térjünk át másik $s = s(t)$ paraméter használatára, ahol feltesszük (mint szokás), hogy a régi és az új paraméter kapcsolata invertálható, azaz létezik a $t = t(s)$ függvény. Ekkor $s_1 = s(t_1)$ és $s_2 = s(t_2)$ a végpontoknak megfelelő új paraméterértékek, az új érintővektorok pedig $S^a = (dt/ds)T^a$ kapcsolatban állnak a régi érintővektorokkal, úgyhogy az új ívhossz

$$\ell' = \int_{s_1}^{s_2} (g_{ab} S^a S^b)^{1/2} ds = \int_{s_1}^{s_2} (g_{ab} T^a T^b)^{1/2} \frac{dt}{ds} ds = \int_{t_1}^{t_2} (g_{ab} T^a T^b)^{1/2} dt = \ell \quad (3.5.12.)$$

meggyegyezik a régivel.

Megjegyzés: A térszerű görbe ívhossza és az időszerű görbe sajátideje olyan jellemzők, amelyek függetlenek a paraméterezéstől, továbbá függetlenek a téridő

koordináta-lefedésétől. Ezek a szóbanforgó görbék szerkezeti jellemzői, amelyekhez a mérhető térbeli távolság és az időszerű görbén, mint világvonalon utazó megfigyelő óráján mért (saját)időtartam fizikai fogalmai köthetők.

Állítás: Tegyük fel, hogy a $p \in M$ és $q \in M$ pontok térszerű (ill. időszerű) görbével összeköthetők. Az a térszerű (ill. az az időszerű) görbe, amely szélsőértékké teszi a rögzített p és q pontok közti görbeszakasz ívhosszát (ill. az ahhoz tartozó sajátidő-tartamot), a két pontot összekötő geodetikus.

Végezzük el a bizonyítást térszerű görbék esetére. Formálisan ugyanolyan feladattal állunk szemben, mint amikor a newtoni mechanikában azt kérdezzük, hogy melyik az a pálya, amelyik a hatást szélsőértékké teszi. Vezessünk be valamely ψ koordinátatérképet, hogy $\mathbb{R}^n$ -ben dolgozhassunk. A hatás szerepét ekkor az ℓ ívhossz, az L Lagrange³¹-függvény szerepét az

$$L = \left(\sum_{\mu\nu} g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{dt} \frac{dx^\nu}{dt} \right)^{1/2} \quad (3.5.13.)$$

kifejezés veszi át. A szélsőérték szükséges feltétele, hogy az ℓ ívhossz megváltozása elsőrendben tűnjön el, ha az $x^\mu(t)$ görbét rögzített végpontok között infinitesimalisan folytonosan deformáljuk valamely $x^\mu(t) + \delta x^\mu(t)$ görbébe, miközben $\delta x^\mu(t_1) = \delta x^\mu(t_2) = 0$. Az ívhossz variációja

$$\delta \ell = \int_{t_1}^{t_2} \left(\sum_{\mu,\nu} g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{dt} \frac{dx^\nu}{dt} \right)^{-1/2} \sum_{\alpha,\beta} \left[g_{\alpha\beta} \frac{dx^\alpha}{dt} \frac{d(\delta x^\beta)}{dt} + \frac{1}{2} \sum_{\kappa} \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^\kappa} \delta x^\kappa \frac{dx^\alpha}{dt} \frac{dx^\beta}{dt} \right] dt. \quad (3.5.14.)$$

Az általánosság csorbítása nélkül feltehetjük, hogy a görbét úgy parametrizáltuk, hogy

$$g_{ab} T^a T^b = 1 = \sum_{\mu,\nu} g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{dt} \frac{dx^\nu}{dt} \quad (3.5.15.)$$

legyen. Ekkor a szélsőérték szükséges feltétele, hogy

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{t_1}^{t_2} \sum_{\alpha,\beta} \left[g_{\alpha\beta} \frac{dx^\alpha}{dt} \frac{d(\delta x^\beta)}{dt} + \frac{1}{2} \sum_{\kappa} \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^\kappa} \delta x^\kappa \frac{dx^\alpha}{dt} \frac{dx^\beta}{dt} \right] dt \\ &= \int_{t_1}^{t_2} \sum_{\alpha,\beta} \left[-\frac{d}{dt} \left(g_{\alpha\beta} \frac{dx^\alpha}{dt} \right) + \frac{1}{2} \sum_{\lambda} \frac{\partial g_{\alpha\lambda}}{\partial x^\beta} \frac{dx^\alpha}{dt} \frac{dx^\lambda}{dt} \right] \delta x^\beta dt, \end{aligned} \quad (3.5.16.)$$

ahol a határon vett tagoknak a végpontok rögzítése miatti eltűnését kihasználtuk. Mivel ennek a variációnak el kell tűnnie tetszőleges $\delta x^\beta(t)$ variáció esetén, ezért a megfelelő Euler³²-Lagrange-egyenlet

$$0 = \sum_{\alpha} \left[-g_{\alpha\beta} \frac{d^2 x^\alpha}{dt^2} - \sum_{\lambda} \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^\lambda} \frac{dx^\lambda}{dt} \frac{dx^\alpha}{dt} + \frac{1}{2} \sum_{\lambda} \frac{\partial g_{\alpha\lambda}}{\partial x^\beta} \frac{dx^\alpha}{dt} \frac{dx^\lambda}{dt} \right]. \quad (3.5.17.)$$

Szorozzunk rá az egyenlet mindkét oldalára a $g^{\kappa\beta}$ inverz metrikával és kontraháljunk a β index

³¹Joseph-Louis Lagrange, olasz-francia matematikus és csillagász, 1736-1813.

³²Leonhard Euler, svájci matematikus, fizikus, csillagász és mérnök, 1707-1783.

szerint. Rendezés után

$$\begin{aligned}
\frac{d^2 x^\kappa}{dt^2} &= \sum_{\alpha, \lambda} \frac{1}{2} g^{\kappa\beta} \left[\frac{\partial g_{\alpha\lambda}}{\partial x^\beta} - 2 \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^\lambda} \right] \frac{dx^\lambda}{dt} \frac{dx^\alpha}{dt} \\
&= \frac{1}{2} g^{\kappa\beta} \left[\frac{\partial g_{\alpha\lambda}}{\partial x^\beta} - \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^\lambda} - \frac{\partial g_{\lambda\beta}}{\partial x^\alpha} \right] \frac{dx^\lambda}{dt} \frac{dx^\alpha}{dt} \\
&= - \sum_{\alpha, \lambda} \Gamma_{\alpha\lambda}^\kappa \frac{dx^\alpha}{dt} \frac{dx^\lambda}{dt}
\end{aligned} \tag{3.5.18.}$$

adódik. Ez éppen a geodetikus egyenlete.

Hasonlóan lehet bizonyítani, hogy két pontot összekötő időszerű görbék ívhosszát mérő sajátidőtartam szélsőértéket vesz fel a két pontot összekötő időszerű geodetikuson.

Megjegyzés: A fenti levezetés azt is mutatja, hogy a geodetikus egyenletét affin parametrizáció és tetszőleges koordináta-rendszer használata esetén megkaphatjuk, mint az

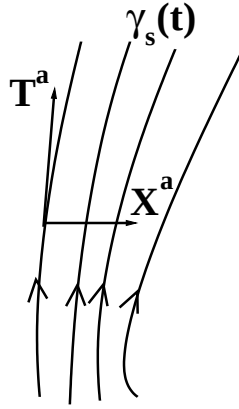
$$L = \int_{t_1}^{t_2} \sum_{\mu\nu} g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{dt} \frac{dx^\nu}{dt} \tag{3.5.19.}$$

„Lagrangre-függvényhez” tartozó Euler-Lagrange-egyenletet. A Christoffel-szimbólumok valamely koordináta-rendszerben történő meghatározásának egyik lehetséges módja, hogy a Christoffel-szimbólumokat a geodetikusok egyenletének explicit alakjából olvassuk ki.

Állítás: Riemann-metrikájú sokaság esetén bármely két pontot összekötő görbék között találhatunk tetszőlegesen nagy ívhosszút. Az ívhossz azonban alulról korlátos. Feltéve, hogy van olyan, a két pontot összekötő görbe, amelyen az ívhossz felveszi a legkisebb értékét, akkor az az ívhossz szélsőértéke, és ez a görbe geodetikus. Két pontot összekötő legrövidebb út ezért mindig az, ha geodetikus mentén, azaz „a legegyszerűsebb úton” haladunk. Ha azonban adott két pont és az őket összekötő geodetikus, akkor az nem biztos, hogy ez a legrövidebb út a két pont között. (Előfordulhat, hogy több geodetikus is összeköti ugyanazt a két pontot.)

Állítás: Legyen adott két pont Lorentz-metrikájú sokaságban, amelyek összeköthetők időszerű görbével. Ilyenkor mindig található olyan időszerű görbék, amelyeken a sajátidő-tartam tetszőlegesen kis értéket vehet fel. Vannak olyan téridő-sokaságok, amelyekben adott két pontot összekötő időszerű görbékhez tartozó sajátidő-tartamnak nincsen felső korlátja. Ha azonban létezik ilyen felső korlát, akkor a sajátidő-tartam a maximális értékét a két pontot összekötő időszerű geodetikuson veszi fel. Megint igaz azonban, hogy ha két pontot összeköt egy időszerű geodetikus, akkor nem biztos, hogy ezen a geodetikuson a két pont közötti sajátidő a sajátidő maximális értéke.

Állítás: Annak a szükséges és elégséges feltétele, hogy két pontot összekötő időszerű geodetikus legyen a maximális sajátidejű görbe, (ill. Riemann-metrika esetén, hogy két pontot összekötő geodetikus legyen a minimális ívhosszú görbe), amely a két pontot összeköti, az, hogy hiányozzanak a geodetikus mentén az úgynevezett **konjugált pontok**. Erről később fogunk beszélni.



7. ábra. Időszerű geodetikusok egy-paraméteres családja a geodetikus deviáció meghatározásához

3.5.4. A geodetikus deviáció

A geodetikus deviáció geometriailag a szomszédos geodetikusok egymáshoz képesti eltérülésének jellemzésére szolgál. Ennek közvetlen fizikai jelentést tulajdoníthatunk. Képzeljük el, hogy két részecskét engedünk el egymás közelében kezdősebesség nélkül. Ezek a részecskék szomszédos geodetikusokon kezdenek mozogni. **A geodetikus deviáció** azt jellemzi, hogy a szomszédos geodetikusokon mozgó részecskéknél mekkora az egymáshoz képesti relatív gyorsulása és hogy mekkora az ennek megfelelő ár-apály erő. A relatív gyorsulás (és az ár-apály erő) gravitációs eredetű, a téridő görbültségének köszönhetően lép fel. A geodetikus deviáció, ami ezt a jelenséget leírja, egyúttal a téridő görbültségének egy másik jellemzője.

Tekintsük a geodetikusok egy $\gamma_s(t)$ egy-paraméteres családját, amelyben minden geodetikus $s \in \mathbb{R}$ valós paraméterrel jelöltünk meg, és t a geodetikusok affin paramétere. Legyen az $(s, t) \mapsto \gamma_s(t)$ leképezés sima, kölcsönösen egyértelmű és az inverze is sima. Ekkor a $\gamma_s(t)$ geodetikus-család egy Σ 2-dimenziós részsokaságot képez. Válasszuk Σ -n az (s, t) koordinátákat. Ekkor a $T^a = (\partial/\partial t)^a$ bázisvektormező a $\gamma_s(t)$ geodetikusok érintője, az $X^a = (\partial/\partial s)^a$ bázisvektormező pedig az infinitesimalisan közeli geodetikusok egymáshoz képesti eltolódását jellemzi, ez az úgynevezett **deviáció-vektor**.

Állítás: A geodetikusok $\gamma_s(t)$ egy-paraméteres családjában a szomszédos, azaz X^a deviáció-vektorral jellemzett geodetikusok relatív gyorsulása

$$a^a = -R_{cbd}{}^a X^b T^c T^d, \quad (3.5.20.)$$

ahol T^a a geodetikusok érintővektor-mezeje.

A geodetikusok affin paraméterezésének megválasztásában mérték-szabadságunk van: az affin paraméter csak egy lineáris transzformáció, $t \rightarrow t' = a(s)t + b(s)$ erejéig meghatározott. Az érintővektor normanégyszete, $g_{ab}T^aT^b$ egy-egy geodetikus mentén állandó. A geodetikus affin

paraméterezésében meglevő mértékszabadságot pedig felhasználjuk arra, hogy az affin paraméter alkalmas s -függő $t' = a(s)t$ ($a(0) = 1$) átskalázásával biztosítsuk, hogy az érintővektorok normanégyzete bármely s -hez tartozó geodetikuson is ugyanaz az állandó legyen. Mivel γ_s -en (annak t -paraméterű pontjában) az érintővektornak a normanégyzete

$$\begin{aligned} \sum_{\mu,\nu} g_{\mu\nu}(x_s(t))(dx_s^\mu/dt)(dx_s^\nu/dt) &= a^2(s) \sum_{\mu,\nu} g_{\mu\nu}(x_s(t'))(dx_s^\mu/dt')(dx_s^\nu/dt') \\ &\stackrel{!}{=} \sum_{\mu,\nu} g_{\mu\nu}(x_0(t'))(dx_0^\mu/dt')(dx_0^\nu/dt'), \end{aligned} \quad (3.5.21.)$$

ebből kiolvashatjuk $a(s)$ alkalmas választását.

A T^a és X^a vektormezők koordinátavektormezők Σ -n, ezért kommutálnak, $[X, T]^a = 0$, ahonnan

$$X^b \nabla_b T^a = T^b \nabla_b X^a \quad (3.5.22.)$$

adódik. Ebből viszont következik, hogy $X_a T^a = \text{áll.}$ bármely geodetikus mentén, mivel

$$T^b \nabla_b (T_a X^a) = X^a T^b \nabla_b T_a + T^b T_a \nabla_b X^a = T_a T^b \nabla_b X^a = T_a X^b \nabla_b T^a = \frac{1}{2} X^b \nabla_b (T_a T^a) = 0. \quad (3.5.23.)$$

Ezek után végezhetünk a γ_s geodetikus affin paraméterén alkalmas $t \rightarrow t' = t + b(s)$ eltolást, amivel el tudjuk érni, hogy $X_a T^a = 0$ legyen valamennyi γ_s geodetikuson. Ezzel a paraméterezéssel tehát elértük, hogy $X_a T^a = 0$ mindenhol a Σ részsokaságon. A $t = \text{const.}$ görbék ekkor merőlegesen metszik az összes γ_s geodetikust.

Azt, hogy két szomszédos, azaz az X^a deviációs vektorral jellemzett geodetikus egymáshoz képesti eltolódása milyen ütemben változik a geodetikusok mentén, a

$$v^a = T^b \nabla_b X^a \quad (3.5.24.)$$

relatív sebesség jellemzi. (Időszerű geodetikus-sereg esetén úgy gondolhatjuk, hogy ez a szomszédos geodetikusok $t = 0$ paraméterű pontjaiban elengedett és azok mentén szabadon eső részecskék relatív sebessége.) Hasonlóan az

$$a^a = T^c \nabla_c v^a = T^c \nabla_c (T^b \nabla_b X^a) \quad (3.5.25.)$$

vektort a szomszédos geodetikusok **relatív gyorsulásának** nevezhetjük.

Végül megmutathatjuk, hogy a szomszédos geodetikusok relatív gyorsulása a (3.5.20.) egyenlőségnek tesz eleget:

$$\begin{aligned} a^a &= T^c \nabla_c (T^b \nabla_b X^a) = T^c \nabla_c (X^b \nabla_b T^a) \\ &= T^c (\nabla_c X^b) \nabla_b T^a + T^c X^b \nabla_c \nabla_b T^a \\ &= X^c (\nabla_c T^b) \nabla_b T^a + X^b T^c \nabla_b \nabla_c T^a - X^b R_{cbd}{}^a T^c T^d \\ &= X^c (\nabla_c T^b) \nabla_b T^a + X^c T^b \nabla_c \nabla_b T^a - X^b R_{cbd}{}^a T^c T^d \\ &= X^c \nabla_c (T^b \nabla_b T^a) - R_{cbd}{}^a X^b T^c T^d \\ &= -R_{cbd}{}^a X^b T^c T^d, \end{aligned} \quad (3.5.26.)$$

ahol az első egyenlőség annak a következménye, hogy T^a és X^a , mint koordináta-bázisvektorok kommutálnak; a második egyenlőség a Leibnitz-szabály alkalmazása révén adódik; a harmadik egyenlőség első tagjában ismét felhasználtuk, hogy X^a és T^a kommutálnak, valamint, hogy

$$[\nabla_c, \nabla_b] T^a = -R_{cbd}{}^a T^d; \quad (3.5.27.)$$

a negyedik egyenlőség második tagjában felcseréltük a b és c összegző indexeket; az ötödik egyenlőség a Leibnitz-szabály értelmében áll fenn; végül a hatodik egyenlőségben felhasználtuk, hogy a geodetikus érintői egymás párhuzamos eltoltjai.

A geodetikus deviáció (3.5.20.) egyenlete kifejezi, hogy bármely geodetikus-családot jellemző relatív gyorsulás akkor és csak akkor zérus, ha a görbületi tenzor zérus; $R_{abc}{}^d = 0$. Ezért bizonyos szomszédos geodetikusok gyorsulva közelednek egymáshoz vagy távolodnak egymástól akkor és csak akkor, ha a sokaság görbült, azaz $R_{abc}{}^d \neq 0$. Ez azt is jelenti, hogy kezdetben párhuzamos szomszédos geodetikusok, azaz olyanok, amelyek relatív sebessége kezdetben $T^b \nabla_b X^a = 0$, akkor és csak akkor szűnnek meg párhuzamosak lenni, ha a sokaság görbült.

