

ÁLTALÁNOS RELATIVITÁSELMÉLET HALADÓKNAK

Sailer Kornél

Az [1] tankönyv alapján készült oktatási segédanyag.

Elméleti Fizikai Tanszék
Debreceni Egyetem
Debrecen
2015-2018

Tartalomjegyzék

1. Az Einstein-egyenletek	6
1.1. Térgeometria és fizikai törvények a relativitáselmélet előtti fizikában	6
1.1.1. Térgeometria	6
1.1.2. Általános és speciális kovariancia	7
1.2. A téridő geometriája és fizikai törvények a speciális relativitáselméletben	9
1.2.1. A téridő geometriája és a kovariancia elvek	9
1.2.2. Fizikai törvények	10
1.3. Kovariancia-elvek és fizikai törvények az általános relativitáselméletben	19
1.3.1. A gravitáció az általános relativitáselméletben	19
1.3.2. Az anyag mozgását leíró fizikai törvények alakjáról	21
1.3.3. A téridő dinamikája	27
 2. A linearizált Einstein-egyenletek	 31
2.1. Az Einstein-egyenletek linearizált alakja	31
2.2. A newtoni gravitáció, mint határeset	34
2.3. A gravitációs sugárzás	37
2.3.1. Gravitációs hullámok	37
2.3.2. A gravitációs sugárzás észlelésének elvi lehetősége	41
2.3.3. A gravitációs sugárzás forrásai	43
2.3.4. A gravitációs sugárzásban távozó energia	46
2.3.5. Gravitációs hullámok észlelése	49

Matematika tanárom, Kónya István, az ózdi József Attila Gimnázium egykori tanára emlékére.

1. Az Einstein-egyenletek

1.1. Térgeometria és fizikai törvények a relativitáselmélet előtti fizikában

1.1.1. Térgeometria

A relativitáselmélet előtti fizika felfogása szerint a tér az $\mathbb{R}^3$ sokaság szerkezetével rendelkezik. Azt is fel szokás tenni, hogy a tér pontjaihoz a sokaság $(x^1, x^2, x^3) \in \mathbb{R}^3$ pontjai természetes módon hozzárendelhetők egy standard vonalzókból (mértérudakból) készített merev kockarács segítségével. Az így kapott koordináták a Descartes-koordináták. A merev rács és annak rácpontjaiban elhelyezett nyugvó, szinkronizált órák jelentik a vonatkoztatási rendszereket. A fizikai méréseket valamely vonatkoztatási rendszerben nyugvó megfigyelők végzik. Sokféle merev térrács, azaz sokféle Descartes-koordinátarendszer vezethető be, amelyek egy 6-paraméteres izometria-csoport (a térbeli eltolások és elforgatások csoportjának) transzformációi révén állnak kölcsönösen egyértelmű kapcsolatban. Ez azt vonja maga után, hogy az (x^1, x^2, x^3) koordináták nem a sokaság belső geometriai jellemzői, értékük változik izometria-transzformációk során. Ugyanakkor bármely két x és y pont távolságának négyzete,

$$\ell^2 = (x^1 - y^1)^2 + (x^2 - y^2)^2 + (x^3 - y^3)^2 \quad (1.1.1.)$$

független a Descartes-koordináták megválasztásától, azaz a sokaság belső tulajdonságának tekinthető. Alkalmazzuk ezt a távolságnégyzet-kifejezést két szomszédos pontra, amikor $x^1 - y^1 = \delta x^1$, stb. infinitezimálisak,

$$(\delta \ell)^2 = (\delta x^1)^2 + (\delta x^2)^2 + (\delta x^3)^2. \quad (1.1.2.)$$

Hasonlítsuk össze az elemi távolságnégyzet ezen kifejezését az általános érvényű (??) összefüggéssel. Ekkor indokoltnak látszik az a feltevés, hogy a 3-dimenziós tér metrikus tenzora Descartes-féle koordinátabázisban

$$ds^2 = (dx^1)^2 + (dx^2)^2 + (dx^3)^2, \quad (1.1.3.)$$

avagy indexjelöléssel

$$h_{ab} = \sum_{\mu, \nu=1}^3 h_{\mu\nu} (dx^\mu)_a (dx^\nu)_b, \quad (1.1.4.)$$

ahol a metrika komponensei a Descartes-bázisban,

$$(h_{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (1.1.5.)$$

amelyek függetlenek a koordinátáktól. Ezért Descartes-féle koordinátarendszerben a közönséges deriváló operátor $\partial_a h_{bc} = 0$ tulajdonságú, vagyis ∂_a a metrikához

tartozó kovariáns deriváló operátor. Ebből viszont az adódik, hogy a Christoffel-szimbólumok a Descartes-féle koordinátarendszerben eltűnnek, $\Gamma_{bc}^a = 0$. (Ez egyébként a metrikához egyértelműen tartozó Christoffel-szimbólumok komponenseinek (??) kifejezéséből is közvetlenül látszik.) A relativitás előtti fizika tere tehát nem görbült $\mathbb{R}^3$ sokaság, amely lapos Riemann-metrikával rendelkezik. A geodetikusok egyenletei $d^2x^\mu/dt^2 = 0$ ($\mu = 1, 2, 3$), a geodetikusok tehát egyenesek, azaz olyan görbék, amelyek pontjainak Descartes-koordinátái lineárisan függnek a t affin paramétertől. Bármely két, p és q térbeli ponthoz egyértelműen létezik az őket összekötő geodetikus, $x^\mu(t) = p^\mu + v^\mu(t - t_1)$, ahol $x^\mu(t_1) = p^\mu$, $x^\mu(t_2) = q^\mu$ és $v^\mu = (p^\mu - q^\mu)/(t_2 - t_1)$, amelynek ívhossza mentén a két pont távolsága

$$\ell = \int_{t_1}^{t_2} (h_{ab} T^a T^b)^{1/2} dt = \int_{t_1}^{t_2} \left(\sum_{\mu, \nu=1}^3 h_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{dt} \frac{dx^\nu}{dt} \right)^{1/2} = \left(\sum_{\mu=1}^3 (p^\mu - q^\mu)^2 \right)^{1/2}. \quad (1.1.6.)$$

Ez éppen az a távolságégyzet, amelyből kiindultunk. Ezzel beláttuk a metrika alakjára tett feltevésünk helyességét.

1.1.2. Általános és speciális kovariancia

A fizikai mennyiségek mérései számokat szolgáltatnak. Vannak azonban olyan esetek, amikor az egyértelmű számszerűsítés csak úgy lehetséges, ha egy vagy több irányt is megadunk a térben. Ezért általánosságban azt feltételezzük, hogy a fizikai mennyiségek tenzorok. Ekkor **a fizika törvényeit tenzoregyenletek írják le**. A relativitáselmélet előtti fizikában a tenzorok a lapos h_{ab} metrikájú $\mathbb{R}^3$ sokaságon értelmezett tenzorok.

Mind a relativitáselmélet előtti fizikában, mind a speciális és az általános relativitáselméletben érvényes **az általános kovariancia elve**. Ez azt mondja ki, hogy a metrikus tenzor a tér (relativisztikus esetben a téridő) szerkezetét jellemző egyetlen olyan tenzormező, amely szerepelhet a fizikai törvényekben. Nem létezik semmilyen más kitüntetett vektormező, vagy kitüntetett bázisvektormező, amelyet a tér (téridő) geometriai szerkezeténél fogva tüntet ki, mint a sokaság belső tulajdonságát hordozó objektumot. Az általános kovariancia azt jelenti másrésről, hogy a fizikai mezőket leíró tenzorok és a metrikus tenzor explicit szerepeltetésével tenzor-alakban felírt egyenletek alakja általános koordináta-transzformációk során változatlan marad.