3.6. A görbületi tenzor meghatározása

Az Einstein-egyenletek explicit alakjának felírásához szükségünk lesz arra, hogy a görbületi tenzort kifejezzük a metrikával. Erre többféle módszer használatos.

3.6.1. A koordináta-komponensek módszere

Az a legkézenfekvőbb, – bár sokszor meglehetősen hosszadalmas számolást igénylő – módszer, amikor valamilyen koordinátarendszert választunk és abban meghatározzuk a görbületi tenzor $R_{\mu\nu\kappa}{}^\lambda$ koordináta-komponenseinek kifejezését a metrika és deriváltjainak komponensei segítségével. Induljunk ki a görbületi tenzor bevezetése során használt

$$[\nabla_a, \nabla_b]\omega_c = R_{abc}{}^d \omega_d \quad (3.6.28.)$$

összefüggésből, ahol ω_a tetszőleges duális vektormező, ∇_a pedig a g_{ab} metrika által indukált kovariáns deriváló operátor. Duális vektormező kovariáns deriváltja

$$\nabla_b \omega_c = \partial_b \omega_c - \Gamma_{bc}^d \omega_d, \quad (3.6.29.)$$

és általában a $(0, 2)$ -tenzor kovariáns deriváltja

$$\nabla_a T_{bc} = \partial_a T_{bc} - \Gamma_{ab}^d T_{dc} - \Gamma_{ac}^d T_{bd}, \quad (3.6.30.)$$

úgyhogy

$$\nabla_a \nabla_b \omega_c = \partial_a (\partial_b \omega_c - \Gamma_{bc}^d \omega_d) - \Gamma_{ab}^d (\partial_d \omega_c - \Gamma_{dc}^e \omega_e) - \Gamma_{ac}^d (\partial_b \omega_d - \Gamma_{bd}^e \omega_e). \quad (3.6.31.)$$

Ezt felhasználva kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}
R_{abc}^d \omega_d &= [\nabla_a, \nabla_b] \omega_c \\
&= -2\partial_{[a} \Gamma_{b]c}^d \omega_d - 2\Gamma_{[b|c|}^d \partial_{a]} \omega_d - (\Gamma_{ab}^d - \Gamma_{ba}^d) \partial_d \omega_c - 2\Gamma_{[a|c|}^d \partial_{b]} \omega_d \\
&\quad + 2(\Gamma_{[ab]}^d \Gamma_{dc}^e + \Gamma_{[a|c|}^d \Gamma_{b]d}^e) \omega_e \\
&= \left(-2\partial_{[a} \Gamma_{b]c}^d + 2\Gamma_{c[a}^e \Gamma_{b]e}^d \right) \omega_d,
\end{aligned} \tag{3.6.32.}$$

ahol felhasználtuk, hogy a Christoffel-szimbólumok kovariáns indexeikben szimmetrikusak, $\Gamma_{ab}^d = \Gamma_{ba}^d$. Mivel az azonosság tetszőleges ω_d duális vektormező esetén fennáll, a görbületi tenzor koordináta-komponenseire az adódik, hogy

$$R_{\mu\nu\kappa}^{\lambda} = \frac{\partial \Gamma_{\mu\kappa}^{\lambda}}{\partial x^{\nu}} - \frac{\partial \Gamma_{\nu\kappa}^{\lambda}}{\partial x^{\mu}} + \sum_{\rho} (\Gamma_{\kappa\mu}^{\rho} \Gamma_{\nu\rho}^{\lambda} - \Gamma_{\kappa\nu}^{\rho} \Gamma_{\mu\rho}^{\lambda}). \tag{3.6.33.}$$

Itt a Christoffel-szimbólumok a korábban ismertetett módon kifejezhetők a metrika első parciális deriváltjainak és a g^{ab} inverz-metrikának a segítségével. A görbületi tenzor lineárisan tartalmazza a metrika komponenseinek második parciális deriváltjait és bonyolult, nem lineáris módon a metrika komponenseinek első parciális deriváltjait. Ha adott koordinátarendszerben ismertek a metrika komponensei, mint a koordináták kifejezései, akkor elvileg a Christoffel-szimbólumok és a görbületi tenzor komponenseinek explicit kifejezései is kiszámíthatók.

A Ricci-tenzor komponenseit a (3.6.33.) kifejezésből kontrakcióval kapjuk:

$$\begin{aligned}
R_{\mu\kappa} &= \sum_{\nu} R_{\mu\nu\kappa}^{\nu} \\
&= \sum_{\nu} \left(\frac{\partial \Gamma_{\mu\kappa}^{\nu}}{\partial x^{\nu}} - \frac{\partial \Gamma_{\nu\kappa}^{\nu}}{\partial x^{\mu}} + \sum_{\rho} (\Gamma_{\kappa\mu}^{\rho} \Gamma_{\nu\rho}^{\nu} - \Gamma_{\kappa\nu}^{\rho} \Gamma_{\mu\rho}^{\nu}) \right) \\
&= \sum_{\nu} \frac{\partial \Gamma_{\mu\kappa}^{\nu}}{\partial x^{\nu}} - \frac{\partial (\sum_{\nu} \Gamma_{\nu\kappa}^{\nu})}{\partial x^{\mu}} + \sum_{\nu, \rho} (\Gamma_{\mu\kappa}^{\rho} \Gamma_{\nu\rho}^{\nu} - \Gamma_{\kappa\nu}^{\rho} \Gamma_{\mu\rho}^{\nu}).
\end{aligned} \tag{3.6.34.}$$

Néhány további fontos szabály, ami a koordináta-komponensekkel történő számolásokat megkönnyíti.

1. A g_{ab} metrika komponensei $(g_{\mu\nu})$ mátrixba rendezhetők. Ekkor a g^{ab} inverz-metrika $g^{\mu\nu}$ komponensei a $(g_{\mu\nu})$ mátrix inverzének az elemei. Jelöljük a $(g_{\mu\nu})$ mátrix determinánsát g -vel,

$$g = \det(g_{\mu\nu}). \tag{3.6.35.}$$

Ekkor a metrika által az M sokaságon indukált természetes térfogatelem

$$\sqrt{|g|} dx^1 \cdots dx^n. \tag{3.6.36.}$$

2. A kontrahált Γ^a_{ab} Christoffel-szimbólum koordináta-komponensei:

$$\Gamma^a_{a\mu} = \frac{1}{2g} \frac{\partial g}{\partial x^\mu} = \frac{\partial \ln \sqrt{|g|}}{\partial x^\mu}. \quad (3.6.37.)$$

A kontrahált Christoffel-szimbólum megjelenik a Ricci-tenzor kifejezésében és megjelenik bármely vektormező kovariáns divergenciájának a kifejezésében.

A kontrakció eredménye:

$$\begin{aligned} \Gamma^a_{a\mu} &= \sum_\nu \Gamma^\nu_{\nu\mu} = \frac{1}{2} \sum_{\nu,\kappa} g^{\nu\kappa} \left(\frac{\partial g_{\mu\kappa}}{\partial x^\nu} + \frac{\partial g_{\nu\kappa}}{\partial x^\mu} - \frac{\partial g_{\nu\mu}}{\partial x^\kappa} \right) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{\nu,\kappa} g^{\nu\kappa} \left(\frac{\partial g_{\mu\kappa}}{\partial x^\nu} + \frac{\partial g_{\nu\kappa}}{\partial x^\mu} - \frac{\partial g_{\kappa\mu}}{\partial x^\nu} \right) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{\nu,\kappa} g^{\nu\kappa} \frac{\partial g_{\nu\kappa}}{\partial x^\mu}. \end{aligned} \quad (3.6.38.)$$

Határozzuk meg most a g determináns dg differenciálját, ha infinitezimálisan $dg_{\mu\nu}$ -vel megváltoztatjuk a $(g_{\mu\nu})$ mátrix elemeit. Legyen a $g_{\mu\nu}$ mátrixelemhez tartozó aldetermináns $\Delta^{(\mu\nu)}$, ekkor $dg = \sum_{\mu\nu} \Delta^{(\mu\nu)} dg_{\mu\nu}$. Másrésztől tudjuk, hogy a $(g^{\mu\nu})$ mátrix a $(g_{\mu\nu})$ mátrix inverze, azaz $g^{\mu\nu} = \Delta^{(\mu\nu)}/g$, úgyhogy

$$dg = g \sum_{\mu\nu} g^{\mu\nu} dg_{\mu\nu} \quad (3.6.39.)$$

adódik. Ezt felhasználva írhatjuk, hogy

$$\Gamma^a_{a\mu} = \frac{1}{2} \sum_{\nu,\kappa} g^{\nu\kappa} \frac{\partial g_{\nu\kappa}}{\partial x^\mu} = \frac{1}{2} \frac{1}{g} \frac{\partial g}{\partial x^\mu} = \frac{\partial \ln \sqrt{|g|}}{\partial x^\mu}, \quad (3.6.40.)$$

amit bizonyítani akartunk.

3. Tetszőleges V^a vektormező kovariáns divergenciájának kifejezése:

$$\begin{aligned} \nabla_a V^a &= \partial_a V^a + \Gamma^a_{ab} V^b = \sum_\mu \frac{\partial V^\mu}{\partial x^\mu} + \sum_\mu \frac{\partial \ln \sqrt{|g|}}{\partial x^\mu} V^\mu \\ &= \frac{1}{\sqrt{|g|}} \sum_\mu \frac{\partial (\sqrt{|g|} V^\mu)}{\partial x^\mu}. \end{aligned} \quad (3.6.41.)$$

3.6.2. Tetrád-módszer

A kovariáns deriválás operátorának és a görbületi tenzornak koordinátabázisban történő meghatározása mindig közvetlenül járható út, néha azonban célszerűbb ortonormált bázisban meghatározni a tenzorok komponenseit. A koordinátabázis viszont csak lapos tér-időben Descartes-koordináták használata esetén ortogonális.

A tetrad-módszerben bevezetünk egy koordinátáktól független, ortonormált, sima $(e_\mu)^a$ vektormezőkből álló $\{(e_\mu)^a\}$ bázist, ahol a $(\mu = 1, 2, \dots, n)$ az egyes bázisvektorokat címkézik. Definíció szerint megköveteljük, hogy a bevezetett bázisvektorok eleget tegyenek az

$$(e_\mu)^a (e_\nu)_a = \eta_{\mu\nu} \quad (3.6.42.)$$

ortonormáltsági feltételnek, ahol $\eta_{\mu\nu} = \text{diag}(-1, +1, \dots, +1)$ a Minkowski-metrika. Az $n = 4$ dimenzióban az $\{(e_\mu)^a\}$ bázist **tetradnak** nevezzük, amely elnevezést más dimenzióban is szokás használni.

Állítás: Fennáll a

$$\sum_{\mu, \nu} \eta^{\mu\nu} (e_\mu)^a (e_\nu)_b = \delta^a_b \quad (3.6.43.)$$

azonosság, ahol δ^a_b a vektorok terén alkalmazott azonossági leképezés, $\eta^{\mu\nu}$ pedig $\eta_{\mu\nu}$ inverze, azaz $\eta^{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}^{-1}$.

Hattassuk a (3.6.43.) egyenlőség bal oldalán álló kifejezést a tetszőleges $(e_\sigma)^b$ vektorra, ekkor

$$\sum_{\mu, \nu} \eta^{\mu\nu} (e_\mu)^a (e_\nu)_b (e_\sigma)^b = \sum_{\mu, \nu} \eta^{\mu\nu} (e_\mu)^a \eta_{\nu\sigma} = \sum_{\mu} \delta_\sigma^\mu (e_\mu)^a = (e_\sigma)^a = \delta^a_b (e_\sigma)^b, \quad (3.6.44.)$$

ahonnan kiolvasható a (3.6.43.) azonosság.

Érdemes párhuzamot vonni a görbület koordináta-módszerrel és tetrad-módszerrel történő kiszámítása között. Koordináta-módszer esetén azt használjuk ki, hogy

- (A) a deriválás operátora a metrika által meghatározott kovariáns gradiens, $\nabla_a g_{ab} = 0$;
- (B) a deriválás operátora torziómentes (a kovariáns gradiens 5. tulajdonsága), $\nabla_a \nabla_b f = \nabla_b \nabla_a f \ \forall f \in \mathcal{F}$, aminek következtében a Christoffel-szimbólumok szimmetrikusak, $\Gamma_{\nu\sigma}^\mu = \Gamma_{\sigma\nu}^\mu$;
- (C) a Riemann-tenzor és a kovariáns gradiens kapcsolata: $[\nabla_a, \nabla_b] \omega_c = R_{abc}^d \omega_d \ \forall \omega_c \in \mathcal{T}(0, 1)$.

A tetrad-módszerben az (A) és (B) tulajdonságot más alakban fogjuk kihasználni. A Christoffel-szimbólumok helyett konnexiós 1-formákat vezetünk be.

Definíció: Az $\omega_{a\mu\nu}$ **konnexiós 1-formákat** a tetrad vektorainak segítségével az alábbi kifejezés definiálja:

$$\omega_{a\mu\nu} = (e_\mu)^b \nabla_a (e_\nu)_b, \quad \mu, \nu = 1, \dots, n. \quad (3.6.45.)$$

A konnexiós 1-formák (tetrad-bázisban vett)

$$\omega_{\kappa\mu\nu} = (e_\kappa)^a (e_\mu)^b \nabla_a (e_\nu)_b \quad (3.6.46.)$$

komponenseit **Ricci-féle rotációs együtthatóknak** nevezzük.

Állítás: A Ricci-féle rotációs együtthatók antiszimmetrikusak,

$$\omega_{\kappa\mu\nu} = -\omega_{\kappa\nu\mu}; \quad (3.6.47.)$$

antiszimmetriájuk egyenértékű az (A) követelménnyel, azaz avval, hogy a kovariáns derivált a metrika által indukált kovariáns derivált.

Induljunk ki a (3.6.42.) ortonormáltsági feltételből, és hattassuk annak mindkét oldalára a kovariáns deriválás operátorát:

$$0 = \nabla_a ((e_\mu)^b (e_\nu)_b), \quad (3.6.48.)$$

ahonnan az (A) követelményt felhasználva azt kapjuk, hogy

$$\omega_{a\mu\nu} = (e_\mu)^b \nabla_a (e_\nu)_b = -(\nabla_a (e_\mu)^b) (e_\nu)_b = -(e_\nu)^b \nabla_a (e_\mu)_b = -\omega_{a\nu\mu}. \quad (3.6.49.)$$

Fordítva is igaz, hogy ha kiindulunk a Ricci-féle rotációs együtthatók antiszimmetriájából,

$$(e_\mu)^b \nabla_a (e_\nu)_b = -(e_\nu)^b \nabla_a (e_\mu)_b, \quad (3.6.50.)$$

és felhasználjuk a tetrad-bázis ortonormáltságát, amiből

$$\begin{aligned} (e_\mu)^b \nabla_a (e_\nu)_b &= -(\nabla_a (e_\mu)^c) (e_\nu)_c = -(\nabla_a (e_\mu)_d g^{cd}) (e_\nu)_c \\ &= -(e_\nu)^d \nabla_a (e_\mu)_d + (e_\mu)_d (\nabla_a g^{cd}) (e_\nu)_c \end{aligned} \quad (3.6.51.)$$

adódik, akkor a (3.6.50.) és a (3.6.51.) jobb oldalainak összehasonlításából visszakapjuk az (A) követelményt.

Megjegyzés: Érdemes felfigyelni rá, hogy a Christoffel-szimbólumok szimmetrikussága nem az (A) , hanem a (B) követelményből következett. A tetrad-módszer előnye, hogy a szimmetrikus Christoffel-szimbólumok helyett az antiszimmetrikus Ricci-féle rotációs együtthatókkal dolgozik, mert n -dimenziós esetben $n \cdot n(n+1)/2$ darab független Christoffel-szimbólum és csak $n \cdot n(n-1)/2$ darab független Ricci-féle rotációs együttható van. Pl. $n = 4$ dimenzióban ez 40 helyett csak 24 független együttható meghatározásának szükségességét jelenti.

A módszer következő lépéseként a Riemann-tenzort ki kell fejezni a Ricci-féle rotációs együtthatók segítségével:

$$R_{\rho\sigma\mu\nu} = (e_\rho)^a \nabla_a \omega_{\sigma\mu\nu} - \sum_{\alpha,\beta} \eta^{\alpha\beta} [\omega_{\rho\mu\beta} \omega_{\sigma\alpha\nu} + \omega_{\rho\beta\sigma} \omega_{\alpha\mu\nu} - (\rho \Leftrightarrow \sigma)]. \quad (3.6.52.)$$

Itt a kovariáns deriválás helyettesíthető közönséges deriválással, mert az $\omega_{\sigma\mu\nu}$ komponensek skalár-függvények. Ezután a Ricci-tenzor komponensei az

$$R_{\rho\mu} = \sum_{\sigma,\nu} \eta^{\sigma\nu} R_{\rho\sigma\mu\nu} \quad (3.6.53.)$$

képlettel számolhatók. A (3.6.52.) kifejezés teljes egészében megfelel a görbületi tenzor meghatározásában a (C) követelménynek, ami kiderül az alábbi levezetésből.