A relativitáselmélet előtti fizikában érvényes a **speciális kovariancia elve** is. A tér metrikája invariáns az izometria-transzformációk csoportjával (térbeli forgatások és eltolások) szemben. Tegyük fel, hogy megfigyelők térben elhelyezkedő O családja fizikai mennyiségeket mér valamely fizikai mezőn. Legyen O' a megfigyelők egy másik családja, amelynek tagjai izometria-transzformációkkal kaphatók meg az O család tagjaiból. A speciális kovariancia elve azt jelenti, hogy a megfigyelők O családja számára lehetséges összes mérések halmaza az O' család részére is lehetséges összes mérések halmaza. Ennek következtében az izometria-csoport a fizikai mezők állapotának transzformációjaként kell, hogy megjelenjen. A tér izometria-transzformációinak, azaz szimmetriáinak csoportja megszorítást jelent a fizikai mezőkre vonatkozó törvények alakjára nézve. Ebben áll a speciális kovariancia elvének jelentősége. A speciális kovariancia azt jelenti másrésről, hogy adott koordinátarendszerben a fizikai törvények tenzorkomponensekre vonatkozó egyenletekként felírt alakja az izometria-transzformációk során változatlan marad, ha a

metrikát az egyenletekben nem implicit módon, mint $h_{\alpha\beta}$ szerepeltetjük, hanem a metrika komponenseinek explicit kifejezéseit, mint a koordináták függvényeit, írjuk be az egyenletekbe.

Példa: A kovariancia-elveket a geodetikus egyenletének példáján illusztrálhatjuk. Valamely ψ koordinátarendszerben, ami nem feltétlen Descartes-féle, a geodetikus egyenlete affin paraméterezés esetén

$$0 = \frac{d^2 x^\mu}{dt^2} + \Gamma^\mu_{\kappa\lambda} \frac{dx^\kappa}{dt} \frac{dx^\lambda}{dt}, \quad (1.1.7.)$$

ahol a Christoffel-szimbólumok a (??) összefüggés szerint vannak kifejezve a metrika $h_{\alpha\beta}(x)$ komponenseinek koordináták szerinti parciális deriváltjaival. Hajtsunk végre általános koordinátatranszformációt, amellyel áttérünk a ψ lokális térképről egy másik ψ' térképre, azaz az x koordinátákról új x' koordinátákra. Ekkor a metrika komponensei az új koordinátabázisban $h'_{\alpha\beta}(x')$ függvényei az új koordinátáknak, a geodetikus egyenlete pedig

$$0 = \frac{d^2 x'^\mu}{dt^2} + \Gamma'^\mu_{\kappa\lambda} \frac{dx'^\kappa}{dt} \frac{dx'^\lambda}{dt}, \quad (1.1.8.)$$

ahol a Christoffel-szimbólumok az új koordinátarendszerben ugyanazon (??) összefüggéssel vannak kifejezve a metrika $h'_{\alpha\beta}(x')$ komponenseivel, mint amivel $\Gamma^\mu_{\kappa\lambda}$ a $h_{\alpha\beta}(x)$ komponensekkel. A (1.1.7.) és (1.1.8.) egyenletek alakjának azonossága tükrözi az általános kovariancia elvét.

Válasszuk most a ψ lokális térképet pl. Descartes-koordinátarendszernek. Ekkor a (1.1.7.) egyenletben $\Gamma^\mu_{\kappa\lambda}$ kiszámításakor a $h_{\alpha\beta}(x) = \text{diag}(+1, +1, +1)$ komponenseket explicit módon írjuk be a (??) összefüggés jobb oldalába, és a (1.1.7.) egyenlet

$$\frac{d^2 x^\mu}{dt^2} = 0 \quad (1.1.9.)$$

alakúra egyszerűsödik. Ha most általános koordinátatranszformációt hajtunk végre, akkor az egyenletnek ez az alakja nem őrződik meg, hanem az új ψ' lokális koordinátarendszerben (1.1.8.) alakú lesz, ahol a $\Gamma'^\mu_{\kappa\lambda}$ Christoffel -szimbólumok nem lesznek nullák. Ha viszont izometria-transzformációt hajtunk végre, amelynek eredménye egy másik ψ'' Descartes-koordinátarendszer, amelyet a ψ Descartes-koordinátarendszerből térbeli elforgatással és eltolással kaphatunk meg, akkor a ψ'' koordinátarendszerben a metrika komponensei változatlanul $h''_{\alpha\beta} = \text{diag}(+1, +1, +1)$, a Christoffel-szimbólumok pedig ezért változatlanul zérusok, úgyhogy az egyenlet megőrzi az alakját izometria-transzformációk során, azaz megmarad $d^2 x''^\mu / dt^2 = 0$ alakúnak. Ez tükrözi a speciális kovariancia elvének érvényesülését. Megfontolásunk során fontos volt, hogy a metrika koordinátakomponensei, mint az adott koordináták függvényei lettek beírva az egyenletbe, és hogy az izometria-transzformáció során, az izometria definíciója szerint, a metrika komponensei az eredeti ψ koordinátarendszerben az eredeti koordinátáknak ugyanolyan függvényei, mint amilyen függvényei a metrika komponensei az új ψ'' koordinátarendszerben az új koordinátáknak.

1.2. A téridő geometriája és fizikai törvények a speciális relativitáselméletben

1.2.1. A téridő geometriája és a kovariancia elvek

A speciális relativitáselmélet szerint a téridő az $\mathbb{R}^4$ sokaság-strukturájával rendelkezik. Vannak kitüntetett mozgások, a tehetetlenségi, azaz nem gyorsuló mozgást végző anyagi pontok mozgása. Fel szokás tenni, hogy az egymáshoz képest térben nem mozgó inerciális megfigyelők kiépíthetnek a térben méterrudak segítségével egy merev rácsot, annak rácpontjaiban nyugvó órákat helyezhetnek el, amelyeket szinkronizálni tudnak. Bármely ilyen inerciális vonatkoztatási rendszerben a nyugvó megfigyelők a téridő pontjaihoz, az egyes elemi eseményekhez az elemi esemény helyével egybeeső rácpont helyzetét megjelölő (x^1, x^2, x^3) térkoordinátákat (Descartes-koordinátákat) és az elemi esemény bekövetkeztekor a szinkronizált órákon leolvasott t óráállást rendelik. A téridő pontjainak ez a leképezése $\mathbb{R}^4$ -be **globális inerciális koordinátarendszert** definiál. Végtelen sok különböző inerciális koordinátarendszer létezik, amelyek egymásból a 10-paraméteres Poincaré-csoport transzformációi (valódi Lorentz-transzformációk és eltolások a téridőben) révén kaphatók meg. Az így értelmezett $(t = x^0, x^1, x^2, x^3)$ koordináták most sem rendelkeznek a sokaság geometriai szerkezetére utaló tartalommal. A sokaság belső, geometriai jellemzésére csak a téridő tetszőleges két, x és y pontja invariáns „távolságának” négyzete,

$$I = -(x^0 - y^0)^2 + (x^1 - y^1)^2 + (x^2 - y^2)^2 + (x^3 - y^3)^2, \quad (1.2.1.)$$

alkalmas, ami invariáns a Poincaré-csoport transzformációival szemben. Ennek és a metrika (??) általános kifejezésének összehasonlítása alapján azzal a feltevéssel élünk, hogy a metrikus tenzor a fenti koordinátabázis $(dx^\mu)_a$ (duális) vektoraival kifejezve

$$\eta_{ab} = \sum_{\mu, \nu=0}^3 \eta_{\mu\nu} (dx^\mu)_a (dx^\nu)_b, \quad (1.2.2.)$$

alakú, ahol a metrika komponensei a bevezetett inerciális koordinátarendszerben $\eta_{\mu\nu} = \text{diag}(-1, +1, +1, +1)$, amelyek nem függenek a koordinátáktól. Az inerciális koordináták szerinti ∂_a parciális derivált eleget tesz a $\partial_a \eta_{bc} = 0$ feltételnek, ami azt jelenti, hogy a Christoffel-szimbólumok $\Gamma_{bc}^a = 0$ eltűnnek, és az inerciális koordináták szerinti parciális derivált az η_{ab} metrikához egyértelműen tartozó kovariáns derivált. A téridő tehát nem görbült; lapos, Lorentz-szignatúrájú metrikával ellátott $\mathbb{R}^4$ sokaság, az úgynevezett Minkowski-téridő.

A fizikai mennyiségek a Minkowski-téridőn értelmezett tenzorok. A fizikai törvények pedig tenzoregyenletek. Az **általános kovariancia elve** némileg módosul. A téridő-sokaságnak ugyanis a metrikán túl van további független belső jellemzője.

Az időnek iránya van, ami azt jelenti, hogy létezik egy kitüntetett időszerű t^a vektormező a sokaságon, mert vannak időtükrözést sértő folyamatok. Továbbá a térnek is van irányítása, mert vannak paritássértő folyamatok, ill. folyamatok, amelyek különbséget tudnak tenni a balsodrású és a jobbsodrású rendszerek között. Utóbbit azzal lehet kifejezni, hogy értelmezve van pl. a téridőben egy folytonos, sehol el nem tűnő (pl. jobbsodrású) teljesen antiszimmetrikus $e_{abc} = e_{[abc]}$ tenzor, amelyre $t^a e_{abc} = 0$. (Az utóbbi ortogonalitási reláció fejezi ki, hogy e_{abc} térbeli orientációt ír le.) **Az általános kovariancia elve** tehát azt jelenti, hogy a fizikai törvényeket tenzoregyenletek írják le és azokban a fizikai mennyiségeknek megfelelő tenzorokon túl csak a metrikus tenzor, a t^a vektormező és az e_{abc} tenzormező szerepelhetnek.

A speciális kovariancia elve azt jelenti, hogy a fizikai törvényeknek valamely koordinátarendszerben tenzorkomponensekre felírt alakja invariáns a Poincaré-csoport transzformációival szemben, ha a metrika komponenseit beírjuk, mint a koordináták függvényeit. Ez az invariancia azonban nem áll fenn az időtükrözésre és a tértükrözésre nézve, noha jóllehet azok is izometria-transzformációk.

1.2.2. Fizikai törvények

Ebben a fejezetben néhány példát idézünk fel a speciális relativitáselméletből speciális fizikai rendszerek dinamikájára vonatkozóan.

1. *Anyagi pont mozgása.* Az anyagi pont világvonala időszerű görbe. Ha valamely t görbeparaméter esetén T^a a világvonala érintője, akkor a világvonalon történő mozgás során eltelt sajátidő (azaz az anyagi ponttal együttmozgó órán eltelt idő)

$$\tau = \int (-\eta_{ab} T^a T^b)^{1/2} dt. \quad (1.2.3.)$$

Két esemény közötti sajátidőtartam a két pontot összekötő két különböző időszerű világvonalon különböző lehet; ebből származik a nevezetes ikerparadoxon. A két eseményt összekötő geodetikuson, azaz inerciális mozgás esetén telik el a leghosszabb sajátidőtartam. A világvonalat parametrizálhatjuk a τ sajátidővel, s ekkor valamely K Minkowski-koordinátarendszerben $x^\mu = x^\mu(\tau)$ a világvonala paraméteres egyenlete. Ha a sajátidővel parametrizáljuk a világvonalat, akkor az időszerű görbe érintője az anyagi pont u^a négysebessége, amelynek komponensei $u^\mu = dx^\mu/d\tau$ és amelyre $u_a u^a = -1$. Szabadon eső anyagi pont geodetikuson mozog, amelynek egyenlete

$$u^a \partial_a u^b = 0, \quad (1.2.4.)$$

mivel az η_{ab} metrikához tartozó kovariáns derivált a globális inerciális koordinátarendszerhez tartozó közönséges parciális derivált.

Érdemes szót ejteni arról, hogy különböző megfigyelők milyen eredményt kapnak, ha az anyagi pont energiáját mérik. Legyen az anyagi pont nyugalmi tömege m , ekkor a K inerciális koordinátarendszerben az anyagi pont négyesimpulzusa $p^a =$

mu^a . Tegyük fel, hogy a részecske tartózkodási helyén egy O megfigyelő éppen v^a négyessebességgel mozog. Ekkor az O megfigyelővel éppen együtt mozgó K' globális inerciarendszerben (az abban nyugvó) O megfigyelő $E' = -p_a v^a$ energiát mér.

Ha a K' inerciarendszer a K inerciarendszerhez képest $\vec{v}$ 3-as sebességgel mozog, akkor választhatjuk az x^1 és az x'^1 koordinátatengelyeket a $\vec{v}$ vektor irányában. Ekkor a Lorentz-transzformáció értelmében $p'^0 = \gamma(p^0 - vp^1)$, ahol $\gamma = (1 - v^2)^{-1/2}$ és $v = |\vec{v}|$. Másrészt a megfigyelő négyessebességének komponensei a K rendszerben $v^0 = \gamma$, $v^1 = \gamma v$, $v^2 = v^3 = 0$. Ezért írhatjuk, hogy $E' = p'^0 = -p_a v^a$.

Ha az O megfigyelő és az anyagi pont relatív sebessége zérus, akkor $u^a = v^a$ és a megfigyelő által mért energia $E = -p_a u^a = -mu_a u^a = m$. Sok alkalmazásban felmerül az a kérdés, hogy mennyinek méri az anyagi pont energiáját egy távoli O' megfigyelő. Legyen az O' megfigyelő négyessebessége v'^a a K globális inerciarendszerben. A Minkowski-térídő nem görbült, ezért a vektorok párhuzamos eltolása független attól a görbétől, amelyen a párhuzamos eltolást végezzük. Ezért van értelme annak, hogy az O' megfigyelő által mért energiát azonosnak tekintsük azzal az energiával, amelyet az a megfigyelő mér, amelyik éppen az anyagi pont helyén tartózkodik és v^a négyessebessége megegyezik a távoli megfigyelő négyessebességével, $v'^a = v^a$.