Felhasználva a (C) követelményt, abból indulhatunk ki, hogy a Riemann-tenzor komponensei a tetrad-bázisban,

$$R_{\rho\sigma\mu\nu} = R_{abcd}(e_\rho)^a(e_\sigma)^b(e_\mu)^c(e_\nu)^d = (e_\rho)^a(e_\sigma)^b(e_\mu)^c[\nabla_a, \nabla_b](e_\nu)_c \quad (3.6.54.)$$

alakba írhatók. Itt fellép az $(e_\mu)^c\nabla_a\nabla_b(e_\nu)_c$ kifejezés, ami a következőképpen alakítható át a (3.6.43.) azonosság segítségével:

$$\begin{aligned} (e_\mu)^c\nabla_a\nabla_b(e_\nu)_c &= \nabla_a((e_\mu)^c\nabla_b(e_\nu)_c) - (\nabla_a(e_\mu)^c)(\nabla_b(e_\nu)_c) \\ &= \nabla_a((e_\mu)^c\nabla_b(e_\nu)_c) - (\nabla_a(e_\mu)^f)\delta_f^c(\nabla_b(e_\nu)_c) \\ &= \nabla_a((e_\mu)^c\nabla_b(e_\nu)_c) - \sum_{\alpha,\beta} \eta^{\alpha\beta}(\nabla_a(e_\mu)^f)(e_\alpha)^c(e_\beta)_f(\nabla_b(e_\nu)_c). \end{aligned} \quad (3.6.55.)$$

Hasonlóképpen írható, hogy

$$(e_\mu)^c\nabla_b\nabla_a(e_\nu)_c = \nabla_b((e_\mu)^c\nabla_a(e_\nu)_c) - \sum_{\alpha,\beta} \eta^{\alpha\beta}(\nabla_b(e_\mu)^f)(e_\alpha)^c(e_\beta)_f(\nabla_a(e_\nu)_c). \quad (3.6.56.)$$

Ezeknek az összefüggéseknek a segítségével kapjuk a Riemann-tenzor komponenseinek alábbi kifejezését:

$$R_{\rho\sigma\mu\nu} = (e_\rho)^a(e_\sigma)^b[\nabla_a\omega_{b\mu\nu} - \nabla_b\omega_{a\mu\nu} - \sum_{\alpha,\beta} \eta^{\alpha\beta}(\omega_{a\beta\mu}\omega_{b\alpha\nu} - \omega_{b\beta\mu}\omega_{a\alpha\nu})]. \quad (3.6.57.)$$

Fejezzük ki a jobboldali első tagot a Ricci-féle rotációs együtthatókkal:

$$\begin{aligned} (e_\rho)^a(e_\sigma)^b\nabla_a\omega_{b\mu\nu} &= (e_\rho)^a\nabla_a((e_\sigma)^b\omega_{b\mu\nu}) - (e_\rho)^a(\nabla_a(e_\sigma)^b)\omega_{b\mu\nu} \\ &= (e_\rho)^a\nabla_a((e_\sigma)^b\omega_{b\mu\nu}) - (e_\rho)^a\delta_c^b(\nabla_a(e_\sigma)^c)\omega_{b\mu\nu} \\ &= (e_\rho)^a\nabla_a((e_\sigma)^b\omega_{b\mu\nu}) - \sum_{\alpha,\beta} (e_\rho)^a(e_\alpha)^b(e_\beta)_c(\nabla_a(e_\sigma)^c)\omega_{b\mu\nu} \\ &= (e_\rho)^a\nabla_a((e_\sigma)^b\omega_{b\mu\nu}) - \sum_{\alpha,\beta} (e_\rho)^a(e_\alpha)^b\omega_{a\beta\sigma}\omega_{b\mu\nu} \\ &= (e_\rho)^a\nabla_a((e_\sigma)^b\omega_{b\mu\nu}) - \omega_{\rho\beta\sigma}\omega_{\alpha\mu\nu}. \end{aligned} \quad (3.6.58.)$$

A (3.6.57.) egyenlőség jobb oldalán a második tagot hasonlóképpen alakíthatjuk át; az eredmény a (3.6.58.) kifejezésből $\rho \Leftrightarrow \sigma$ cserével kapható meg. Ezeket visszahelyettesítve a (3.6.57.) egyenlet jobb oldalába, megkapjuk a (3.6.52.) kifejezést.

A tetrad-módszer eddig ismertett lépéseiben kihasználtuk az (A) és (C) követelményeket a Riemann-tenzor meghatározása során. Hátra van még, hogy biztosítsuk a módszerben a kovariáns derivált torziómentességét, a (B) követelményt. Erre két lehetőség is van.

1. A torziómentesség teszi lehetővé, hogy vektorok kommutátorát

$$[v, w]^b = v^a\nabla_a w^b - w^a\nabla_a v^b \quad (3.6.59.)$$

alakban fejezhessük ki. Másrészt, ha ez az összefüggés bármely két vektormezőre teljesül egy bázisban, akkor a kovariáns deriválás operátora torziómentes. Ezért a torziómentességet a tetrad-bázisban szereplő vektormezők kommutátoraira írhattuk

$$\begin{aligned} (e_\sigma)_a [e_\mu, e_\nu]^a &= (e_\sigma)_a ((e_\mu)^b \nabla_b (e_\nu)^a - (e_\nu)^b \nabla_b (e_\mu)^a) = (e_\mu)^b \omega_{b\sigma\nu} - (e_\nu)^b \omega_{b\sigma\mu} \\ &= \omega_{\mu\sigma\nu} - \omega_{\nu\sigma\mu} \end{aligned} \quad (3.6.60.)$$

feltételekkel biztosíthatjuk. Ezek $n^2(n-1)/2$ darab egyenletet jelentenek a Ricci-féle rotációs együtthatók meghatározására.

2. Meg lehet mutatni (ld. [1]), hogy annak a szükséges és elégséges feltétele, hogy a kovariáns deriválás operátora torziómentes legyen, az, hogy a tetrad-bázisban szereplő minden vektormező tegyen eleget a

$$\partial_{[a}(e_{\sigma)}_{b]} = \sum_{\mu,\nu} \eta^{\mu\nu} (e_\mu)_{[a} \omega_{b]\sigma\nu} \quad (3.6.61.)$$

feltételnek.

Megjegyzés: A (3.6.52.) és a (3.6.61.) összefüggések differenciál-formák nyelvén jól áttekinthető alakot öltenek. A duális vektor indexének elhagyásával vezessük be a bázis-egyformákra az e_μ , a konnexiós 1-formákra az $\omega_{\mu\nu}$ jelölést, a görög indexek fel- és lehúzására használjuk rendre $\eta^{\alpha\beta}$ -t és $\eta_{\alpha\beta}$ -t, úgyhogy pl. $\omega_\nu^\mu = \sum_\sigma \eta^{\mu\sigma} \omega_{\nu\sigma}$. Jelöljük továbbá az $R_{ab\mu\nu}$ 2-formákat $\mathbf{R}_{\mu\nu}$ -vel. Ekkor a (3.6.61.) egyenlőség

$$de_\sigma = e_\mu \wedge \omega_\sigma^\mu \quad (3.6.62.)$$

alakot ölt, a (3.6.52.) egyenlőség pedig

$$\mathbf{R}_\mu^\nu = d\omega_\mu^\nu + \sum_\alpha \omega_\mu^\alpha \wedge \omega_\alpha^\nu \quad (3.6.63.)$$

alakba írható át. A (3.6.62.) és (3.6.63.) egyenleteket **szerkezeti egyenleteknek** szokás nevezni.

A torziómentesség biztosításának különböző módja miatt kétféle utat járhatunk, ha meg akarjuk határozni ortonormált bázisban, azaz tetrad-módszerrel a görbületi tenzort.

1. Az egyik eljárás az, hogy a (3.6.60.) felcserélési relációkat megoldjuk a Ricci-féle rotációs együtthatókra, majd azokat behelyettesítjük (3.6.52.) kifejezésébe.

2. A másik eljárás során a (3.6.62.) (ill. a vele azonos (3.6.61.)) egyenletből határozzuk meg a konnexiós egy-formákat, majd ezeket helyettesítjük be a (3.6.63.) (ill. a vele azonos (3.6.52.)) összefüggésbe. Ennek az eljárásnak az az előnye, hogy a (3.6.62.) egyenlet bal oldalát viszonylag egyszerű kiszámolni, és egyszerű esetekben ki lehet találni, hogy mi a megoldás a konnexiós egy-formákra.

A tetrad-módszerrel történő számolás során végül ismét be kell vezessünk koordinátarendszert. A módszer célja nem az, hogy ezt elkerüljük, hanem inkább az, hogy a tenzorokat a koordinátabázisnál kényelmesebb bázisban fejtsük ki.

Megjegyzés: A jelen tananyag a gravitációs mezőt a metrikus tenzorral írja le. Az általános relativitáselméletet azonban úgy is fel lehet építeni, hogy a tetrad-bázist használjuk a gravitációs mező leírására.

FÜGGELÉK

A. Topológikus terek

A.1. Topológia

Definíció: Topológikus tér, $(X, \mathcal{T})$: Legyen X halmaz és $\mathcal{T}$ az X részhalmazainak olyan együttese, hogy

1. a $\mathcal{T}$ -ben található részhalmazok bármely együttesének uniója benne van $\mathcal{T}$ -ben, azaz ha $O_\alpha \in \mathcal{T} \forall \alpha$, akkor $\cup_\alpha O_\alpha \in \mathcal{T}$, ahol $O_\alpha \subseteq X \forall \alpha$;
2. $\mathcal{T}$ -ből vett bármely véges sok részhalmaz metszete is $\mathcal{T}$ -ben van, azaz ha $O_1, O_2, \dots, O_n \in \mathcal{T}$, akkor $\cap_{i=1}^n O_i \in \mathcal{T}$;
3. X és $\emptyset$ is eleme $\mathcal{T}$ -nek.

Ekkor azt mondjuk, hogy $\mathcal{T}$ topológiát értelmeztünk az X halmazon, és X -nek $\mathcal{T}$ -ben szereplő részhalmazait **nyílt halmazoknak** nevezzük.

Állítás: Bármely X halmaz topológikus térré tehető. Erre a legegyszerűbb példák:

1. **Diszkrét topológia:** amikor $\mathcal{T} = \{X \text{ összes részhalmazai}\}$;
2. **Indiszkrét topológia:** amikor $\mathcal{T} = \{X, \emptyset\}$.

Példa: Valós számok halmaza standard topológiával: $X = \mathbb{R}$ és $\mathcal{T}$ tartalmazza $\mathbb{R}$ összes olyan részhalmazát, amelyek előállnak (a, b) nyílt halmazok uniójaként. Ekkor a nyílt intervallumok egyúttal nyílt halmazok, ami indokolja, hogy általában bármely topológikus tér esetén $\mathcal{T}$ elemeit nyílt halmazoknak nevezzük.

Példa: Metrikus tér standard topológiával: Legyen X tetszőleges metrikus tér és $\mathcal{T}$ az X összes olyan részhalmazainak együttese, amelyek előállíthatók nyílt gömbök unióiként.

Definíció: Indukált topológia: Legyen $(X, \mathcal{T})$ topológikus tér és $A \subset X$. Ekkor az A részhalmaz topológikus térré tehető azáltal, hogy definiáljuk az $\mathcal{S}$ indukált topológiát, ahol $\mathcal{S} = \{A\text{-nak az összes olyan részhalmaza, amely kifejezhető, mint } A\text{-nak és } \mathcal{T} \text{ elemeinek a metszete}\}$, azaz $\mathcal{S} = \{U \mid U = A \cap O, \forall O \in \mathcal{T}\}$.

Definíció: Szorzattopológia: Legyenek $(X_1, \mathcal{T}_1)$ és $(X_2, \mathcal{T}_2)$ topológikus terek. Ekkor az $X_1 \times X_2 = \{(x_1, x_2) \mid x_1 \in X_1, x_2 \in X_2\}$ topológikus térré tehető, $(X_1 \times X_2, \mathcal{T})$, ahol $\mathcal{T}$ az $X_1 \times X_2$ összes olyan részhalmazait tartalmazza, amelyek $O_1 \times O_2$ alakú halmazok unióiként állíthatók elő, ahol $O_1 \in \mathcal{T}_1$ és $O_2 \in \mathcal{T}_2$.

Példa: A szorzattopológia segítségével tudunk az $\mathbb{R}$ -n értelmezett standard topológiából $\mathbb{R}^n$ -en topológiát értelmezni. Az utóbbi pontosan megegyezik az $\mathbb{R}^n$ -en értelmezett standard topológiával, amelyet közvetlenül is definiálhatunk úgy, hogy $\mathcal{T}$ az összes olyan részhalmazok együttese, amelyek előállíthatók nyílt gömbök unióiként.

A.2. Leképezések

Definíció: Folytonos leképezés: Legyenek $(X, \mathcal{T})$ és $(Y, \mathcal{S})$ topológikus terek. Az $f : X \mapsto Y$ leképezést folytonosnak nevezzük akkor és csak akkor, ha bármely $O \subset Y$ nyílt részhalmaz inverz képe, $f^{-1}[O] = \{x \in X \mid f(x) \in O\}$ nyílt halmaz X -ben, vagyis ha $O \in \mathcal{S}$, akkor $f^{-1}[O] \in \mathcal{T}$.

Ha $\mathbb{R}$ -et standard topológiával látjuk el és $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$, akkor a folytonosság fenti definíciója pontosan megegyezik a folytonosság szokásos $\epsilon - \delta$ -s definíciójával.

Definíció: Az $f : X \mapsto Y$ leképezést **homeomorfizmusnak** nevezzük, akkor és csak akkor, ha f folytonos, kölcsönösen egyértelmű, „-ra történő” leképezés és f^{-1} is folytonos. Ekkor az $(X, \mathcal{T})$ és az $(Y, \mathcal{S})$ topológikus tereket **homeomorfaknak** nevezzük. Homeomorf topológikus terek topológiai tulajdonságai megegyeznek.

A.3. Zártság, összefüggés, lezárás, határok

Definíció: Legyen $(X, \mathcal{T})$ topológikus tér. A $C \subset X$ részhalmaz **zárt** akkor és csak akkor, ha a komplementere $X \setminus C = \{x \in X \mid x \notin C\}$ nyílt halmaz, vagyis $X \setminus C \in \mathcal{T}$.

Példa: A valós számegetes zárt $[a, b]$ intervalluma egyúttal $\mathbb{R}$ -nek zárt részhalmaza is.

Következmény:

1. Zárt halmazok bármely együttesének metszete zárt.
2. Véges sok zárt halmaz uniója is zárt.

Lehetséges olyan részhalmaz, amely se nem zárt, se nem nyílt, mint pl. a félig nyílt $[a, b) \subset \mathbb{R}$ intervallum. Előfordulhat az is, hogy egy részhalmaz egyszerre zárt és nyílt is, mint pl. a diszkrét topológiában a részhalmazok.

Definíció: Az $(X, \mathcal{T})$ topológikus tér akkor és csak akkor **összefüggő**, ha $\mathcal{T}$ elemei között az egyedüli olyan részhalmazok, amelyek egyszerre nyíltak és zártak, az X és a $\emptyset$ üres halmaz.

Példa: $\mathbb{R}^n$ a standard topológiával összefüggő.

Definíció: Részhalmaz lezártja: Legyen $(X, \mathcal{T})$ topológikus tér és $A \subset X$. A lezártján, $\bar{A}$ -n az A -t tartalmazó összes zárt halmaz metszetét értjük.

Következmény: Az A lezártja, $\bar{A}$ zárt halmaz, amely tartalmazza A -t, $A \subseteq \bar{A}$ és $\bar{A} = A$ akkor és csak akkor, ha A zárt.

Definíció: $A \subset X$ **belseje** $\equiv \text{int}(A)$: az összes A -ban található nyílt halmaz uniója.

Következmény: $\text{int}(A)$ nyílt, $\text{int}(A) \subseteq A$ és $\text{int}(A) = A$ akkor és csak akkor, ha A nyílt.

Definíció: A **határa** $\equiv \bar{A} \setminus \text{int}(A)$: mindazon pontok halmaza, amelyek benne vannak $\bar{A}$ -ban, de nincsenek benne $\text{int}(A)$ -ban.

Definíció: Az $(X, \mathcal{T})$ topológikus tér **Hausdorff-topológiájú**³³ akkor és csak akkor, ha teljesül a következő **elválaszthatósági feltétel:** bármely két különböző $p, q \in X$ $p \neq q$ pont esetén léteznek olyan $O_p, O_q \in \mathcal{T}$ nyílt halmazok, hogy $O_p \cap O_q = \emptyset$.

Példa: $\mathbb{R}^n$ a standard topológiával Hausdorff-topológiájú.

A.4. Kompaktság

Definíció: Nyílt lefedés: Legyen $(X, \mathcal{T})$ topológikus tér, $A \subset X$. Ekkor az X nyílt halmazainak $\{O_\alpha\}$ együttesét A nyílt lefedésének nevezzük akkor és csak akkor, ha $A \subset \bigcup_\alpha O_\alpha$.

Definíció: Allefedés: az A halmaz nyílt $\{O_\alpha\}$ lefedésében szereplő olyan nyílt halmazok részegyüttese, amelyek szintén lefedik A -t. Az **allefedést végesnek** nevezzük, ha véges sok halmazt tartalmaz.

Definíció: Az $A \subset X$ részhalmaz **kompakt** akkor és csak akkor, ha bármely nyílt lefedésének van véges allefedése.

Példa: Bármely topológikus térben egyetlen pont kompakt részhalmaz.

Példa: A $(0, 1) \subset \mathbb{R}$ nyílt intervallum nem kompakt, mert pl. az $O_n = (1/n, 1)$ $n = 2, 3, \dots$ nyílt lefedése a $(0, 1)$ intervallumnak, de ez nem tartalmaz véges allefedést.

A zártság és a kompaktság kapcsolatáról fontos tételek szólnak.

A.1. tétel: Heine³⁴**-Borel**³⁵**-tétel:** Az $[a, b] \subset \mathbb{R}$ zárt intervallum kompakt az $\mathbb{R}$ -n értelmezett standard topológiában.

A.2. tétel: Legyen $(X, \mathcal{T})$ Hausdorff-topológiájú és $A \subset X$ kompakt, akkor A zárt.

A.3. tétel: Legyen $(X, \mathcal{T})$ kompakt és $A \subset X$ zárt, akkor A kompakt.

A.4 tétel: A valós számok A részhalmaza a standard topológiában akkor és csak akkor kompakt, ha A zárt és korlátos.

A folytonos leképezések megőrzik a kompaktságot:

A.5. tétel: Legyenek $(X, \mathcal{T})$ és $(Y, \mathcal{S})$ topológikus terek, legyen $(X, \mathcal{T})$ kompakt és $f : X \mapsto Y$ folytonos. Ekkor X képe is kompakt, azaz $f[X] = \{y \in Y | y = f(x)\} \subset Y$ kompakt.

A.6. tétel: Topológikus téren értelmezett folytonos valós függvény korlátos és felveszi a maximális és a minimális értékét.

A kompaktság $\mathbb{R}$ -beli, az **A.4. tételben** megfogalmazott tulajdonságai kiterjeszthetők $\mathbb{R}^n$ -re:

A.7. tétel: Tyikhonov³⁶**-tétel:** Legyenek $(X_1, \mathcal{T}_1)$ és $(X_2, \mathcal{T}_2)$ kompakt topoló-

³³Felix Hausdorff, német matematikus, 1868-1942.

³⁴Heinrich Eduard Heine, német (porosz) matematikus, 1821-1881

³⁵Félix Édouard Justin Émile Borel, francia matematikus, 1871-1956

³⁶Andrej Nyikolajevics Tikhonov, orosz és szovjet matematikus, 1906-1993

gikus terek. Ekkor $X_1 \times X_2$ is kompakt a szorzattopológiára nézve.

A.8. tétel: Az $A \subset \mathbb{R}^n$ akkor és csak akkor kompakt, ha A korlátos és zárt.

Példa: Az S^n (az n -dimenziós gömbfelület $\mathbb{R}^{n+1}$ -ben) kompakt az indukált topológiára nézve.

A.5. Konvergencia, megszámlálhatóság és kompaktság

Definíció: Az $(X, \mathcal{T})$ topológikus tér pontjainak $\{x_n\}$ **sorozata konvergál** az x ponthoz akkor és csak akkor, ha az x pont minden O nyílt környezetéhez létezik olyan N egész, hogy $x_n \in O$ minden $n > N$ esetén. Ekkor azt mondjuk, hogy x az $\{x_n\}$ sorozat **határértéke**.

A valós számok $\mathbb{R}$ halmazában a standard topológiával ez a szokásos konvergenciafogalom.

Definíció: Az $y \in X$ **torlódási pontja** az $\{x_n\}$ sorozatnak, ha y bármely nyílt környezete a sorozat végtelen sok pontját tartalmazza.

Ha $\{x_n\}$ konvergál x -hez, akkor x torlódási pont. Másrészt viszont ha y az $\{x_n\}$ torlódási pontja, akkor előfordulhat, hogy az $\{x_n\}$ sorozatnak még olyan $\{y_n\}$ részsorozata sem létezik, amelyik y -hoz konvergál.

Definíció: Az $(X, \mathcal{T})$ topológikus tér **elsődlegesen megszámlálható** akkor és csak akkor, ha bármely $p \in X$ -hez létezik a nyílt halmazok olyan $\{O_n\}$ megszámlálható együttese, hogy p bármely O nyílt környezete tartalmaz legalább egyet az $\{O_n\}$ együttesből.

Állítás: Ha $(X, \mathcal{T})$ elsődlegesen megszámlálható, akkor minden olyan $\{x_n\}$ sorozatból, amelynek y torlódási pontja, kiválasztható y -hoz konvergáló $\{y_n\}$ részsorozat.

Példa: $\mathbb{R}^n$ a standard topológiával elsődlegesen megszámlálható, de eleget tesz egy erősebb kritériumnak is: nevezetesen másodlagosan megszámlálható.

Definíció: $(X, \mathcal{T})$ topológikus tér **másodlagosan megszámlálható**, ha létezik nyílt halmazok olyan megszámlálható együttese, hogy bármely nyílt halmaz kifejezhető ezen halmazegyüttes valamely tagjainak uniójaként.

Példa: $\mathbb{R}^n$ másodlagosan is megszámlálható és a nyílt halmazok megszámlálható együttesét azok a nyílt gömbök képezik, amelyek középpontja racionális koordinátáknál van és sugaruk is racionális.

A kompaktság és a konvergencia kapcsolatát az alábbi tétel fogalmazza meg:

A.9. tétel: Bolzano-Weierstrass-tétel: Legyen $(X, \mathcal{T})$ topológikus tér, $A \subset X$. Ha A kompakt, akkor minden $\{x_n\} \subset A$ sorozatnak van A -ban torlódási pontja. Megfordítva, ha $(X, \mathcal{T})$ másodlagosan megszámlálható és minden A -beli sorozatnak van A -ban torlódási pontja, akkor A kompakt. Így, ha $(X, \mathcal{T})$ másodlagosan megszámlálható, akkor X -nek az A részhalmaza akkor és csak akkor kompakt, ha minden A -beli sorozatnak van olyan konvergens részsorozata, amely A -beli ponthoz konvergál.

A.6. Parakompaktság és parakompakt sokaságok tulajdonságai

Definíció: Lefedés finomítása: Legyen $(X, \mathcal{T})$ topológikus tér és $\{O_\alpha\}$ az X -nek nyílt lefedése. A $\{V_\beta\}$ nyílt lefedést az $\{O_\alpha\}$ lefedés finomításának nevezzük, ha bármely V_β -hoz létezik olyan O_α , hogy $V_\beta \subset O_\alpha$.

Definíció: A $\{V_\beta\}$ lefedés lokálisan véges akkor és csak akkor, ha bármely $x \in X$ pontnak van olyan W nyílt környezete, amely csak véges sok V_β -ba metsz bele, azaz amellyel csak véges sok V_β -ra teljesül, hogy $W \cap V_\beta \neq \emptyset$.

Definíció: Parakompaktság: az $(X, \mathcal{T})$ topológikus tér akkor és csak akkor parakompakt, ha X minden $\{O_\alpha\}$ nyílt lefedésének létezik lokálisan véges $\{V_\beta\}$ finomítása.

Példa: $\mathbb{R}^n$ és $\mathbb{S}^m$ és szorzataik parakompaktak.

Állítás: Legyen M parakompakt differenciálható sokaság (továbbiakban egyszerűen sokaság). Ekkor

1. M -en létezik Riemann-metrika;
2. M másodlagosan megszámlálható.

Ekkor M lefedhető olyan (ψ_i, O_i) térképek lokálisan véges, megszámlálható családjával, amelyben minden $\bar{O}_i$ kompakt. Fordítva, ha M a sokaságok minden követelményének eleget tesz, akkor az 1. vagy a 2. tulajdonság teljesülése maga után vonja, hogy M parakompakt.

A parakompakt sokaságok egyik fontos tulajdonsága, hogy létezik rajtuk egységfelbontás.

Definíció: Legyen adott az M parakompakt sokaság lokálisan véges nyílt $\{O_\alpha\}$ lefedése. Az $\{O_\alpha\}$ lefedéshez tartozó egységfelbontáson síma függvények olyan $\{f_\alpha\}$ együttesét értjük, amelyek az alábbi tulajdonságúak:

1. f_α tartója (azaz azon halmaz lezártja, amelyen $f_\alpha \neq 0$) O_α -nak részhalmaza;
2. $0 \leq f_\alpha \leq 1$;
3. $\sum_\alpha f_\alpha = 1$, ahol az összegzés véges sok tagra történik, mert M minden pontjában csak véges sok $f_\alpha \neq 0$, hiszen a sokaság lokálisan véges lefedéséből indultunk ki.

Állítás: M minden olyan lokálisan véges $\{O_\alpha\}$ nyílt lefedéséhez, amelyben minden $\bar{O}_\alpha$ kompakt, tartozik egységfelbontás. Ez azt jelenti, hogy minden parakompakt sokaságon létezik egységfelbontás.

Az egységfelbontás létezése lehetővé teszi, hogy a parakompakt sokaságokra vonatkozó lokális állításokat globálissá tegyünk:

Példa: Így bizonyítható az a fentebbi állítás, hogy parakompakt sokaságon létezik Riemann-metrika. A bizonyítás az alábbi lépésekben történik: (i) M -t lefedjük lokálisan véges (ψ_α, O_α)

koordinátatérképek olyan családjával, amelyben minden $\bar{O}_\alpha$ kompakt; (ii) minden egyes lokális környezetben definiálunk egy $(g_\alpha)_{ab}$ Riemann-metrikát; (iii) majd képezzük az egész sokaságra kiterjesztett $g_{ab} = \sum_\alpha f_\alpha (g_\alpha)_{ab}$ metrikát, ahol $\{f_\alpha\}$ az $\{O_\alpha\}$ lefedéshez tartozó egységfelbontás.

Példa: Ugyancsak az egységfelbontás segítségével definiálható az integrálás parakompakt sokaságokon.

B. Differenciál-formák

B.1. p -forma, ékszorzat és külső derivált

Definíció: Az ω teljesen antiszimmetrikus $(0, p)$ -típusú tenzort differenciális p -formának (röviden p -formának) nevezzük: $\omega_{a_1 \dots a_p} = \omega_{[a_1 \dots a_p]}$.

Következmény: Ha $\dim M = n$ és $p > n$, akkor minden p -forma azonosan zérus.

Megjegyzés: Egy p -forma és egy q -forma külső szorzata, $\omega_{a_1 \dots a_p} \mu_{b_1 \dots b_q}$ $(0, p+q)$ -típusú tenzor, de nem $(p+q)$ -forma. Két differenciál-formából $\wedge$ -szorzással, azaz ékszorzással képezhetünk $(p+q)$ -formát.

Definíció: Az ω p -forma és a μ q -forma ékszorzata az $\omega \wedge \mu$ $(p+q)$ -forma, amelyet

$$(\omega \wedge \mu)_{a_1 \dots a_p b_1 \dots b_q} = \frac{(p+q)!}{p!q!} \omega_{[a_1 \dots a_p} \mu_{b_1 \dots b_q]} \quad (\text{B.1.1.})$$

definiál.

Megjegyzés: Az ékszorzat (a) bilineáris, azaz bármely ω , α és β differenciál-formák esetén

$$\omega \wedge (\alpha + \beta) = \omega \wedge \alpha + \omega \wedge \beta, \quad (\text{B.1.2.})$$

továbbá (b) csavar-kommutatív, azaz bármely α p -forma és β q -forma esetén

$$\alpha \wedge \beta = (-1)^{pq} \beta \wedge \alpha. \quad (\text{B.1.3.})$$

Példa: Legyen $\omega \in V_p^*$ és $\mu \in V_p^*$ az n dimenziós sokaság $p \in M$ pontjában értelmezett két egy-forma. Legyen V_p az M sokaság érintőtere a p pontban. Keressük a $\omega \wedge \mu$ két-forma hatását a $(\xi, \eta) \in V_p \times V_p$ rendezett vektorpáron. A p pont környezetében bevezetjük az x^μ koordinátarendszert, és a megfelelő $\frac{\partial}{\partial x^\mu}$ és dx^μ koordináta-bázisokat rendre V_p -ben és a V_p^* duális vektortérben. Ekkor írhatjuk, hogy $\xi = \xi^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu}$, $\eta = \eta^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu}$, $\omega = \omega_\mu dx^\mu$, $\mu = \mu_\mu dx^\mu$. Az ékszorzat tehát átírható koordináta-bázisban

$$\omega \wedge \mu = \omega_\mu \mu_\nu dx^\mu \wedge dx^\nu = 2\omega_{[\mu} \mu_{\nu]} dx^\mu \wedge dx^\nu \quad (\text{B.1.4.})$$

alakba, ahonnan $(\omega \wedge \mu)_{\mu\nu} = 2\omega_{[\mu} \mu_{\nu]}$. Másrészt, mivel

$$dx^\mu \wedge dx^\nu(\xi, \eta) = \xi^\mu \eta^\nu - \xi^\nu \eta^\mu, \quad (\text{B.1.5.})$$

azért

$$\begin{aligned} \omega \wedge \mu(\xi, \eta) &= 2\omega_{[\mu} \mu_{\nu]}(\xi^\mu \eta^\nu - \xi^\nu \eta^\mu) = \omega_\mu \xi^\mu \mu_\nu \eta^\nu - \omega_\mu \eta^\mu \mu_\nu \xi^\nu \\ &= \omega(\xi) \mu(\eta) - \omega(\eta) \mu(\xi). \end{aligned} \quad (\text{B.1.6.})$$

Definíció: Az ω p -forma külső deriváltjának azt a $d\omega$ $(p+1)$ -formát nevezzük, amelyet

$$(d\omega)_{a_1 \dots a_p b} = (p+1) \nabla_{[b} \omega_{a_1 \dots a_p]} \quad (\text{B.1.7.})$$

definiál. Ezt formálisan írhatjuk $d\omega = \nabla \wedge \omega$ alakba is, mintha a deriválás operátora is egy-forma lenne.

Megjegyzés: Fontos tudatosítani, hogy a deriválás eredménye nem függ attól, hogy ∇_b melyik deriváló operátor (akár a közönséges parciális deriválás operátora is lehet). Ez azért van így, mert a külső derivált komponenseinek valamely koordináta-bázisban történő tényleges kiszámításakor a deriválást a p -forma komponensein, mint a koordináták függvényein kell elvégezni.

Példa: Legyen ω egy-forma, akkor $(d\omega)_{ab} = 2\nabla_{[b}\omega_{a]}$, amelynek komponensei a lokális koordináta-bázisban $(d\omega)_{\mu\nu} = \nabla_\nu\omega_\mu(x) - \nabla_\mu\omega_\nu(x) = \partial_\nu\omega_\mu - \partial_\mu\omega_\nu$, úgyhogy - korábbi jelöléseinket használva - kapjuk, hogy $d\omega(\xi, \eta) = (\partial_\nu\omega_\mu - \partial_\mu\omega_\nu)\xi^\mu\eta^\nu$.

Állítás: Poincaré-lemma: Bármely ω p -forma esetén

$$d^2\omega = 0. \quad (\text{B.1.8.})$$

Ez azért van így, mert a második parciális deriváltakban felcserélhető a deriválások sorrendje, úgyhogy

$$(d^2\omega)_{bca_1\dots a_p} = (p+2)(p+1)\partial_{[b}\partial_c\omega_{a_1\dots a_p]} = 0. \quad (\text{B.1.9.})$$

Állítás: A Poincaré-lemma megfordítása: Legyen α p -forma, amelyre $d\alpha = 0$. Ekkor lokálisan mindig létezik olyan β $(p-1)$ -forma, amelynek α a deriváltja, azaz amelyre $\alpha = d\beta$. Ez általában globálisan nem igaz.

B.2. Integrálás

Az n -dimenziós M sokaságon az n -formák lineáris tere 1-dimenziós. Ez azt jelenti, hogy függvény-szorozótól eltekintve egyetlen n -forma létezik.

Definíció: Az M sokaságot **irányíthatónak** nevezzük, ha létezik olyan ϵ n -forma, a **sokaság orientációja**, amely folytonos és sehol sem tűnik el M -en: $\epsilon_{[a_1\dots a_n]}$. Az ϵ és az ϵ' irányítás ekvivalens, ha létezik olyan $f > 0$ függvény, hogy $\epsilon = f\epsilon'$.

Minden irányítható sokaságon két inekvivalens orientáció létezik, az egyiket jobbkezesnek, a másikat balkezesnek nevezik. Minden egyszeresen összefüggő sokaság irányítható.

Példa: $\mathbb{R}^n$ és az $(m+1)$ -dimenziós $\mathbb{R}^{m+1}$ -be ágyazott m -dimenziós S^m gömbfelület irányítható sokaságok.

A továbbiakban a **folytonos α n -formamező integrálját értelmezzük az n -dimenziós, irányítható M sokaságon**. Először értelmezzük az integrált egy $U \subset M$ nyílt halmazon, majd parakompakt sokaságok esetén az integrál lokális definícióját kiterjesztjük az egységfelbontás segítségével az egész sokaságra. Ezt követően pedig az n -dimenziós M sokaságon értelmezett p -formák integrálját fogjuk definiálni „jó viselkedésű” p -dimenziós részsokaságokon.

Legyen ϵ a sokaság orientációja.

1. Legyen $U \subset M$ egyetlen ψ koordinátarendszerrel lefedett nyílt halmaz, és legyen ebben a koordinátabázisban

$$\epsilon = h d\mathbf{x}^1 \wedge \dots \wedge d\mathbf{x}^n, \text{ ill. } \epsilon_{a_1 \dots a_n} = n! h(x^1, \dots, x^n) (dx^1)_{[a_1} \dots (dx^n)_{a_n]}, \quad (\text{B.2.1.})$$

ahol h el nem tűnő függvény U -n. Megállapodás szerint, aszerint, hogy $h > 0$, ill. $h < 0$ rendre **jobb-**, ill. **balsodrású koordinátarendszerről** beszélünk. Bármely α n -forma kifejezhető a ψ koordinátabázis szerint,

$$\alpha = a(x^1, \dots, x^n) d\mathbf{x}^1 \wedge \dots \wedge d\mathbf{x}^n. \quad (\text{B.2.2.})$$

Ha ψ jobbsodrású, akkor **az α n -forma $U \subset M$ nyílt halmazon vett integráljának** definíciója:

Definíció:

$$\int_U \alpha = \int_{\psi[U]} a(x^1, \dots, x^n) dx^1 \dots dx^n, \quad (\text{B.2.3.})$$

ahol $\psi[U]$ az $U \subset M$ nyílt halmaz képe $\mathbb{R}^n$ -ben, és a jobb oldalon álló integrál szokásos Riemann-integrál (v. Lebesgue³⁷-integrál).