2. Ideális folyadék mozgása.

Tekintsünk egy folytonos anyageloszlást, amelynek az energiaimpulzus-tenzora T_{ab} . Ennek a komponensei valamely K globális inerciális koordinátarendszerben az alábbi jelentéssel bírnak: a K inerciarendszerben nyugvó megfigyelő számára T^{00} a közeg energiasűrűsége, T^{i0} az energiaáramsűrűsége, T^{0i} az impulzussűrűsége és T^{ij} a közegben ébredő mechanikai feszültség tenzorának komponensei. Az a megfigyelő, aki a K inerciarendszerből nézve v^a négyessebességgel mozog, a közeg energiasűrűségét $T_{ab}v^a v^b$ -nek, energiaáramsűrűségét és impulzussűrűségét rendre $-T_{ab}v^b$ -nek és $-T_{ab}v^a$ -nak, a mechanikai feszültség tenzorának $x - y$ komponensét pedig $T_{ab}x^a y^b$ -nek észleli, ahol x^a és y^a két v^a -ra ortogonális vektor. Ez abból következik, hogy másodrendű tenzor komponensei úgy transzformálódnak Lorentz-transzformáció során, mint a megfelelő vektorkomponensek szorzatai. Közöséges közeg esetében a közeghez képest mozgó megfigyelő által észlelt energiasűrűség nem negatív,

$$T_{ab}v^a v^b \geq 0. \quad (1.2.5.)$$

Ideális folyadék energiaimpulzus-tenzora:

$$T_{ab} = \rho u_a u_b + P(\eta_{ab} + u_a u_b), \quad (1.2.6.)$$

ahol u^a a közeg négyessebessége, ρ és P pedig rendre a közeg energiasűrűsége és nyomása a közeg saját nyugalmi rendszerében.

Ha a folyadékra nem hat külső erő, akkor mozgásegyenlete

$$\partial^a T_{ab} = 0. \quad (1.2.7.)$$

Helyettesítsük be ide az ideális folyadék energiaimpulzus-tenzorának (1.2.6.) explicit alakját, majd vetítsük azt az u^a négyessebességgel párhuzamos irányra, ill. az arra

merőleges hipersíkra. Ekkor az alábbi egyenletek adódnak:

$$u^a \partial_a \rho + (\rho + P) \partial^a u_a = 0, \quad (1.2.8.)$$

$$(\rho + P) u^a \partial_a u_b + (\eta_{ab} + u_a u_b) \partial^a P = 0. \quad (1.2.9.)$$

A (1.2.7.) egyenlet explicit alakja:

$$[\partial^a (\rho + P)] u_a u_b + (\rho + P) (u_b \partial^a u_a + u_a \partial^a u_b) + \partial_b P = 0. \quad (1.2.10.)$$

Vetítsük az egyenlet mindkét oldalát először a folyadék négyessebességének irányára, azaz kontraháljuk az egyenlet mindkét oldalát u^b -vel,

$$-[\partial^a (\rho + P)] u_a + (\rho + P) (-\partial^a u_a + u_a u_b \partial^a u_b) + u^b \partial_b P = 0, \quad (1.2.11.)$$

ahol $u_b \partial^a u_b = \frac{1}{2} \partial^a (u_b u^b) = 0$, úgyhogy megkapjuk a (1.2.8.) egyenletet. Vetítsük most a (1.2.10.) egyenletet az u^a -ra ortogonális hipersíkra. Legyen V^a tetszőleges vektor, akkor ennek u^a -ra ortogonális komponense $V_a^\perp = (\eta_{ab} + u_a u_b) V^b$, hiszen $u^a V_a^\perp = u^a V_a - u_b V^b = 0$. Ezért az $\eta_{cb} + u_c u_b$ projektort haddatjuk a (1.2.10.) egyenlet mindkét oldalára:

$$\begin{aligned} 0 &= (\eta^{cb} + u^c u^b) \partial^a (\rho + P) u_a u_b + (\eta^{cb} + u^c u^b) (\rho + P) (u_b \partial^a u_a + u_a \partial^a u_b) \\ &\quad + (\eta^{cb} + u^c u^b) \partial_b P \\ &= (\eta^{cb} + u^c u^b) (\rho + P) u_a \partial^a u_b + (\eta^{cb} + u^c u^b) \partial_b P \\ &= (\rho + P) (u_a \partial^a u^c + u^c u_a u^b \partial^a u_b) + (\eta^{cb} + u^c u^b) \partial_b P \\ &= (\rho + P) u_a \partial^a u^c + (\eta^{cb} + u^c u^b) \partial_b P. \end{aligned} \quad (1.2.12.)$$

Ezt akartuk belátni.

A hidrodinamikai egyenletek nem relativisztikus határesetét $P \ll \rho$, $(u^\mu) = (1, \vec{v})$, $|\vec{v}|(dP/dt) \ll |\vec{\nabla} P|$ közelítések jelentik, amikor a (1.2.8.) és a (1.2.9.) egyenletek rendre a tömegsűrűségre vonatkozó kontinuitási egyenlet,

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla}(\rho \vec{v}) = 0, \quad (1.2.13.)$$

és az ideális folyadék mozgására vonatkozó Euler-egyenlet,

$$\rho \left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v} \right) = -\vec{\nabla} P \quad (1.2.14.)$$

alakját öltik.

Az energiaimpulzus-tenzor négyes-divergenciájának eltűnése tehát a kontinuitási-egyenlet és az Euler-egyenlet relativisztikus általánosítását jelenti. Másrésről viszont a (1.2.7.) egyenlet az energia lokális megmaradását fejezi ki, amit a következőképpen láthatunk be.

Gondolatban képzeljük el, hogy a folyadékot a K inerciarendszerben v^a sebességmezővel jellemzett megfigyelők serege végez méréseket, amelyek sebessége párhuzamos (kovariáns konstans), azaz $\partial^b v^a = \nabla^b v^a = 0$. Ekkor $v_b \nabla^b v^a = 0$, azaz a megfigyelők serege időszerű geotetikuskon mozog. Ezen megfigyelők által mért négyes-energiaáramsűrűség $J_a = -T_{ab} v^b$. Ennek divergenciája

$$\partial^a J_a = -\partial^a (T_{ab} v^b) = -T_{ab} \partial^a v^b = 0 \quad (1.2.15.)$$

eltűnik. Integráljuk ezt az egyenletet tetszőleges 4-dimenziós Ω téridő-tartományra, amelyet a 3-dimenziós S felület határol, és legyen n^a az S felület normálisa (a Gauss-tétel alkalmazásához szükséges irányítással). Ekkor Gauss tétele értelmében

$$\int_{\Omega} \partial^a J_a = \int_S n^a J_a = 0. \quad (1.2.16.)$$

Válasszuk speciálisan az Ω téridő-tartományt úgy, hogy azt a K inerciarendszerben a t -tengely irányában a $t = t_i$ és $t = t_f > t_i$ térszerű hiperfelületek, a térirányokban pedig a σ időszzerű hiperfelület határolja. Írjuk ki az (1.2.16.) egyenletben a felületi integrált explicit alakban, ekkor

$$\int_V J^0 \Big|_{t=t_f} - \int_V J^0 \Big|_{t=t_i} = - \int_{\sigma} J_a n^a d\sigma \quad (1.2.17.)$$

adódik, ahol n^a a σ határfelületen a külső normális. Ez a lokális energiamegmaradás törvényének integrális alakja.