Állítás: Az így értelmezett integrál független a koordinátarendszer megválasztásától.

Megjegyzés: Tegyük fel, hogy az M sokaságot $\bar{u} = (u^1, \dots, u^n)$ paraméterekkel parametrizáltuk, azaz $\bar{x}(\bar{u}) = (x^1(\bar{u}), \dots, x^n(\bar{u}))$, akkor az integrál

$$\int_U \alpha = \int_D a(\bar{x}(\bar{u})) \frac{\partial(x^1, \dots, x^n)}{\partial(u^1, \dots, u^n)} du^1 \dots du^n, \quad (\text{B.2.4.})$$

ahol D a $\psi[U]$ tartománynak megfelelő értelmezési tartomány a paraméter-térben.

2. Legyen az M sokaság parakompakt. Ekkor a sokaságnak létezik lokálisan véges $\{O_i\}$ lefedése, azaz minden pontja lefedhető véges sok olyan O_i nyílt halmazzal és rajtuk értelmezett ψ_i lokális térképekkel, hogy minden O_i -nek az $\bar{O}_i$ lezártja kompakt. Ekkor pedig létezik az $\{O_i\}$ lefedéshez tartozó $\{f_i\}$ egységfelbontás.

Definíció: Ha a

$$\sum_i \int_{\psi_i[O_i]} f_i |a_i|^2 dx^1 \dots dx^n < \infty \quad (\text{B.2.5.})$$

integrál véges, akkor **az α n -formát az M parakompakt sokaságon integrálhatónak nevezzük és integrálját az**

$$\int_M \alpha = \sum_i \int_{O_i} f_i \alpha = \sum_i \int_{\psi_i[O_i]} f_i a_i(x^1, \dots, x^n) dx^1 \dots dx^n \quad (\text{B.2.6.})$$

összefüggéssel értelmezzük, ahol a második egyenlőség az integrál nyílt halmazon történő lokális definíciójából következik.

Megjegyzés: Meg lehet mutatni, hogy az így bevezetett integrál-fogalom független az $\{O_i\}$ lefedéstől és a hozzárendelt egységfelbontástól.

³⁷Henri Léon Lebesgue, francia matematikus, 1875-1941.

3. A fentieket felhasználhatjuk arra, hogy értelmezzük az n -dimenziós M parakompakt sokaságon adott p -forma ($p < n$) integrálját M valamely „jó viselkedésű” p -dimenziós felületén.

Definíció: Legyen S p -dimenziós sokaság, ahol $p < n$. Ha létezik olyan $\phi : S \mapsto M$ C^∞ -típusú, lokálisan kölcsönösen egyértelmű leképezés, amelynek a $\phi^{-1} : \phi[O] \mapsto S$ inverze is C^∞ , akkor azt mondjuk, hogy $\phi[S]$ **az M -be süllyesztett részsokaság**. Itt a ϕ **leképezés lokális kölcsönös egyértelműsége** azt jelenti, hogy minden $q \in S$ ponthoz létezik olyan nyílt $O \subset S$ környezet, hogy ϕ az O környezeten kölcsönösen egyértelmű. Ha az előbbi feltételek úgy teljesülnek, hogy ϕ globálisan is kölcsönösen egyértelmű, akkor azt mondjuk, hogy **a $\phi[S]$ -et az M -be beágyazott részsokaságnak** nevezzük. (A ϕ leképezés kölcsönös egyértelműségének globalitása biztosítja, hogy a $\phi[S]$ képhalmaz „nem metsz önmagába”.)

A továbbiakban „**jó viselkedésű felületen**” M -be beágyazott részsokaságot **értünk**. Az n -dimenziós M sokaságba beágyazott $(n - 1)$ -dimenziós részsokaságot **hiperfelületnek** nevezzük.

A beágyazás automatikusan generál egy természetes sokaság-szerkezetet $\phi[S]$ -en. Ezért minden $q \in \phi[S]$ pontban létezik $\phi[S]$ -nek a W_q érintőtere, ami azonosítható az M sokaság ugyanezen q pontban vett V_q érintőterének egy p -dimenziós alterével. Ennek következtében, az M -en adott bármely β p -forma generál egy $\tilde{\beta}$ p -formát $\phi[S]$ -en azáltal, hogy β értelmezési tartományát $\underbrace{V_q \times \dots \times V_q}_{p\text{-szer}}$ -ról $\underbrace{W_q \times \dots \times W_q}_{p\text{-szer}}$ -ra

korlátozzuk. Ezt figyelembe véve β integrálját a $\phi[S]$ beágyazott sokaságon úgy értelmezzük, mint $\tilde{\beta}$ integrálját $\phi[S]$ -en:

$$\int_{\phi[S]} \beta = \int_{\phi[S]} \tilde{\beta}. \quad (\text{B.2.7.})$$

Ezzel visszavezettük az integrál-fogalmat a már előzőleg bevezetett „ n -forma integrálja n -dimenziós sokaságon” fogalmára.

Megjegyzés: Az M n -dimenziós sokaságon értelmezett β p -formát ($p < n$) koordináta-bázisban felírhatjuk

$$\beta = \sum_{i_1 < \dots < i_p} \beta_{i_1, \dots, i_p}(x^1, \dots, x^n) dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_p} \quad (\text{B.2.8.})$$

alakban, ahol $\beta_{i_1, \dots, i_p}(x^1, \dots, x^n)$ valós függvények.

B.3. Integráltételek

B.3.1. Irányítható sokaságok és a Stokes-tétel

A differenciálformák integráljaira vonatkozó tételek megfogalmazásához szükségünk lesz a határral rendelkező irányítható sokaság fogalmára.

Definíció: Az n -dimenziós, határral rendelkező N sokaság simán van összevarrva olyan lokális tartományokból, amelyek olyanok, mint $\mathbb{R}^n$ „felének”, azaz $\mathbb{R}^n$ $x^1 \leq 0$ részének valamely nyílt halmazai.

A beágyazott sokaság speciális esete, amikor a beágyazandó S sokaság $(n - 1)$ -dimenziós és a beágyazó leképezés olyan, hogy $\phi[S]$ az $N \subset M$ zárt tartomány $(n - 1)$ -dimenziós határa, $\phi[S] = \mathring{N}$. Ekkor N belseje, $\text{int}(N) = N - \mathring{N}$ egy határok nélküli n -dimenziós sokaság. Az $\mathring{N}$ határ sokaság-szerkezetét az N lefedéséhez használt lokális térképek $x^1 = 0$ -hoz tartozó részei határozzák meg. Az $\mathring{N}$ határ egy $(n - 1)$ -dimenziós, határok nélküli sokaság.

Ha a határral rendelkező N sokaság irányítható, akkor az irányítás indukál egy irányítást az $\mathring{N}$ határon is. **Az $\mathring{N}$ határnak az N sokaság orientációja által indukált orientációját** a következőképpen kapjuk meg:

1. Tekintsük az $\mathring{N}$ -on azokat az U_i lokális koordinátarendszereket, amelyeket úgy kapunk N jobbkezes lokális koordinátarendszereiből, hogy elhagyjuk az x^1 koordinátát.
2. Az $\mathring{N}$ -ön úgy akarunk jobbkezes irányítást definiálni, hogy az 1. pont szerinti lokális térképek jobbkezesek legyenek. Ehhez
 - (a) belátjuk, hogy bármely két lokális koordinátarendszer (az egyik a vesszőtlen, a másik a vesszős) átfedési tartományában $\det(\partial x'^\mu / \partial x^\nu) > 0$;
 - (b) majd olyan (F_i, U_i) egységfelbontásokat választunk $\mathring{N}$ -ön, ahol az U_i -k az 1. pont szerinti koordinátakörnyezetek.
3. Az $\mathring{N}$ orientációjának definíciója ekkor

$$\tilde{\epsilon} = \sum_i F_i dx_i^2 \cdots dx_i^n, \quad (\text{B.3.9.})$$

amiről belátható, hogy folytonos és el nem tűnő.

B.1. tétel: Stokes-tétel: Legyen N n -dimenziós kompakt, irányítható és határral rendelkező sokaság. Legyen α az M -en értelmezett $(n - 1)$ -forma, ami C^1 . Ekkor

$$\int_{\text{int}(N)} d\alpha = \int_{\mathring{N}} \alpha, \quad (\text{B.3.10.})$$

ahol a baloldali integrált az N -en értelmezett ϵ irányítással, a jobboldali integrált pedig az ϵ által az $\mathring{N}$ határon indukált $\tilde{\epsilon}$ irányítással kell érteni.

B.3.2. Térfogati integrál

A továbbiakban bevezetjük a térfogatelem fogalmát a sokaságon, majd ennek segítségével a függvények integrálját értelmezzük. Megmutatjuk, hogy a metrika természetes módon indukál egy jobbsohdrású térfogatelemet. Végül az n -dimenziós sokaságon értelmezett $(n - 1)$ -formára vonatkozó Stokes-tétel speciális esetét átírjuk a sokaságon értelmezett vektormezőre vonatkozó Gauss-tétel alakjába.

Definíció: Az n -dimenziós sokaság ϵ **térfogatelemén** az egész sokaságon el nem tűnő, folytonos n -formát értünk. A térfogatelemet az irányítástól csupán az különbözteti

meg, hogy a térfogatelem f függvénnyel vett szorzata, $f\varepsilon$ nem egyezik meg az eredeti ε térfogatelemmel.

Definíció: Az f függvénynek az M sokaságon vett integrálja

$$\int_M f = \int_M f\varepsilon, \quad (\text{B.3.11.})$$

ahol a jobboldali integrál n -forma integrálja, ahogyan fentebb definiáltuk.

Ha csak a sokaság-struktúra adott M -en, akkor nincsen természetes módja a térfogatelem megválasztásának. Ha azonban adott a sokaságon a g_{ab} metrika is, akkor a **térfogatelem természetes módon választható** úgy, hogy kielégítse az

$$\varepsilon^{a_1 \dots a_n} \varepsilon_{a_1 \dots a_n} = (-1)^s n! \quad (\text{B.3.12.})$$

összefüggést, ahol s a metrika szignatúrájában a $-$ előjelek száma, így a Riemann- és a Lorentz-metrika esetén rendre $s = 0$ és $s = 1$.

Következmény: Ennek a választásnak az alábbi következményei vannak:

1. A térfogatelem deriváltja zérus:

$$\nabla_b \varepsilon_{a_1 \dots a_n} = 0. \quad (\text{B.3.13.})$$

Hattassuk a deriválás operátorát a (B.3.12.) egyenlet midkét oldalára, akkor

$$2\varepsilon^{a_1 \dots a_n} \nabla_b \varepsilon_{a_1 \dots a_n} = 0 \quad (\text{B.3.14.})$$

adódik, ahonnan a bizonyítani kívánt tulajdonságot kapjuk, mivel $\varepsilon^{a_1 \dots a_n}$ definíció szerint sehol sem tűnik el és $\nabla_b \varepsilon_{a_1 \dots a_n}$ pedig az $a_1, \dots, a_n$ indexekben teljesen antiszimmetrikus.

- 2.

$$\varepsilon^{a_1 \dots a_n} \varepsilon_{b_1 \dots b_n} = (-1)^s n! \delta_{b_1}^{[a_1} \dots \delta_{b_n}^{a_n]}. \quad (\text{B.3.15.})$$

Ez az azonosság abból következik, hogy az (n, n) típusú, mind a kontravariáns, mind a kovariáns indexekben teljesen antiszimmetrikus tenzorok vektortere 1-dimenziós, úgyhogy ezért azoknak az azonossági leképezés antiszimmetrizálásával kell előállniuk.

3. Ha a fenti egyenletben j darab kontra- és kovariáns indexre kontrakciót hajtunk végre, akkor az alábbi azonosság adódik:

$$\varepsilon^{a_1 \dots a_j a_{j+1} \dots a_n} \varepsilon_{a_1 \dots a_j b_{j+1} \dots b_n} = (-1)^s (n-j)! j! \delta_{b_{j+1}}^{[a_{j+1}} \dots \delta_{b_n}^{a_n]}. \quad (\text{B.3.16.})$$

4. Jobbsodrású ortonormált koordinátabázisban a térfogatelem komponensei

$$\varepsilon^{\mu_1 \dots \mu_n} = \begin{cases} (-1)^P, & \text{ha minden } \mu_i \text{ index különböző} \\ 0 & \text{egyébként} \end{cases}, \quad (\text{B.3.17.})$$

ahol $P = 0$ vagy $P = 1$, ha $(\mu_1, \dots, \mu_n)$ az $(1, 2, \dots, n)$ számsorozatnak rendre páros vagy páratlan permutációja, azaz az n -dimenziós Levi-Civita³⁸-szimbólum.

³⁸Tullio Levi-Civita, olasz matematikus, 1873-1941.

5. Bármely jobbsodrású koordinátarendszerben a természetes térfogatelem

$$\varepsilon = \sqrt{|g|} d\mathbf{x}^1 \wedge \cdots \wedge d\mathbf{x}^n. \quad (\text{B.3.18.})$$

Koordinátabázisban

$$\sum_{\mu_1 \dots \mu_n} g^{\mu_1 \nu_1} \cdots g^{\mu_n \nu_n} \varepsilon_{\mu_1 \dots \mu_n} \varepsilon_{\nu_1 \dots \nu_n} = (-1)^s n! \quad (\text{B.3.19.})$$

ahol a bal oldal azonban $(n!)(\varepsilon_{12\dots n})^2 \det(g^{\mu\nu})$ és $\det(g^{\mu\nu}) = 1/\det(g_{\mu\nu})$, úgyhogy

$$\varepsilon_{12\dots n} = [(-1)^s \det(g_{ab})]^{1/2} = \sqrt{|g|} \quad (\text{B.3.20.})$$

ahol $g = \det(g_{\mu\nu})$.

Következmény: Végül tehát írhatjuk, hogy

$$\int_{\text{int}(N)} f = \int_{\text{int}(N)} f \varepsilon = \sum_i f_i \int_{\psi_i[O_i]} f(x^1, \dots, x^n) \sqrt{|g(x^1, \dots, x^n)|} dx^1 \cdots dx^n, \quad (\text{B.3.21.})$$

ahol $\{f_i\}$ a $\{(\psi_i, O_i)\}$ lokális térképekkel történő lefedéshez tartozó egységfelbontás az N parakompakt sokaságon.

B.3.3. A Gauss-tétel

Állítás: Legyen N n -dimenziós, határokkal rendelkező, irányított kompakt sokaság. Legyen adott N -en a g_{ab} metrika és a hozzá tartozó ε térfogatelem. Legyen v^a C^1 típusú (folytonosan differenciálható) vektormező N -en. Tegyük fel továbbá, hogy N határa nem null-felület. Ekkor a Stokes-tétel átírható a **Gauss-tétel** alakjába,

$$\int_{\text{int}(N)} \nabla_a v^a = \int_{\hat{N}} n_a v^a, \quad (\text{B.3.22.})$$

ahol n^a az $\hat{N}$ határ normális egységvektora (kifelé mutató, ha n^a térszerű és befelé mutató, ha n^a időszzerű), a baloldali integrált a g_{ab} metrikához tartozó természetes ε térfogatelemmel, a jobboldalt a határon indukált $\tilde{\varepsilon}$ térfogatelemmel kell kiszámolni. Az indukált térfogatelem

$$\frac{1}{n} \varepsilon_{a_1 \dots a_n} = n_{[a_1} \tilde{\varepsilon}_{a_2 \dots a_n]} \quad (\text{B.3.23.})$$

kapcsolatban áll az $\tilde{\varepsilon}$ természetes térfogatelemmel.

Példa: Legyen $n = 3$, a metrika euklideszi szignatúrájú és a koordinátarendszer jobbsodrású, ekkor az N 3-dimenziós tartomány határán indukált $\tilde{\varepsilon}$ felületelem komponensei

$$(\tilde{\varepsilon}) = \begin{pmatrix} 0 & n^3 & -n^2 \\ -n^3 & 0 & n^1 \\ n^2 & -n^1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (\text{B.3.24.})$$

ahol n^ν a 2-dimenziós határfelület normálisa ($n_\mu = h_{\mu\nu}n^\nu$ és $h_{\mu\nu}$ a határon indukált metrika).

Valóban ekkor írhatjuk, hogy

$$\epsilon_{\mu_1\mu_2\mu_3} = n_{\mu_1}\tilde{\epsilon}_{\mu_2\mu_3} + n_{\mu_2}\tilde{\epsilon}_{\mu_3\mu_1} + n_{\mu_3}\tilde{\epsilon}_{\mu_1\mu_2}. \quad (\text{B.3.25.})$$

Legyen $(\mu_1\mu_2\mu_3)$ páros permutációja az indexeknek, akkor innen

$$1 = n_{\mu_1}\tilde{\epsilon}_{\mu_2\mu_3} + n_{\mu_2}\tilde{\epsilon}_{\mu_3\mu_1} + n_{\mu_3}\tilde{\epsilon}_{\mu_1\mu_2} \quad (\text{B.3.26.})$$

adódik, ami kielégíthető a $\tilde{\epsilon}_{23} = n^1$, $\tilde{\epsilon}_{31} = n^2$, $\tilde{\epsilon}_{12} = n^3$ választással. Mivel $\tilde{\epsilon}$ antiszimmetrikus, ezáltal az összes nem triviális komponense egyértelműen meg van határozva.

Példa: Legyen $n = 4$, a metrika Lorentz-szignatúrájú és a koordinátarendszer jobbsodrású, ekkor a 4-dimenziós tartomány térszerű vagy időszerű határán rendre $n_\mu n^\mu = +1$ vagy $n_\mu n^\mu = -1$ és akkor az előző példához hasonló megfontolással kapjuk, hogy pl.

$$\frac{1}{4} = \frac{1}{4}\epsilon_{0123} = \frac{1}{4}(n_0\tilde{\epsilon}_{123} + n_1\tilde{\epsilon}_{230} + n_2\tilde{\epsilon}_{301} + n_3\tilde{\epsilon}_{012}), \quad (\text{B.3.27.})$$

ahonnan az indukált térfogatelem el nem tűnő komponensei térszerű vagy időszerű 3-dimenziós határfelületen

$$\tilde{\epsilon}_{123} = \pm n^0, \quad \tilde{\epsilon}_{230} = \pm n^1, \quad \tilde{\epsilon}_{301} = \pm n^2, \quad \tilde{\epsilon}_{012} = \pm n^3 \quad (\text{B.3.28.})$$

rendre + vagy - előjellel.

Megjegyzés: A Gauss-tételnek létezik olyan általánosítása, amikor N határa nullfelület.

B.4. Frobenius tétele

Láttuk a vektorokról szóló fejezetben, hogy amennyiben az n -dimenziós M sokaságon értelmezve van a v^a sima, azaz C^∞ vektormező, akkor mindig létezik az 1-dimenziós beágyazott részsokaságoknak, a v^a vektormező integrálgörbéinek S családja, hogy minden $p \in S$ pontban $v^a|_p$ a p -n áthaladó integrálgörbe érintője, és ez az érintővektor természetesen kifeszít egy 1-dimenziós $W_p \subset V_p$ alteret a $p \in M$ pontban vett V_p érintőtérben. Továbbá azt is tudjuk, hogy minden $p \in M$ ponton átmegy pontosan egy ilyen integrálgörbe.

Most felteszünk egy hasonló, de általánosabb kérdést. Legyen M n -dimenziós sokaság. Tegyük fel, hogy adottak minden $x \in M$ pontban a V_x érintőtér olyan $W_x \subset V_x$ m -dimenziós alterei, ahol $m < n$, és amelyet C^∞ vektormezők feszítenek ki, ha x befutja M -et. Jelölje W ezen lokális W_x alterek együttesét. Azt mondhatjuk ekkor, hogy W **olyan W_x alterek együttese, amelyek simán változnak**, ha x befutja M -et. Azt kérdezzük, hogy **létezik-e W -hez tartozó integrális részsokaságok családja**, azaz olyan beágyazott m -dimenziós S részsokaságok családja, hogy bármely S minden $y \in S$ pontjában S érintőtere éppen W_y .

Ha W 1-dimenziós, akkor a W -hez tartozó integrális részsokaságok egy sima v^a vektormező integrálgörbéi. Ezek léteznek és ilyenkor a feltett kérdésre igenlő a válasz. Ha $\dim W > 1$, akkor nem teljesen nyilvánvaló a válasz; előfordulhat, hogy W úgy „megcsavarodik”, hogy nem létezik hozzátartozó integrális részsokaságok családja. Frobenius tétele

annak a szükséges és elégséges feltételét fogalmazza meg, hogy létezzen a W -hez tartozó integrális részsokaságok családja.

B.2. tétel: Frobenius-tétele (vektori alakban): Annak a szükséges és elégséges feltétele, hogy az $x \in M$ pontokban vett érintőterek m -dimenziós altereinek sima W együttese rendelkezzen integrális részsokaságok családjával, az, hogy bármely két $Y^a, Z^a \in W$ vektormező esetén teljesüljön az $[Y, Z]^a \in W$ feltétel.

A tétel azt jelenti, hogy ha adott az n -dimenziós M sokaságon m darab, a sokaság minden $x \in M$ pontjában lineárisan független $X_1^a, \dots, X_m^a$ sima vektormező, akkor az általuk kifeszített érintő alterek sima W összessége akkor és csak akkor integrálható, ha teljesül, hogy $[X_j, X_k] = \sum_{\ell=1}^m c_\ell^{jk}(x) X_\ell$, ahol $j, k = 1, \dots, m$ és $c_\ell^{jk}(x)$ sima függvények. Ekkor és csak ekkor létezik olyan m -dimenziós, M -be ágyazott hiperfelületek családja, amelyeknek minden p pontjában az érintőtere az adott pontban vett $X_1^a|_x, \dots, X_m^a|_x$ vektorok által kifeszített altér.

A Frobenius-tétel másik alakban, az úgynevezett duális alakban is megfogalmazható. Adott $W_x \subset V_x$ m -dimenziós alterek esetén tekinthetjük azon $\omega \in V_x^*$ 1-formákat, amelyek $\omega_a X^a = 0$ tulajdonsággal rendelkeznek bármely $X^a \in W_x$ esetén. Ezek az 1-formák $(n-m)$ -dimenziós T_x^* alteret feszítenek ki a duális térben, $T_x^* \subset V_x^*$. Megfordítva, azok az X^a vektorok, amelyek bármely $\omega_a \in T_x^*$ 1-forma esetén kielégítik az $\omega_a X^a = 0$ összefüggést, egy $W_x \subset V_x$ m -dimenziós alteret feszítenek ki a V_x érintőtérben. Ezek szerint az m -dimenziós W_x érintő alterek sima W összességéhez egyértelműen tartozik az $(n-m)$ dimenziós T_x^* duális alterek sima T^* összessége. Feltehető tehát a korábbi kérdésünk úgy is, hogy mi a szükséges és elégséges feltétele annak, hogy az 1-formák $(n-m)$ -dimenziós tereinek sima T^* összessége olyan legyen, hogy a hozzátartozó érintőterek W sima összessége rendelkezzen integrális részsokaságok családjával. A választ Frobenius tétele, pontosabban annak duális alakja adja meg.

B.3. tétel: Frobenius tétele (duális alakban): Legyen T^* az 1-formák $(n-m)$ -dimenziós altereinek sima összessége, és legyen $\{\mu^\alpha\}$ ($\alpha = 1, \dots, n-m$) azon egyformamezők, amelyek ezeket az altereket az egyes $x \in M$ pontokban kifeszítik. Ekkor a T^* elemeihez tartozó m -dimenziós érintőalterek sima W összessége akkor és csak akkor rendelkezik integrális részsokasággal, ha léteznek alkalmas ν^α 1-formák, hogy bármely $\omega \in T^*$ 1-forma deriváltja (ami 2-forma) felbontható

$$d\omega = \sum_{\alpha=1}^{n-m} \mu^\alpha \wedge \nu^\alpha \quad (\text{B.4.1.})$$

alakban.

A **B.2. tétel:** értelmében integrális részsokaságok akkor és csak akkor léteznek, ha minden $\omega_a \in T^*$ és minden $Y^a, Z^a \in W$ esetén, amelyek eleget tesznek az $\omega_a Y^a = \omega_a Z^a = 0$ feltételnek,

teljesül, hogy $\omega_a[Y, Z]^a = 0$. Ennek alapján írhatjuk, hogy

$$\begin{aligned}
0 &= \omega_a(Y^b \nabla_b Z^a - Z^b \nabla_b Y^a) \\
&= \omega_a(\nabla_b(Y^b Z^a) - Z^a \nabla_b Y^b) - \omega_a(\nabla_b(Z^b Y^a) - Y^a \nabla_b Z^b) \\
&= \omega_a(\nabla_b(Y^b Z^a) - \omega_a(\nabla_b(Z^b Y^a)) \\
&= \nabla_b(\omega_a Z^a Y^b) - Y^b Z^a \nabla_b \omega_a - \nabla_b(\omega_a Y^a Z^b) + Z^b Y^a \nabla_b \omega_a \\
&= -Y^b Z^a \nabla_b \omega_a + Z^b Y^a \nabla_b \omega_a \\
&= (Z^b Y^a - Y^b Z^a) \nabla_{[b} \omega_{a]} \\
&= +2Z^b Y^a \nabla_{[b} \omega_{a]}.
\end{aligned} \tag{B.4.2.}$$

Mivel Y -t és Z -t bármely T^* -ből vett 1-forma annihilálja, a kapott egyenlőség akkor és csak akkor állhat fenn, ha léteznek alkalmas $\nu^\alpha \in T^*(M)$ ($\alpha = 1, \dots, n-m$) 1-formák, amelyekkel a $\nabla_{[b} \omega_{a]}$ 2-forma

$$\nabla_{[b} \omega_{a]} = \sum_{\alpha=1}^{n-m} \mu_{[a}^\alpha \nu_{b]}^\alpha \tag{B.4.3.}$$

alakba írható.

Egy másik fontos kérdés, ami gyakran előfordul az alkalmazásokban, a vektormezők hiperfelület-ortogonalitásának a kérdése. Tegyük fel, hogy értelmezve van a g_{ab} metrika az M sokaságon. A kérdés az, hogy egy ξ^a vektormező ortogonális-e a hiperfelületek valamely családjára. Ugyanez a kérdés úgy is átfogalmazható, hogy a ξ^a vektormezőre ortogonális $(n-1)$ -dimenziós alterek W sima összessége rendelkezik-e integrálható részsokaságok, azaz $(n-1)$ -dimenziós hiperfelületek családjával.

Állítás: Legyen T^* a ξ^a vektormezőhöz a metrika által hozzárendelt $\xi_a = g_{ab} \xi^b$ 1-forma által kifesztett 1-dimenziós duális terek T^* sima összessége. A ξ^a vektormező akkor és csak akkor hiperfelület-ortogonális, ha fennáll a

$$\xi_{[a} \nabla_b \xi_{c]} = 0 \tag{B.4.4.}$$

feltétel.

Frobenius tétele értelmében a ξ^a vektormezőhöz hozzárendelt $\xi_a = g_{ab} \xi^b$ 1-formák duális altereinek T^* sima összességéhez tartozó sima W érintőaltér-összesség akkor és csak akkor integrálható, ha $\nabla_{[a} \xi_{b]} = \xi_{[a} \nu_{b]}$ alakú, ahol ν_b alkalmas 1-forma, hiszen 1-dimenziós duális terek egyetlen μ bázisvektora azonosítható ξ_a -val. Ekkor

$$\begin{aligned}
\xi_{[a} \nabla_b \xi_{c]} &= \frac{1}{3!} (\xi_a \nabla_b \xi_c + \xi_b \nabla_c \xi_a + \xi_c \nabla_a \xi_b - \xi_c \nabla_b \xi_a - \xi_b \nabla_a \xi_c - \xi_a \nabla_c \xi_b) \\
&= \frac{1}{3} (\xi_a \nabla_{[b} \xi_{c]} + \xi_b \nabla_{[c} \xi_{a]} + \xi_c \nabla_{[a} \xi_{b]}) \\
&= \frac{1}{3} (\xi_a \xi_{[b} \nu_{c]} + \xi_b \xi_{[c} \nu_{a]} + \xi_c \xi_{[a} \nu_{b]}) = 0
\end{aligned} \tag{B.4.5.}$$

miatt a szóbanforgó hiperfelület-sereg létének szükséges és elégséges feltétele valóban $\xi_{[a} \nabla_b \xi_{c]}$ eltűnése.

C. A sokaságok leképezései

C.1. Előre- és hátratulások

Definíció: Legyenek M és N sokaságok, amelyek lehetnek különböző dimenziójúak, és legyen $\phi : M \mapsto N$ egy C^∞ leképezés. Ekkor ϕ természetes módon

1. **hátratulja** az N -en értelmezett $f : N \mapsto \mathbb{R}$ függvényt az

$$f \circ \phi : M \mapsto \mathbb{R} \quad (\text{C.1.1.})$$

M -en értelmezett függvénybe;

2. **előretolja** a $p \in M$ ponthoz tartozó érintőtér $v \in V_p$ érintővektorát a $\phi(p) \in N$ pontban értelmezett érintőtér $\phi^*v \in V_{\phi(p)}$ vektorába, amelyet az

$$(\phi^*v)(f) = v(f \circ \phi), \quad \forall f : N \mapsto \mathbb{R} \quad (\text{C.1.2.})$$

összefüggés definiál, ahol f sima függvény.

Állítás: A $\phi : M \mapsto N$ leképezés akkor és csak akkor kölcsönösen egyértelmű a $p \in M$ környezetében, ha a $\phi^* : V_p \mapsto V_{\phi(p)}$ leképezés kölcsönösen egyértelmű.

Megjegyzés: Legyen $\{x^\mu\}$ ($\mu = 1, \dots, m$) a p pont környezetét lefedő koordináta-rendszer, $\{y^\nu\}$ ($\nu = 1, \dots, n$) pedig a $\phi(p)$ pont környezetét lefedő koordináta-rendszer. Ekkor ϕ -t az $y^\mu = y^\mu(x^1, \dots, x^m)$ koordinátatranszformációval azonosíthatjuk. Függvény hátratulása pedig azt jelenti, hogy

$$(f \circ \phi)(x^1, \dots, x^m) = f(y^1(x^1, \dots, x^m), \dots, y^n(x^1, \dots, x^m)). \quad (\text{C.1.3.})$$

A $\phi^* : V_p \mapsto V_{\phi(p)}$ leképezés lineáris, azaz vektorok linárkombinációinak előretolja a vektorok előretoltjainak ugyanolyan lineárkombinációja. A V_p és $V_{\phi(p)}$ érintőterekben rendre a megfelelő $\partial/\partial x^\mu$ és $\partial/\partial y^\nu$ koordinátabázisokat használva a ϕ^* lineáris leképezést mátrix ábrázolja,

$$(\phi^*)^\nu_\mu = \partial y^\nu / \partial x^\mu, \quad (\text{C.1.4.})$$

ami a ϕ -nek megfelelő koordinátatranszformáció Jacobi-mátrixa.

Koordináta-bázisban írhatjuk, hogy

$$(\phi^*v)(f) = v(f \circ \phi) = v^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu} (f(\bar{y}(\bar{x}))) = v^\mu \frac{\partial f}{\partial y^\nu} \frac{\partial y^\nu}{\partial x^\mu}, \quad (\text{C.1.5.})$$

ahonnan kiolvashatjuk, hogy

$$(\phi^*v)|_{V_{\phi(p)}} = v^\mu \frac{\partial y^\nu}{\partial x^\mu} \frac{\partial}{\partial y^\nu} \equiv (\phi^*v)^\nu \frac{\partial}{\partial y^\nu}, \quad (\phi^*v)^\nu = v^\mu \frac{\partial y^\nu}{\partial x^\mu} = (\phi^*)^\nu_\mu v^\mu, \quad (\phi^*)^\nu_\mu = \frac{\partial y^\nu}{\partial x^\mu}. \quad (\text{C.1.6.})$$

Állítás: A ϕ leképezés segítségével **hátratulhatjuk** a $\phi(p) \in N$ ponthoz tartozó duális vektortér $\mu_a \in V_{\phi(p)}^*$ duális vektorait a $p \in M$ ponthoz tartozó duális vektortér $(\phi_*\mu)_a \in V_p^*$ duális vektoraiba, amelyeket a $\phi_* : V_{\phi(p)}^* \mapsto V_p^*$ leképezéssel az

$$(\phi_*\mu)_a v^a = \mu_a(\phi^*v)^a, \quad \forall v^a \in V_p \quad (\text{C.1.7.})$$

összefüggés révén kapunk meg.

Hasonlóan a $\phi(p) \in N$ ponthoz tartozó $(0, l)$ -tenzorokat hátratulhatjuk a $p \in M$ ponthoz tartozó ugyanilyen típusú tenzorokba a

$$(\phi^*T)_{a_1 \dots a_l} (v_1)^{a_1} \dots (v_l)^{a_l} = T_{a_1 \dots a_l} (\phi^*v_1)^{a_1} \dots (\phi^*v_l)^{a_l}, \quad (\text{C.1.8.})$$

összefüggés révén, ill. a $p \in M$ ponthoz tartozó $(k, 0)$ -tenzorokat előretolhatjuk:

$$(\phi^*T)^{b_1 \dots b_k} (\mu_1)_{b_1} \dots (\mu_k)_{b_k} = T^{b_1 \dots b_k} (\phi_*\mu_1)_{b_1} \dots (\phi_*\mu_k)_{b_k}. \quad (\text{C.1.9.})$$

Megjegyzés: Kevert tenzorokat viszont nem tudunk sem előre-, sem hátratulni.

Megjegyzés: Legyen M m -dimenziós, N n -dimenziós sokaság rendre az $\{x^\mu\}$ és $\{y^\nu\}$ koordinátákkal a $p \in M$ és a $\phi(p) \in N$ pontok környezetében. Legyen továbbá ω a $\underbrace{V_{\phi(p)}^* \times \dots \times V_{\phi(p)}^*}_{k\text{-szor}}$

téren értelmezett k -forma, azaz

$$\omega = \sum_{i_1 \dots < i_k} \omega_{i_1 \dots i_k} dy^{\nu_{i_1}} \wedge \dots \wedge dy^{\nu_{i_k}}. \quad (\text{C.1.10.})$$

Meg lehet mutatni, hogy ekkor az ω k -forma hátratulja

$$\begin{aligned} \phi_*\omega &= \sum_{i_1 \dots < i_k} (\omega_{i_1 \dots i_k} \circ \phi) dy^{\nu_{i_1}} \wedge \dots \wedge dy^{\nu_{i_k}} \\ &= \sum_{i_1 \dots < i_k} \sum_{j_1 \dots < j_k} (\omega_{i_1 \dots i_k} \circ \phi) \frac{\partial(y^{\nu_{i_1}}, \dots, y^{\nu_{i_k}})}{\partial(x^{\mu_{j_1}}, \dots, x^{\mu_{j_k}})} dx^{\mu_{j_1}} \wedge \dots \wedge dx^{\mu_{j_k}} \\ &= \sum_{i_1 \dots < i_k} \sum_{j_1 \dots < j_k} \omega_{i_1 \dots i_k} (\bar{y}(\bar{x})) \frac{\partial(y^{\nu_{i_1}}, \dots, y^{\nu_{i_k}})}{\partial(x^{\mu_{j_1}}, \dots, x^{\mu_{j_k}})} dx^{\mu_{j_1}} \wedge \dots \wedge dx^{\mu_{j_k}}. \end{aligned} \quad (\text{C.1.11.})$$

Itt $1 \leq \mu_i \leq m$, $1 \leq \nu_j \leq n$ minden i és j indexre és értelemszerűen $m, n > k$.