3. Skalármező egyenlete.

Vizsgáljunk olyan hipotetikus fizikai rendszert, amelyet a Klein¹-Gordon²-egyenletnek eleget tevő klasszikus skalármezővel lehet leírni,

$$\partial^a \partial_a \phi - m^2 \phi = 0, \quad (1.2.18.)$$

ahol $m^2 > 0$ a mezőt jellemző paraméter. Ennek az energiaimpulzus-tenzora

$$T_{ab} = (\partial_a \phi)(\partial_b \phi) - \frac{1}{2} \eta_{ab} [(\partial^c \phi)(\partial_c \phi) + m^2 \phi^2]. \quad (1.2.19.)$$

Megmutathatjuk, hogy egyrészt $T_{ab} v^a v^b \geq 0$, ahol v^a a K rendszerben mozgó megfigyelők négysebessége, és másrészt most is teljesül a $\partial^a T_{ab} = 0$ egyenlet.

Egyrészt az energiafeltételben szereplő kifejezés

$$T_{ab} v^a v^b = (v^a \partial_a \phi)(v^b \partial_b \phi) + \frac{1}{2} [(\partial^c \phi)(\partial_c \phi) + m^2 \phi^2], \quad (1.2.20.)$$

ami nem negatív, mert csupa nem negatív tagok összege.

Másrészt a Klein-Gordon-egyenletet is felhasználva

$$\begin{aligned} \partial^a T_{ab} &= (\partial^a \partial_a \phi)(\partial_b \phi) + (\partial_a \phi)(\partial^a \partial_b \phi) - \frac{1}{2} \eta_{ab} [2(\partial^a \partial^c \phi)(\partial_c \phi) + 2m^2 \phi \partial^a \phi] \\ &= m^2 \phi (\partial_b \phi) + (\partial_a \phi)(\partial^a \partial_b \phi) - (\partial_b \partial^c \phi)(\partial_c \phi) - m^2 \phi \partial_b \phi \\ &= 0, \end{aligned} \quad (1.2.21.)$$

amit be akartunk látni.

4. Az elektromágneses mező.

Az elektromágneses mezőt valamely K globális inerciarendszerben nyugvó megfigyelő az $\vec{E}$ elektromos térerősséggel és a $\vec{B}$ mágneses indukcióval jellemzi. Ezek

¹Oskar Benjamin Klein, svéd fizikus, 1894-1977

²Walter Gordon, német fizikus, 1893-1939

egybefoglalhatók az F_{ab} másodrendű antiszimmetrikus tenzorban, a **térerősség-tenzorban**. Legyen egy megfigyelő négyessebessége v^a , akkor az

$$E_a = F_{ab}v^b \quad (1.2.22.)$$

négyesvektort interpretálhatjuk úgy, mint a megfigyelő által mért térerősséget, és a

$$B_a = -\frac{1}{2}\epsilon_{ab}{}^{cd}F_{cd}v^b \quad (1.2.23.)$$

négyesvektort, mint a megfigyelő által mért mágneses indukciót, ahol ϵ_{abcd} a pozitív orientációjú teljesen antiszimmetrikus tenzor, amelynek normalálása $\epsilon_{abcd}\epsilon^{abcd} = -24$, úgyhogy jobbsodrású rendszerben $\epsilon_{0123} = +1$.

Ennek belátásához vizsgáljuk azt az esetet, amikor a megfigyelő a K inerciarendszer x -tengelye irányában v sebességgel mozog, $(v^\mu) = (\gamma, \gamma v, 0, 0)$. A térerősség-tenzor komponensei a K inerciarendszerben

$$(F_{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} 0 & E^1 & E^2 & E^3 \\ -E^1 & 0 & -B^3 & B^2 \\ -E^2 & B^3 & 0 & -B^1 \\ -E^3 & -B^2 & B^1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (F^{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} 0 & -E^1 & -E^2 & -E^3 \\ E^1 & 0 & -B^3 & B^2 \\ E^2 & B^3 & 0 & -B^1 \\ E^3 & -B^2 & B^1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (1.2.24.)$$

Egyrészt ismeretes, hogy a megfigyelővel együttmozgó K' inerciarendszerben az elektromos térerősség és a mágneses indukció a Lorentz-transzformáció miatt

$$\begin{aligned} E'^1 &= E^1, & E'^2 &= \gamma(E^2 - vB^3), & E'^3 &= \gamma(E^3 + vB^2), \\ B'^1 &= B^1, & B'^2 &= \gamma(B^2 + vE^3), & B'^3 &= \gamma(B^3 - vE^2). \end{aligned} \quad (1.2.25.)$$

Másrészt képezzük az $\alpha_\mu = \sum_\nu F_{\mu\nu}v^\nu$ négyesvektor-komponenseket a K inerciarendszerben, $\alpha_\mu = F_{\mu 0}v^0 + F_{\mu 1}v^1$,

$$\begin{aligned} \alpha_0 &= \gamma v E^1 = \gamma v E'^1, \\ \alpha_1 &= -\gamma E^1 = -\gamma E'^1, \\ \alpha_2 &= -\gamma E^2 + \gamma v B^3 = -E'^2, \\ \alpha_3 &= -\gamma E^3 - \gamma v B^2 = -E'^3, \end{aligned} \quad (1.2.26.)$$

és a $\beta_\mu = -\frac{1}{2}\sum_{\nu,\kappa,\lambda}\epsilon_{\mu\nu\kappa\lambda}F^{\kappa\lambda}v^\nu$ komponenseket a K inerciarendszerben,

$$\beta_\mu = -[(-\epsilon_{\mu 012}B^3 + \epsilon_{\mu 013}B^2 - \epsilon_{\mu 023}B^1)\gamma + (-\epsilon_{\mu 123}B^1 - \epsilon_{\mu 102}E^2 - \epsilon_{\mu 103}E^3)\gamma v], \quad (1.2.27.)$$

amelyek részletesen kiírva

$$\begin{aligned} \beta_0 &= \gamma v B^1 = \gamma v B'^1, \\ \beta_1 &= -\gamma B^1 = \gamma B'^1, \\ \beta_2 &= -\gamma(B^2 + vE^3) = -B'^2, \\ \beta_3 &= \gamma(B^3 - vE^2) = B'^3. \end{aligned} \quad (1.2.28.)$$

Látjuk tehát, hogy az α_μ komponensekből $\vec{E}'$, a β_μ komponensekből pedig a $\vec{B}'$ egyértelműen kiolvasható. Ez indokolja, hogy az α_a és β_a négyesvektorokat úgy interpretáljuk, mint a K -ban v^a négyessebességgel mozgó megfigyelő által mért elektromos térerősséget és mágneses indukciót.

Az elektromágneses mező Maxwell³-egyenletei

$$\partial^a F_{ab} = -4\pi j_b, \quad (1.2.29.)$$

$$\partial_{[a} F_{bc]} = 0, \quad (1.2.30.)$$

ahol j_a a négyes-töltésáramsűrűség. A (1.2.29.) egyenlet foglalja magában a két inhomogén Maxwell-egyenletet, a Gauss-törvényt és az Ampère⁴-törvényt, a (1.2.30.) egyenlet pedig a homogén Maxwell-egyenleteket, a mágneses Gauss-törvényt és a Faraday⁵-törvényt. A (1.2.29.) egyenletből következik, hogy az elektromos töltésre lokális megmaradási törvény érvényes, amelyet a

$$\partial^a j_a = 0 \quad (1.2.31.)$$

kontinuitási egyenlet fejez ki.