C.2. Diffeomorfizmusok

Definíció: A $\phi : M \mapsto N$ leképezést **diffeomorfizmusnak** nevezzük, ha C^∞ , kölcsönösen egyértelmű és az inverze is C^∞ .

Következmény: Ekkor $\dim M = \dim N$.

Megjegyzés: Ha ϕ diffeomorfizmus, akkor ϕ^* definíciója kiterjeszhető bármely (k, l) -tenzorra a ϕ^{-1} leképezéshez tartozó $(\phi^{-1})^* : V_{\phi(p)} \mapsto V_p$ „előretolás” (ami valójában hátrátolás) segítségével,

$$\begin{aligned} (\phi^*T)^{b_1 \dots b_k} (\mu_1)_{b_1} \dots (\mu_k)_{b_k} (v_1)^{a_1} \dots (v_l)^{a_l} \\ = T^{b_1 \dots b_k} (\phi_*\mu_1)_{b_1} \dots (\phi_*\mu_k)_{b_k} ((\phi^{-1})^*v_1)^{a_1} \dots ((\phi^{-1})^*v_l)^{a_l}. \end{aligned} \quad (\text{C.2.12.})$$

Definíció: Legyen $\phi : M \mapsto M$ diffeomorfizmus és T az M sokaságon értelmezett tenzormező. A ϕ diffeomorfizmust a T tenzormező **szimmetriájának** nevezzük, ha a tenzormező a ϕ diffeomorfizmus hatására nem változik meg, azaz $T = \phi^*T$.

Definíció: Ha $\phi : M \mapsto M$ olyan diffeomorfizmus, amelynek során a metrika változatlan marad, azaz amelyre $(\phi^*g)_{ab} = g_{ab}$, akkor ϕ -t **izometriának** nevezzük. Az izometriák tehát a metrikus tenzor szimmetriái.

A $\phi : M \mapsto N$ diffeomorfizmus létezésének jelentősége az, hogy ekkor az M és N sokaságok strukturája azonos. Ha a Természet az M téridő-sokasággal és a rajta értelmezett $T^{(i)}$ tenzormezővel írható le, akkor a vele diffeomorf N téridő-sokaság és a rajta értelmezett $\phi^*T^{(i)}$ tenzormező is ugyanazt a fizikát írják le. Ha viszont nincsen olyan diffeomorfizmus, amely az $(M, T^{(i)})$ fizikát leképezné az $(N, T'^{(i)})$ fizikába, akkor ezek a fizikai modellek inekvivalensek.

A diffeomorfizmusokkal kapcsolatban kétféle szemlélet létezik, az aktív és a passzív szemlélet. Az aktív szemlélet értelmében a ϕ diffeomorfizmus leképezi az M sokaságot az $(M$ -mel azonos dimenziójú) N sokaságra és az M -en értelmezett T tenzormezőket az N -en értelmezett „új” ϕ^*T tenzormezőkre. A passzív szemlélet szerint a következőket mondhatjuk:

- Bármely $p \in M$ pontnak létezik olyan $U \subset M$ környezete, amelyet lefed egy $\{x^\mu\}$ koordinátarendszer és a $\phi(p) \in N$ pontnak is létezik olyan $V \subset N$ környezete, amelyet lefed valamely $\{y^\mu\}$ koordinátarendszer.
- Ekkor a ϕ diffeomorfizmus segítségével a $p \in M$ pont $O = \phi^{-1}(V)$ környezetében értelmezhetjük az

$$x'^\mu(q) = y^\mu(\phi(q)), \quad \forall q \in O \quad (\text{C.2.13.})$$

új koordinátákat.

Ezért a ϕ diffeomorfizmusra úgy tekinthetünk, mint általános koordinátatranszformációra, ami a sokaság pontjait és annak pontjaiban a tenzorokat nem változtatja meg, csupán a pontok koordinátáit és a tenzorok koordináta-komponenseit. A kétféle szemlélet azonban egyenértékű, mert a ϕ^*T tenzor komponensei a $\phi(p)$ pontban az $\{y^\mu\}$ koordinátarendszerben (aktív szemlélet) a (C.2.13.) összefüggés értelmében pontosan megegyeznek a T tenzor komponenseivel a p pontban az $\{x'^\mu\}$ koordinátarendszerben (passzív szemlélet).

Az általános relativitási elv értelmében a fizika törvényei nem függhetnek a koordinátarendszer megválasztásától, azaz a fizika törvényei az általános koordinátatranszformációkat jelentő diffeomorfizmusokkal szemben invariánsak. A diffeomorfizmusok a téridő-sokaság koordinátázásában megjelenő mértékszabadságot jelentik.

C.3. A Lie-derivált

Legyen adott az M sokaság és a ϕ_t egy-paraméteres diffeomorfizmus csoport, amelyet egy v^a vektormező generál. Ekkor a v^a vektormező integrálgörbéi mentén úgy „szállíthatjuk”

a T tenzorokat, hogy azok fizikailag ekvivalensek maradjanak, azaz a

$$T^{a_1 \dots a_k}_{b_1 \dots b_l} \mapsto (\phi_{-t}^* T)^{a_1 \dots a_k}_{b_1 \dots b_l} \quad (\text{C.3.14.})$$

utasítás szerint. A Lie-deriváltat annak jellemzésére vezetjük be, hogy tetszőleges vektormező tetszőleges integrálgörbéjének tetszőleges p pontjában vett T_p tenzor mennyire különbözik az ugyanebben a pontban vett, vele fizikailag ekvivalens azon $(\phi^* T)_p$ tenzortól, amelyet úgy kaptunk, hogy az integrálgörbe infinitezimálisan közeli q pontjában vett T_q tenzort „szállítottuk” az integrálgörbe mentén a ϕ diffeomorfizmus segítségével a p pontba.

Definíció: A T tenzormező v vektormező szerinti Lie-deriváltja:

$$\mathcal{L}_v T^{a_1 \dots a_k}_{b_1 \dots b_l} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{(\phi_{-t}^* T)^{a_1 \dots a_k}_{b_1 \dots b_l} - T^{a_1 \dots a_k}_{b_1 \dots b_l}}{t}. \quad (\text{C.3.15.})$$

Megjegyzés: A definiáló egyenlőség bal oldalán a v vektormező integrálgörbéjének tetszőleges p pontjában (az integrálgörbe $t = 0$ paraméterű pontjában) vett tenzor áll, a jobb oldalon két ugyanezen pontban vett tenzor különbsége szerepel a számlálóban, ahol $(\phi_{-t}^* T)_p = \phi_{-t}^* T_q$, ahol q az integrálgörbe p -hez infinitezimálisan közeli, $t \rightarrow 0$ paraméterű pontja.

A Lie-derivált néhány fontos tulajdonsága:

1. a sima (k, l) -tenzorokat sima (k, l) -tenzorokba képezi le, és ez a leképezés lineáris;
2. tenzorok külső szorzatára alkalmazva eleget tesz a Leibnitz-szabálynak;
3. skalárfüggvény Lie-deriváltja

$$\mathcal{L}_v(f) = v(f), \quad \forall f : M \mapsto \mathbb{R}; \quad (\text{C.3.16.})$$

4. az $\mathcal{L}_v T = 0$ egyenlőség akkor és csak akkor teljesül mindenütt, ha minden t esetén ϕ_t a T tenzor szimmetriája.

Megjegyzés: Válasszunk a v^a valamely γ integrálgörbéjének $p \in \gamma \subset M$ pontjának O_p környezetében olyan koordinátarendszert, hogy $x^1 = t$ legyen, ahol t az integrálgörbe affin paramétere, és $t = 0$ felel meg a p pontnak, koordinátái $(x^1 = 0, x^2, \dots, x^n)$. Ekkor az integrálgörbe érintője a $p \in \gamma$ pontban $v^a = (\partial/\partial x^1)^a \in V_p$. Legyen $q \in \gamma \cap O_p$ a görbe tetszőleges t paraméterű pontja, amelynek koordinátái $(x^1 = t, x^2, \dots, x^n)$ (a γ integrálgörbe mentén csak az x^1 koordináta változik, azaz az integrálgörbe az x^1 -koordinátavonal). A ϕ_{-t} leképezés az integrálgörbe $(y^1 = x^1 + t, y^2 = x^2, \dots, y^n = x^n)$ koordinátájú $r \in \gamma \cap O_p$ pontját képezi le az $(x^1, x^2, \dots, x^n)$ koordinátájú q pontra, ezért a ϕ_{-t}^* leképezés mátrixa $(\phi_{-t}^*)^\nu_\mu = \partial y^\nu / \partial x^\mu = \delta^\nu_\mu$. Ezt felhasználva adódik, hogy tetszőleges tenzor „szállításának” eredménye

$$(\phi_{-t}^* T)^{\mu_1 \dots \mu_k}_{\nu_1 \dots \nu_l}(x^1, x^2, \dots, x^n) = T^{\mu_1 \dots \mu_k}_{\nu_1 \dots \nu_l}(x^1 + t, x^2, \dots, x^n). \quad (\text{C.3.17.})$$

Ebből viszont az következik, hogy ebben a koordináta-rendszerben a tenzormező Lie-deriváltja a v^a vektormező integrálgörbéje mentén futó koordináta szerinti közönséges parciális derivált,

$$\mathcal{L}_v T^{\mu_1 \dots \mu_k}_{\nu_1 \dots \nu_l}(x^1, x^2, \dots, x^n) = \frac{\partial}{\partial x^1} T^{\mu_1 \dots \mu_k}_{\nu_1 \dots \nu_l}(x^1, x^2, \dots, x^n). \quad (\text{C.3.18.})$$

Következmény: A v^a vektormező integrálgörbéi által generált egy-paraméteres ϕ_t diffeomorfizmus-csoport akkor és csak akkor szimmetriája a T tenzormezőnek, ha T komponensei függetlenek az x^1 koordinátától abban a koordináta-rendszerben, amelynek x^1 -koordinátavonala a v^a vektormező integrálgörbéje.

Vektormezők, 1-formák (duális vektormezők) és általában tetszőleges tenzormező Lie-deriváltjának megadható a koordináta-rendszertől független kifejezése.

Állítás: A w^a vektormező v^a vektormező szerinti Lie-deriváltja:

$$\mathcal{L}_v w^a = [v, w]^a. \quad (\text{C.3.19.})$$

Válasszunk megint olyan koordináta-rendszert, amelynek x^1 -koordinátavonala az v^a integrálgörbéje. Ekkor egyrészt írhatjuk a fentiek alapján, hogy

$$(\mathcal{L}_v w)^\mu = \frac{\partial w^\mu}{\partial x^1}. \quad (\text{C.3.20.})$$

Másrészt viszont felhasználhatjuk, hogy

$$v^a = \left(\frac{\partial}{\partial x^1} \right)^a, \quad v^\mu = \delta_1^\mu, \quad w^a = \sum_{\mu=1}^n w^\mu \left(\frac{\partial}{\partial x^\mu} \right)^a, \quad (\text{C.3.21.})$$

és írhatjuk a kommutátorra tetszőleges sima $f : M \mapsto \mathbb{R}$ függvény esetén:

$$\begin{aligned} [v, w](f) &= v(wf) - w(vf) = v(w^b \nabla_b f) - w(v^b \nabla_b f) \\ &= v^a \nabla_a (w^b \nabla_b f) - w^a \nabla_a (v^b \nabla_b f) \\ &= v^a (\nabla_a w^b) \nabla_b f + v^a w^b \nabla_a \nabla_b f - w^a (\nabla_a v^b) \nabla_b f - w^a v^b \nabla_a \nabla_b f \\ &= [v^a (\nabla_a w^b) - w^a (\nabla_a v^b)] \nabla_b f. \end{aligned} \quad (\text{C.3.22.})$$

Mivel ez az azonosság tetszőleges f függvény esetén fennáll, ezért a kommutátor koordináta-komponensei

$$[v, w]^\mu = \sum_{\nu=1}^n \left(v^\nu \frac{\partial w^\mu}{\partial x^\nu} - w^\nu \frac{\partial v^\mu}{\partial x^\nu} \right), \quad (\text{C.3.23.})$$

ahonnan $v^\nu = \delta_1^\nu$ miatt

$$[v, w]^\mu = \frac{\partial w^\mu}{\partial x^1} \quad (\text{C.3.24.})$$

adódik, ami ugyanaz, mint $(\mathcal{L}_v w)^\mu$, vagyis $(\mathcal{L}_v w)$ és $[v, w]$ komponensei megegyeznek, úgyhogy ezek a tenzorok azonosak.

Állítás: Tetszőleges μ_a 1-formamező (azaz duális vektormező) v^a vektormező szerinti Lie-deriváltja,

$$(\mathcal{L}_v \mu)_a = v^b \nabla_b \mu_a + \mu_b \nabla_a v^b. \quad (\text{C.3.25.})$$

Ezt az azonosságot annak alapján láthatjuk be, hogy $\mathcal{L}_v(f) = v(f)$ tetszőleges f sima függvény esetén és, hogy érvényes a Lie-deriválásra a Leibnitz-szabály. Tekintsük a $\mu_a w^a$ skalárfüggvény Lie-deriváltját. Egyrészt írhatjuk, hogy

$$\mathcal{L}_v(\mu_a w^a) = v(\mu_a w^a) = v^b \nabla_b (\mu_a w^a). \quad (\text{C.3.26.})$$

Másrészt pedig a Leibnitz-szabályt alkalmazva adódik, hogy

$$\mathcal{L}_v(\mu_a w^a) = w^a (\mathcal{L}_v \mu)_a + \mu_a (\mathcal{L}_v w)^a = w^a (\mathcal{L}_v \mu)_a + \mu_a [v, w]^a. \quad (\text{C.3.27.})$$

A fenti két alakot egyenlővé tesszük:

$$w^a (\mathcal{L}_v \mu)_a + \mu_a (v^b \nabla_b w^a - w^b \nabla_b v^a) = w^a v^b \nabla_b \mu_a + v^b \mu_a \nabla_b w^a. \quad (\text{C.3.28.})$$

Ekkor a baloldali és a jobboldali második tag kiejti egymást. A visszamaradó

$$w^a (\mathcal{L}_v \mu)_a = w^a v^b \nabla_b \mu_a + \mu_a w^b \nabla_b v^a = w^a v^b \nabla_b \mu_a + \mu_b w^a \nabla_a v^b \quad (\text{C.3.29.})$$

azonosság tetszőleges w^a vektormezőre fennáll, úgyhogy

$$(\mathcal{L}_v \mu)_a = v^b \nabla_b \mu_a + \mu_b \nabla_a v^b \quad (\text{C.3.30.})$$

adódik, amit be akartunk látni.

Állítás: Hasonlóan láthatjuk be, hogy tetszőleges (k, l) -tenzor Lie-deriváltja:

$$\begin{aligned} (\mathcal{L}_v T)^{a_1 \dots a_k}_{b_1 \dots b_l} &= v^c \nabla_c T^{a_1 \dots a_k}_{b_1 \dots b_l} \\ &\quad - \sum_{i=1}^k T^{a_1 \dots c \dots a_k}_{b_1 \dots b_l} \nabla_c v^{a_i} + \sum_{j=1}^l T^{a_1 \dots a_k}_{b_1 \dots c \dots b_l} \nabla_{b_j} v^c. \end{aligned} \quad (\text{C.3.31.})$$

Példa: A g_{ab} metrikus tenzornak a v^a vektormező szerinti Lie-deriváltja:

$$\mathcal{L}_v g_{ab} = \nabla_a v_b + \nabla_b v_a. \quad (\text{C.3.32.})$$

Az azonosság belátásához induljunk ki egy általános tenzor Lie-deriváltjára vonatkozó formulánkból és használjuk ki, hogy a metrika által generált kovariáns gradiens operátor hatása a metrikára zérust ad:

$$\mathcal{L}_v g_{ab} = v^c \nabla_c g_{ab} + g_{bc} \nabla_a v^c + g_{ac} \nabla_b v^c = \nabla_a v_b + \nabla_b v_a. \quad (\text{C.3.33.})$$

Megjegyzés: Az M téridő-sokaság diffeomorfizmusai jelentik a mértékszabadságot. Ez a metrika kis perturbációi esetén azt jelenti, hogy a metrika nem minden perturbációja jelent geometriailag különböző téridőt.

Állítás: Csak azok a perturbációk jelentenek különböző téridő-geometriát, amelyek nem kaphatók meg egymásból az eredeti perturbálatlan metrika egy vektormező szerinti Lie-deriváltjának hozzáadásával. Másképpen, a téridő-metrika azon γ_{ab} és γ'_{ab} perturbációi egyenértékűek (a linearizált Einstein-egyenletek szempontjából), amelyek

$$\gamma'_{ab} = \gamma_{ab} - \nabla_a v_b - \nabla_b v_a \quad (\text{C.3.34.})$$

transzformációval kaphatók meg egymásból, ahol v^a tetszőleges vektormező.