A (1.2.29.) egyenlet mindkét oldalának képezzük a négyes-divergenciáját,

$$\partial^b \partial^a F_{ab} = -4\pi \partial^b j_b. \quad (1.2.32.)$$

Az elektromágneses térerősség tenzora antiszimmetrikus, $F_{ab} = -F_{ba}$, ezért az egyenlet bal oldala azonosan eltűnik, mint egy szimmetrikus és egy antiszimmetrikus tenzor kontrakciója.

Mozogjon q ponttöltés u^a négyessebességgel az elektromágneses mezőben, és legyen a ponttöltés nyugalmi tömege m . Ekkor a ponttöltésre a $K^b = qF^b_c u^c$ Lorentz-erő hat, és a ponttöltés mozgásegyenlete

$$u^a \partial_a u^b = \frac{q}{m} F^b_c u^c. \quad (1.2.33.)$$

A ponttöltés négyesimpulzusa $p^a = mu^a$. Ha a ponttöltés világvonalát (időszerű görbe) a τ sajátidővel parametrizáljuk, akkor a mozgásegyenlet $dp^b/d\tau = m(du^b/d\tau) = K^b$ alakú. A kovariáns deriváló operátor 4. tulajdonsága miatt $du^b/d\tau = u^a(\partial_a u^b)$, úgyhogy a mozgásegyenlet a (1.2.32.) alakot ölti.

Az elektromágneses mező energiaimpulzus-tenzora

$$T_{ab} = \frac{1}{4\pi} \left(F_{ac} F_b^c - \frac{1}{4} \eta_{ab} F_{de} F^{de} \right). \quad (1.2.34.)$$

Állítás:

(a) Az elektromágneses mező energiaimpulzus-tenzora teljesíti az energiatétel feltételét,

$$T_{ab} v^a v^b \geq 0, \quad (1.2.35.)$$

ahol v^a valamely megfigyelő négyessebessége. Az elektromágneses mező energiasűrűségét tehát bármely inerciális megfigyelő nem negatívnak találja.

³James Clerk Maxwell, skót fizikus, 1831–1879

⁴André-Marie Ampère, francia fizikus és matematikus, 1775–1836

⁵Michael Faraday, angol fizikus és kémikus, 1791–1867

- (b) Ha az elektromágneses mező forrásmentes, azaz $j^a = 0$, akkor az elektromágneses mező energiájára lokális megmaradási törvény érvényes,

$$\partial^a T_{ab} = 0, \text{ ha } j^a = 0. \quad (1.2.36.)$$

Amennyiben külső források is vannak jelen, akkor a lokális energiamegmaradás törvénye csak az elektromágneses mező és a töltött anyag együttes energiájára teljesül.

Kontraháljuk a (1.2.34.) tenzort a $v^a v^b$ tenzorral,

$$T_{ab} v^a v^b = \frac{1}{4\pi} \left((F_{ac} v^a) (F_b{}^c v^b) + \frac{1}{4} F_{de} F^{de} \right) = \frac{1}{8\pi} (E_c E^c + B_c B^c), \quad (1.2.37.)$$

ami valós kifejezések teljes négyzeteinek összege, úgyhogy nem negatív. Itt felhasználtuk, hogy E^c és B^c térszerű vektorok, továbbá, hogy a v^a sebességgel mozgó megfigyelő nyugalmi rendszerében (ahol $v^a = (\gamma, = \vec{0}) = v_a$)

$$E_c E^c = F^{ce} v_e F_{cb} v^b = \sum_{\mu=0}^3 F^{\mu 0} F_{\mu 0} \gamma^2 = \gamma^2 \sum_{i=1}^3 (F^{i0})^2, \quad (1.2.38.)$$

és

$$\begin{aligned} B_c B^c &= \frac{1}{4} \epsilon_{cbde} F^{de} v^b \epsilon^{cfgh} F_{gh} v_f = -\frac{3!}{4} \delta_{[b}^f \delta_d^g \delta_{e]}^h F^{de} v^b F_{gh} v_f \\ &= -\frac{1}{4} (\delta_b^f \delta_d^g \delta_e^h + \delta_d^f \delta_e^g \delta_b^h + \delta_e^f \delta_b^g \delta_d^h - \delta_e^f \delta_d^g \delta_b^h - \delta_d^f \delta_b^g \delta_e^h - \delta_b^f \delta_e^g \delta_d^h) F^{de} F_{gh} v^b v_f \\ &= -\frac{1}{4} (-F^{de} F_{de} + F^{de} F_{eb} v^b v_d + F^{de} F_{bd} v^b v_e - F^{de} F_{db} v^b v_e - F^{de} F_{be} v^b v_d \\ &\quad + F^{de} F_{ed}) \\ &= -\frac{1}{2} (-F^{de} F_{de} - F^{de} F_{be} v^b v_d - F^{de} F_{db} v^b v_e) \\ &= \frac{1}{2} F^{de} F_{de} + E^c E_c, \end{aligned} \quad (1.2.39.)$$

mivel

$$\epsilon_{cbde} \epsilon^{cfgh} = -3! \delta_{[b}^f \delta_d^g \delta_{e]}^h, \quad (1.2.40.)$$

úgyhogy

$$\frac{1}{4} F^{de} F_{de} = \frac{1}{2} (B_c B^c - E^c E_c). \quad (1.2.41.)$$

Az elektromágneses mező v^a négyessebességgel mozgó megfigyelő által mért energiasűrűségének (1.2.37.) kifejezése pontosan ugyanolyan alakú, mint az energiasűrűség kifejezése a K rendszerben. Ez is további érv a (1.2.22.) és a (1.2.23.) négyesvektorok fizikai interpretációja mellett.

A térerősség F_{ab} tenzora definíció szerint 2-forma, $\mathbf{F}$, amelynek a külső deriváltja a (1.2.30.) homogén Maxwell-egyenlet értelmében eltűnik:

$$d\mathbf{F} = 0. \quad (1.2.42.)$$

Ekkor a Poincaré-lemma megfordításának értelmében létezik olyan $\mathbf{A}$ egy-forma, amelynek $\mathbf{F}$ a deriváltja, azaz amelyre

$$\mathbf{F} = d\mathbf{A}, \quad (1.2.43.)$$

és ebből akkor következik a (1.2.30.) homogén Maxwell-egyenlet

$$d^2\mathbf{A} = 0 \quad (1.2.44.)$$

alakja. Tenzor-alakban mindez úgy foglalható össze, hogy létezik az A^a vektorpotenciálmező, amelynek segítségével a térerősség-tenzor

$$F^{ab} = \partial^a A^b - \partial^b A^a \quad (1.2.45.)$$

alakot ölt, a (1.2.30.) egyenletek automatikusan, azonosságként kielégülnek, és az inhomogén Maxwell-egyenlet

$$\partial^a (\partial_a A_b - \partial_b A_a) = -4\pi j_b \quad (1.2.46.)$$

alakot ölt.

A (1.2.45.) térerősség-tenzor invariáns az $A^a \rightarrow A^a + \partial^a \chi$ **mértéktranszformációkkal** szemben, ahol χ tetszőleges skalármező. Ezért azok az A^a térkonfigurációk, amelyek egymásból mértéktranszformációval megkaphatók, fizikailag ekvivalensek. A térkonfigurációk minden ilyen ekvivalencia-osztályából kiválaszthatunk egyetlen térkonfigurációt valamilyen **mértékfeltétel**, mint pl. a **Lorentz-feltétel** ki-
rovásával,

$$\partial_a A^a = 0. \quad (1.2.47.)$$

Ez a feltétel mindig kielégíthető.