Legyen $\phi_\lambda : M \mapsto M$ egy-paraméteres diffeomorfizmus-csoport. Legyen $(M, g_{ab}(\lambda))$ a téridők egy egy-paraméteres családja. Ekkor a téridők diffeomorfizmus indukálta $(M, \phi^* g_{ab}(\lambda))$ családja azonos az eredeti téridő-családdal. Ebből az is következik, hogy ha a $g_{ab}|_{\lambda=0}$ körüli kis perturbációkat vesszük, amelyeket $\gamma_{ab} = dg_{ab}(\lambda)/d\lambda|_{\lambda=0}$ jellemez, akkor azok fizikailag azonosak a $\gamma'_{ab} = d(\phi^* g_{ab}(\lambda))/d\lambda|_{\lambda=0}$ -vel jellemzett perturbációkkal. Másrészt viszont ekkor

$$\gamma'_{ab} = \gamma_{ab} - \mathcal{L}_v g_{ab}, \quad (\text{C.3.35.})$$

ahol $g_{ab} = g_{ab}(\lambda)|_{\lambda=0}$ és v^a a ϕ_λ egy-paraméteres diffeomorfizmus-csoportot generáló vektormező. A γ_{ab} perturbációkban tehát a mértékszabadságot $\mathcal{L}_v g_{ab}$ jelenti. A $g_{ab}|_{\lambda=0}$ metrika Lie-deriváltja viszont

$$\mathcal{L}_v g_{ab} = \nabla_a v_b + \nabla_b v_a, \quad (\text{C.3.36.})$$

ahol ∇_a most a $g_{ab}|_{\lambda=0}$ metrika által indukált kovariáns gradiens operátor. Ez tehát azt jelenti, hogy a **linearizált Einstein-egyenletek esetében a metrika γ_{ab} perturbációja és**

$$\gamma'_{ab} = \gamma_{ab} - \nabla_a v_b - \nabla_b v_a \quad (\text{C.3.37.})$$

perturbációja ugyanazt a téridőt jelenti. Ez analóg a klasszikus elektrodinamikában ismert mértékszabadsággal, ahol az A_a vektorpotenciál és az $A'_a = A_a - \nabla_a \chi$ (ahol χ tetszőleges skálár-függvény) vektorpotenciál fizikailag egyenértékű.

C.4. A Killing-vektormező

Definíció: Ha a ξ^a vektormező által generált ϕ_t egy-paraméteres diffeomorfizmus-csoport izometria-csoport, azaz $\phi_t^* g_{ab} = g_{ab}$, akkor ξ^a -t **Killing-vektormezőnek** nevezzük.

Állítás: Annak a szükséges és elégséges feltétele, hogy a ξ^a vektormező Killing-vektormező legyen az, hogy

$$\mathcal{L}_\xi g_{ab} = \nabla_a \xi_b + \nabla_b \xi_a = 0 \quad (\text{C.4.38.})$$

legyen, ahol ∇_a a g_{ab} metrikához tartozó gradiens-operátor.

Itt $\mathcal{L}_\xi g_{ab} = 0$ annak a szükséges és elégséges feltétele, hogy a ξ^a vektormező által generált egy-paraméteres diffeomorfizmus-csoport izometria-csoport legyen.

Állítás: Legyen ξ^a Killing-vektormező és u^a valamely γ geodetikus érintővektora. Ekkor $\xi_a u^a$ állandó a γ geodetikus mentén.

A $\xi_a u^a$ skálár a γ geodetikus mentén akkor és csak akkor állandó, ha állandó marad a görbementi párhuzamos eltolás során, azaz ha

$$u^b \nabla_b (\xi_a u^a) = u^b u^a \nabla_b \xi_a + \xi_a u^b \nabla_b u^a \quad (\text{C.4.39.})$$

eltűnik. Az első tag,

$$u^b u^a \nabla_b \xi_a = \frac{1}{2} u^b u^a (\nabla_b \xi_a + \nabla_a \xi_b) + \frac{1}{2} u^b u^a (\nabla_b \xi_a - \nabla_a \xi_b) = \frac{1}{2} u^b u^a (\nabla_b \xi_a + \nabla_a \xi_b) = 0, \quad (\text{C.4.40.})$$

a (C.4.38.) Killing-egyenlet miatt tűnik el, a második tag pedig a geodetikus definíciója miatt zérus.

Megjegyzés: Induljunk ki abból, hogy minden részecske időszerű geodetikuson esik szabadon, a fénysugár világvonala pedig fényszerű geodetikus. A fenti állítás azt jelenti, hogy **bármely egy-paraméteres izometria csoport léte**, amelyet a ξ^a Killing-vektor generál, **jelent egy $\xi_a u^a$, a részecske vagy a fénysugár mozgására jellemző mennyiséget, amely rendre a szabadon eső részecske világvonala vagy a fénysugár világvonala mentén megmaradó.** (Ez a newtoni mechanika Noether³⁹-tételének megfelelője az általános relativitáselméletben.) Ez a megmaradó mennyiség felhasználható a gravitációs vöröseltolódás meghatározására, és nagy segítséget jelent a geodetikus egyenletének integrálásában, ha vannak a téridőnek izometriái.

Megjegyzés: A Killing-vektormező második deriváltja a Riemann-féle görbületi tenzorral kapcsolatos,

$$\nabla_a \nabla_b \xi_c = -R_{bca}^d \xi_d. \quad (\text{C.4.41.})$$

Alkalmazzuk a Riemann-tenzort definiáló összefüggést a Killing-vektormezőre,

$$\nabla_a \nabla_b \xi_c - \nabla_b \nabla_a \xi_c = R_{abc}^d \xi_d, \quad (\text{C.4.42.})$$

ahonnan $-\nabla_b \nabla_a \xi_c = \nabla_b \nabla_c \xi_a$ felhasználásával

$$\nabla_a \nabla_b \xi_c + \nabla_b \nabla_c \xi_a = R_{abc}^d \xi_d \quad (\text{C.4.43.})$$

adódik. Az (abc) indexhármast (bca) -ra cserélve kapjuk innen a

$$\nabla_b \nabla_c \xi_a + \nabla_c \nabla_a \xi_b = R_{bca}^d \xi_d \quad (\text{C.4.44.})$$

egyenlőséget, valamint további ciklikus permutációval, $(bca) \rightarrow (cab)$ a

$$\nabla_c \nabla_a \xi_b + \nabla_a \nabla_b \xi_c = R_{cab}^d \xi_d \quad (\text{C.4.45.})$$

egyenlőséget. Adjuk össze ezután a (C.4.43.) és (C.4.44.) egyenlőségek megfelelő oldalait, majd vonjuk ki az így kapott egyenlőség egyes oldalaiából a (C.4.45.) egyenlőség megfelelő oldalait. Azt kapjuk eredményül, hogy

$$2\nabla_b \nabla_c \xi_a = (R_{abc}^d + R_{bca}^d - R_{cab}^d) \xi_d. \quad (\text{C.4.46.})$$

Használjuk fel a Riemann-tenzor 2. tulajdonságát, amelynek segítségével a jobboldali kerekzárójelos kifejezés első két tagjának összege $-R_{cab}^d$ -vel egyenlő. Ekkor a bizonyítani kívánt azonosságot kapjuk eredményül.

Következmény: A Killing-vektormező és a Riemann-tenzor közötti kapcsolat következménye, hogy a ξ^a Killing-vektormezőt és $\nabla_a \xi_b$ kovariáns deriváltját a sokaság tetszőleges $q \in M$ pontjában (ismert görbületi tenzor esetében) egyértelműen meghatározza a Killing-vektormezőnek a $\xi^a|_p$ és kovariáns deriváltjának az $L_{ab}|_p = \nabla_a \xi_b|_p$ értéke a sokaság valamely $p \in M$ pontjában. Tekintsünk egy a $p \in M$ pontot a $q \in M$ ponttal összekötő görbét, amelynek érintővektora legyen v^a . A Killing-vektormezőt és kovariáns deriváltját a $q \in M$ pontban meghatározza, ha a

$$\begin{aligned} v^a \nabla_a \xi_b &= v^a L_{ab}, \\ v^a \nabla_a L_{bc} &= -R_{bca}^d \xi_d v^a \end{aligned} \quad (\text{C.4.47.})$$

³⁹Amalie Emmy Noether, német matematikus, 1882-1935.

közönséges differenciál-egyenletrendszernek megkeressük a görbe mentén az adott kezdőfeltételekhez tartozó, egyértelműen meghatározott megoldását.

Következmény: Ha a Killing-vektor és kovariáns deriváltja eltűnik a sokaság valamely $p \in M$ pontjában, akkor a Killing-vektor mindenütt zérus.

Következmény: Az n -dimenziós sokaságon a Killing-vektormezők (ill. az egy-paraméteres izometria-csoportok) maximális száma:

$$n + \frac{1}{2}n(n-1) = \frac{1}{2}n(n+1), \quad (\text{C.4.48.})$$

mert ennyi a független $(\xi^a|_p, L_{ab}|_p)$ kezdeti adatok száma.

Példa: Minkowski-téridőben a Killing-vektorok a

$$\partial_\mu \xi_\nu + \partial_\nu \xi_\mu = 0 \quad (\text{C.4.49.})$$

egyenletet elégítik ki. Ennek az egyenletnek az általános megoldása

$$\xi_\mu = a_\mu + \Lambda_{\mu\nu} x^\nu, \quad (\text{C.4.50.})$$

ahol a_μ és $\Lambda_{\mu\nu}$ állandók és $\Lambda_{\mu\nu} = -\Lambda_{\nu\mu}$. Ez meghatároz 10 darab független Killing-vektort, amelyek az a_μ eltolásoknak, a Λ_{ij} elforgatásoknak és a Λ_{0j} Lorentz-lökéseknek felelnek meg.

Megjegyzés: Érdemes megjegyezni, hogy a ξ^a Killing-vektormező vákuum-téridőben ugyanolyan hullámegyenletnek és Lorentz-feltételnek tesz eleget, mint a forrásmentes elektromágneses mező vektorpotenciálja. Ezt fel lehet arra használni, hogy fizikailag érdekes megoldásokat keressünk.

Kontraháljuk a (C.4.41.) egyenlőség mindkét oldalát az a és b indexekben,

$$\nabla_a \nabla^a \xi_c = -R_c^d \xi_d, \quad (\text{C.4.51.})$$

majd használjuk fel, hogy vákuumban a Ricci-tenzor zérus, $R_c^d \equiv 0$. Ekkor azt kapjuk, hogy ξ^a olyan

$$\nabla_a \nabla^a \xi_c = 0 \quad (\text{C.4.52.})$$

hullámegyenletet elégít ki, mint az elektromágneses mező vektorpotenciálja forrásmentes esetben a Lorentz-mértékben. Másrészt a Killing-egyenletből kontrakcióval adódik, hogy

$$\nabla_a \xi^a = 0, \quad (\text{C.4.53.})$$

azaz a Killing-vektormező vákuumban a Lorentz-feltételt is kielégíti.

Állítás: Legyen ξ^a nem fényszerű Killing-vektormező, $\xi_a \xi^a \neq 0$, amely hiperfelület-ortogonális, vagyis olyan, amelyhez létezik a ξ^a vektormezőre mindenütt ortogonális hiperfelület-sereg. Ekkor fennáll, hogy

$$\nabla_a \xi_b = -\xi_{[a} \nabla_{b]} \ln |\xi^c \xi_c|. \quad (\text{C.4.54.})$$

A Killing-egyenletből következik, hogy $\nabla_a \xi_b = \nabla_{[a} \xi_{b]}$. Frobenius tételének duális megfogalmazása értelmében a következőket mondhatjuk. Legyen T^* a $\xi_a = g_{ab} \xi^b$ egy-forma által kifeszített

egy-dimenziós duális alterek sima összessége. A tétel értelmében ξ^a akkor és csak akkor hiperfelület-ortogonális, ha létezik olyan $v_a \in T^*$ egy-formamező, hogy $\nabla_{[a}\xi_{b]} = \xi_{[a}v_{b]}$. Ha ξ^a nem nullvektormező, akkor választhatjuk v^a -t ξ^a -ra ortogonálisnak, $\xi^a v_a = 0$. Ekkor fennáll, hogy

$$\xi^b \xi_{[a} v_{b]} = \xi^b \nabla_{[a} \xi_{b]} = \xi^b \nabla_a \xi_b = \frac{1}{2} \nabla_a (\xi^b \xi_b), \quad (\text{C.4.55.})$$

azaz

$$\frac{1}{2} \xi_b (\xi_a v_b - \xi_b v_a) = -\frac{1}{2} \xi^b \xi_b v_a = -\frac{1}{2} \nabla_a (\xi^b \xi_b), \quad (\text{C.4.56.})$$

ahonnan

$$\nabla_a (\xi^b \xi_b) = -(\xi^b \xi_b) v_a. \quad (\text{C.4.57.})$$

Innen azt kapjuk, hogy

$$v_a = -\frac{\nabla_a (\xi^b \xi_b)}{\xi^b \xi_b} = -\nabla_a \ln |\xi^b \xi_b|, \quad \text{mert } \xi^b \xi_b \neq 0. \quad (\text{C.4.58.})$$

Ezt visszahelyettesítjük, úgyhogy végül

$$\nabla_a \xi_b = \xi_{[a} v_{b]} = -\xi_{[a} \nabla_{b]} \ln |\xi^c \xi_c| \quad (\text{C.4.59.})$$

adódik, amit be akartunk látni.

Végül megemlítjük a Killing-vektormező fogalmának kétféle általánosítását: a Killing-tenzormezőt és a konform Killing-vektormezőt.

Definíció: A $K_{a_1 \dots a_m} = K_{(a_1 \dots a_m)}$ teljesen szimmetrikus $(m, 0)$ -tenzormezőt **Killing-tenzormezőnek** nevezzük, ha teljesíti a

$$\nabla_{(a} K_{a_1 \dots a_m)} = 0 \quad (\text{C.4.60.})$$

azonosságot.

Megjegyzés: A Killing-tenzormezők – ellentétben a Killing-vektormezőkkel – nem származtathatók természetes módon az M sokaság diffeomorfizmus-csoportjai révén.

Megjegyzés: A Killing-tenzormezők létezése is megmaradó mennyiségek létezését vonja maga után. Legyen γ geodetikus, amelynek érintővektora u^a , és legyen $K_{a_1 \dots a_m}$ Killing-tenzormező. Ekkor

$$K_{a_1 \dots a_m} u^{a_1} \dots u^{a_m} = \text{const. } \gamma \text{ mentén.} \quad (\text{C.4.61.})$$

Például a Kerr-metrika rendelkezik nem triviális K_{ab} Killing-tenzorral is, ami a metrika Killing-vektorával együtt lehetővé teszi az összes geodetikus explicit módon történő meghatározását.

Definíció: A $\phi : M \mapsto M$ leképezést **konform izometriának** nevezzük, ha ϕ diffeomorfizmus, és létezik olyan $\Omega : M \mapsto \mathbb{R}$ függvény, amellyel $\phi^* g_{ab} = \Omega^2 g_{ab}$. (A konform izometria tehát a metrikát csak egy konform-transzformáció erejéig hagyja invariánsan.)

Megjegyzés: Mivel a ϕ konform izometria diffeomorfizmus, azért az Ω függvény nem tűnik el sehol. Az $\Omega \equiv 1$ konstans függvény esetén ϕ közönséges izometria.

Definíció: Az egy-paraméteres konform izometria-csoportot generáló ψ^a vektormezőt **konform Killing-vektormezőnek** nevezzük, ha a metrikának a ψ^a vektormező szerinti Lie-deriváltja arányos a metrikával, azaz

$$\mathcal{L}_\psi g_{ab} \propto g_{ab}. \quad (\text{C.4.62.})$$

Ez azt jelenti, hogy létezik olyan $\alpha : M \mapsto \mathbb{R}$ függvény, hogy

$$\nabla_a \psi_b + \nabla_b \psi_a = \alpha g_{ab}. \quad (\text{C.4.63.})$$

Itt az α függvényt meghatározhatjuk a (C.4.63.) egyenlet mindkét oldalának spúrját képezve,

$$2\nabla^a \psi_a = \alpha n, \quad n = \dim M \quad (\text{C.4.64.})$$

ahonnan

$$\alpha = \frac{2}{n} \nabla^a \psi_a \quad (\text{C.4.65.})$$

adódik. Ekkor a **konform Killing-egyenlet**

$$\nabla_a \psi_b + \nabla_b \psi_a = \frac{2}{n} (\nabla^c \psi_c) g_{ab} \quad (\text{C.4.66.})$$

alakot ölt.

Állítás: Ha a g_{ab} metrikájú M sokaságon létezik ψ^a konform Killing-vektormező, akkor a γ null-geodetikus mentén létezik megmaradó mennyiség, $\psi_a u^a$, ahol u^a a γ null-geodetikus érintővektora.

Tetszőleges geodetikus esetén elismételve a $\psi_a u^a$ állandóságára vonatkozó azon bizonyítás első lépéseit, amelyet közönséges Killing-vektormező esetén végeztünk, a

$$u^b \nabla_b (\psi_a u^a) = \frac{1}{n} (\nabla^c \psi_c) u^b u_b \quad (\text{C.4.67.})$$

egyenlőséget kapjuk. Ha γ null-geodetikus, azaz $u^a u_a = 0$, akkor az egyenlőség jobb oldala zérus, és ekkor $\psi_a u_a$ állandó a γ fényszerű geodetikus mentén.

Hivatkozások

- [1] Robert M. Wald, *General relativity* (The Univ. of Chicago Press, Chicago, 1984).
- [2] S. W. Hawking, G. F. R. Ellis, *The large-scale structure of space-time* (Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1973).
- [3] R. Arnowitt, S. Deser, C.W. Misner, „*The Dynamics of General Relativity*”, *Gravitation: An Introduction to Current Research* ed. by L. Witten (Wiley, New York, 1962).
- [4] A.E. Fischer, J.E. Marsden, „*The Initial Value Problem and the Dynamical Formulation of General Relativity*”, *General Relativity, an Einstein Centenary Survey* ed. by S.W. Hawking, W. Israel (Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1979).