Legyen A'^a tetszőleges térkonfiguráció. Keressünk vele ekvivalens olyan A^a térkonfigurációt, ami kielégíti a Lorentz-feltételt, vagyis legyen $A^a = A'^a + \partial^a \chi$ alakú, amelyre

$$0 = \partial_a A^a = \partial_a A'^a + \partial_a \partial^a \chi. \quad (1.2.48.)$$

Ilyen térkonfigurációt találunk, ha χ -t a

$$\partial_a \partial^a \chi = -\partial_a A'^a \quad (1.2.49.)$$

egyenlet megoldásának választjuk.

Lorentz-mértékben a (1.2.46.) inhomogén Maxwell-egyenlet inhomogén hullámegyenlet alakját ölti:

$$\partial^a \partial_a A_b = -4\pi j_b. \quad (1.2.50.)$$

Források hiányában a homogén $\partial^a \partial_a A_b = 0$ hullámegyenlet az elektromágneses hullámok terjedését írja le nem görbült Minkowski-téridőben. A homogén hullámegyenlet megoldásait **geometriai optikai közelítésben** $A_a = C_a e^{iS}$ alakban kereshetjük, ahol a C_a állandó négyesvektor a hullám amplitudója, S pedig a fázisa.

Ez a hullám akkor és csak akkor megoldása a homogén hullámegyenletnek, ha a hullám fázisa a

$$\partial^a \partial_a S = 0, \quad (\partial_a S)(\partial^a S) = 0 \quad (1.2.51.)$$

egyenlőségeket elégíti ki, továbbá a megoldás eleget kell tegyen a Lorentz-feltételnek, amiből a

$$C_a \partial^a S = 0 \quad (1.2.52.)$$

feltétel adódik.

Írjuk be az $A_a = C_a e^{iS}$ alakot a $\partial^a \partial_a A_b = 0$ homogén hullámegyenletbe,

$$0 = \partial^b \partial_b (C_a e^{iS}) = i C_a \partial^b (e^{iS} \partial_b S) = i C_a e^{iS} [\partial^b \partial_b S + (\partial_b S)(\partial^b S)] \quad (1.2.53.)$$

ahol a szögletes zárójelben a második tag egy vektor normanégyzete. Ezért az egyenlőség jobb oldala, akkor és csak akkor lehet zérus, ha a (1.2.51.) feltételek teljesülnek.

A fázisfüggvény gradiense, $\partial^a S = \nabla_a S$ ortogonális az $S = \text{áll.}$ fázisfelületekre, mert a fázisfelület bármely t^a érintővektorára fennáll a $t^a \nabla_a S = 0$ ortogonalitási feltétel. Ezért $k^a = \partial^a S$ a **fázisfelületek normálisa**. Második feltételünk azt mondja, hogy a fázisfelületek normálisa nullvektor, $k_a k^a = 0$. Ekkor az $S = \text{áll.}$ felületeket **null-felületeknek** nevezzük. Érdemes megjegyezni, hogy null-felület normálisa a null-felületnek egyúttal érintővektora is. Az első feltétel, $\partial^a k_a = \partial^a \partial_a S = 0$ a megfelelő peremfeltételekkel az S fázis meghatározására szolgál. Az elektromágneses hullámok fázisfelületeinek k^a normálisai egyúttal **null-geodetikusok érintővektorai**. Ez azt jelenti, hogy az elektromágneses hullámok terjedése **null-geodetikusokkal** jellemezhető, ezek a „fényugarak világvonalai”. A null-felületeket null-geodetikusok generálják.

Képezzük a második feltétel gradiensét,

$$0 = \partial^a [(\partial^b S)(\partial_b S)] = 2(\partial_b S)(\partial^b \partial^a S) = 2k_b \partial^b k_a, \quad (1.2.54.)$$

ami olyan null-geodetikus egyenlete, amelynek érintővektora k^a .

Végül a harmadik feltétel azt jelenti, hogy a hullám C^a amplitúdója merőleges a k^a normálisokra, $C_a k^a = 0$. A hullám v^a négyes-sebességű megfigyelő által mért **frekvenciája**

$$\omega = -v^a \partial_a S = -v^a k_a. \quad (1.2.55.)$$

A K inerciarendszerben nyugvó megfigyelő $\omega = k^0$ (kör)frekvenciát és $k^1 = (2\pi/\lambda)$ hullám-számot (és λ hullámhosszat) észlel. Tekintsünk megint az egyszerűség kedvéért olyan K' inerciarendszert, amely az adott pillanatban éppen együtt mozog a K inerciarendszerben $(v^a) = (\gamma, \gamma v, 0, 0)$ négyes-sebességgel mozgó O megfigyelővel. Ekkor a K' rendszerben nyugvó O megfigyelő a Lorentz-transzformáció értelmében $k'^0 = \gamma(k^0 - vk^1)$ frekvenciát észlel. Másrészt pedig

$$-v^a k_a = -(-\gamma k^0 + \gamma v k^1) = \gamma(k^0 - vk^1) = k'^0. \quad (1.2.56.)$$

Ezt akartuk belátni.

A legegyszerűbb megoldások a **síkhullámok**, amikor k^a =áll. vektormező, és Minkowski-koordinátákban

$$S = \sum_{\mu=0}^3 k_{\mu} x^{\mu}. \quad (1.2.57.)$$

A síkhullám-megoldások jelentőségét az adja, hogy a Fourier-transzformáció elmélete értelmében a Maxwell-egyenletek minden, a végtelenben kellően gyorsan lecsengő megoldása kifejezhető, mint síkhullámok lineáris szuperpozíciója.

A fentiek alapján arra lehet következtetni, hogy az elektromágneses zavarok, a fényjelek null-geodetikusok mentén terjednek. Ez valóban így is van. Az inhomogén hullámegyenlet retardált megoldásai írják le az ismert j^a áramsűrűséggel reprezentált forrásból kisugárzott elektromágneses hullámok terjedését

$$A^{\mu}(x) = \int d^4x' G_{\text{ret}}^{\mu\nu}(x - x') j_{\nu}(x') \quad (1.2.58.)$$

alakban, ahol $G_{\text{ret}}^{\mu\nu}(x - x')$ a retardált Green⁶-függvény. Az integrál azonban nem terjed ki a teljes téridőre, hanem csak arra a téridő-tartományra, amelyben a retardált Green-függvény nem tűnik el. Meg lehet mutatni, hogy ez a tartomány a téridő $x \in M$ pontjához tartozó múltbeli fénykúp.

1.3. Kovariancia-elvek és fizikai törvények az általános relativitáselméletben

1.3.1. A gravitáció az általános relativitáselméletben

A fizika törvényei tenzoregyenletek alakjában fogalmazhatók meg. Ez biztosítja az **általános relativitási elv** érvényesülését: a fizikai törvények invarianciáját általános koordinátatranszformációkkal szemben. **Az általános kovariancia elve** most is abban nyilvánul meg, hogy a fizikai törvényekben a téridő strukturáját jellemző mennyiségként csak a metrikus tenzor és a belőle származtatható mennyiségek szerepelhetnek. **A speciális kovariancia elve** pedig ismét azt jelenti, hogy a fizikai törvényeket leíró egyenletek alakja nem változik olyan koordinátatranszformációk során, amelyek a téridő izometriái, ha a metrikus tenzor komponenseit, mint a koordináták függvényeit explicit módon szerepeltetjük bennük.

Lényeges koncepcionális különbség van azonban a speciális relativitáselmélet szemlélete és az általános relativitáselmélet szemlélete között. Ennek legfontosabb megnyilvánulása abban van, hogyan tekintünk a gravitációra. Az elektromágneses mező megfigyelésére a speciális relativitáselméletben olyan megfigyelők állnak rendelkezésre, akik nem töltöttek, nincsenek alávetve sem elektromágneses, sem másféle erőhatásoknak, azaz inerciális megfigyelők. Az inerciális megfigyelők a lapos (nem

⁶George Green, brit matematikai fizikus, 1793-1841.

görbült) téridő időszerű geodetikusi (egyenes világvonalak) mentén mozognak. Ezeknek a természetes módon választható inerciális megfigyelőknek a világvonalaikhoz tudjuk ezután hasonlítani egy próbatöltés világvonalát, amelynek a geodetikustól való eltérése szolgáltat információt a próbatöltés gyorsulására elektromágneses mező jelenlétében, és ebből határozható meg a próbatöltésre az elektromágneses mező által kifejtett erő, azaz az elektromágneses térerősségtenzor komponensei. A gravitációs mező hasonló módon történő megfigyelése viszont elvileg sem lehetséges. Mivel a gravitáció minden testre, anyagra hat, elvileg nincsen olyan megfigyelő, aki ne lenne alávetve a gravitációnak. Ezért nem értelmezhetők természetes módon inerciális megfigyelők. Így nincsen mihez hasonlítani egy gravitáló próbatest világvonalát. Sőt, az **ekvivalencia elve** értelmében minden test azonos módon esik szabadon, azaz azonos módon mozog gravitációs mező hatása alatt. Ezt az elvi nehézséget a következő szemléletváltással hidaljuk át. Elfogadjuk, hogy elvileg sem tudunk semmilyen módon inerciális megfigyelőket (inerciális mozgást végző anyagi pontokat) megvalósítani, és segítségükkel a gravitációs erő erőtörvényét kimérni. Egyúttal azonban elfogadjuk azt a hipotézist, hogy **a téridő metrikája nem lapos, mint ahogy a speciális relativitáselmélet feltételezi, hanem görbült, és a szabadon eső anyagi pontok pályái a görbült téridő geodetikusi**. Ezáltal a téridő geodetikusi mozgó megfigyelők, amik a speciális relativitáselméletben viszonyítási alapul szolgáltak az erőhatások alatt mozgó testek vizsgálatához, most automatikusan egybeesnek a szabadon eső anyagi pontok világvonalaival. Így nincsen lehetőségünk ebben a szemléletben arra, hogy „kívülről” határozzuk meg a gravitációs mezőt. **A gravitációt a téridő saját jellemzőjének kell tekintsük, ami a téridő szerkezetében nyilvánul meg. A gravitációs mezőt lényegében a téridő geometriáját meghatározó metrikus tenzormezővel azonosítjuk.** Mindennek ellenére van értelme **relatív gravitációs erőről, az úgynevezett árapály-erőről** beszélni, amit a szomszédos, szabadon eső anyagi pontok relatív gyorsulása alapján mérhetünk. Erre vonatkozik a geodetikus deviáció egyenlete.

Az ekvivalencia elve azt mondja, hogy minden test azonos módon esik szabadon. Képzeljünk el a téridő tetszőleges pontja környezetében egy kicsiny szabadon eső űrhajót, és tegyük fel, hogy abban elengedünk egy anyagi pontot, amelyre (a gravitációt leszámítva) semmilyen erő nem hat. Akkor ez az anyagi pont maga is szabadon esik. Ezért az űrhajóhoz képest vagy nyugalomban van (ha nem adtunk neki kezdősebességet az űrhajóhoz képest), vagy egyenesvonalú egyenletes mozgást végez az űrhajóhoz képest (ha nem volt zérus az űrhajóhoz képesti kezdősebessége). Ezért a kicsiny szabadon eső űrhajó **lokális inerciarendszernek** tekinthető. A téridő bármely pontjának kicsiny környezetében létezik tehát lokális inerciarendszer, azaz lokális Minkowski-féle koordináta-rendszer, amelynek origójában a metrika komponensei a Minkowski-metrika komponensei, és amelyben a fizikai törvények ugyanolyan alakúak, mint a speciális relativitáselméletben. Ez biztosítja az összhangot az általános relativitáselmélet és a speciális relativitáselmélet között. Mivel a metrika szignatúrája nem változhat folytonosan a sokaságon, ezért a lokális inerciarendsze-

rek léte azt is kell jelentse, hogy a metrikának az általános relativitáselméletben is Lorentz-szignatúrájának kell lennie. Természetesen a téridő minden pontjában végtelen sok lokális inerciális koordinátarendszer létezik, amelyek között a Lorentz-transzformáció teremt kapcsolatot. A lokális inerciarendszert 4 darab ortonormált bázisvektor határozza meg a Minkowski-térben, ezek a bázisvektorok alkotják a tetradot. A metrikát és a gravitációs mezőt egyértelműen meghatározza, hogy a tetrad hogyan változik a téridőn, azaz milyen a tetradmező. A gravitációs mező ezért a tetrad-mezővel is jellemezhető.

Felmerül még az a kérdés, hogy hogyan egyeztethető össze az általános relativitáselmélettel az a tény, hogy a newtoni gravitációs törvény jó közelítéssel helyes eredményt ad pl. a Nap körül mozgó bolygók pályáira, avagy a ferde hajításra a Föld felszíne közelében. Newton gravitációs törvénye mérési tapasztalaton alapul, ami mögött az az alapfeltevés húzódik meg, hogy a gravitációs erő mérhető. Hogyan egyeztethető ez össze az általános relativitáselmélet szemléletével. Vegyük pl. a bolygómozgást a Nap körül. Mint később látni fogjuk, a Nap maga körül meggörbíti a téridőt, a görbült téridő metrikáját az úgynevezett Schwarzschild-megoldás határozza meg. Egy bolygó világvonala, – ha a bolygóknak a téridő szerkezetére gyakorolt hatását elhanyagoljuk, – időszerű geodetikus a Schwarzschild-metrikájú téridőben. A Schwarzschild-metrikájú téridő sztatikus, aminek egyik jellemzője, hogy a téridő-sokaságon létezik egy 1-paraméteres izometriacsoport (az időbeli eltolások csoportja), amelynek orbitái időszerű görbék. Ez a szimmetria lehetővé teszi, hogy olyan „háttér”-megfigyelőket értelmezhessünk, akik megfigyelhetik a saját világvonalaik és a bolygómozgás időszerű geodetikusai közötti eltérést, az eltérés alapján meghatározhatják a bolygóra ható gravitációs erőt, és azt pedig jó közelítéssel összhangban levőnek találják Newton gravitációs törvényével.

Megjegyzés: Általában is igaz, hogy ha a téridő metrikája izometriacsoporttal, azaz a metrikát invariánsan hagyó koordinátatranszformációk csoportjával rendelkezik, akkor ez lehetővé teszi „kitüntetett” megfigyelők seregének feltételezését. Ilyen esetben értelmes arról beszélni, hogy ezek a megfigyelők milyennek látják a fizikai jelenségeket. A téridő általában azonban nem rendelkezik izometriákkal, úgyhogy általában nem jelölhető ki kitüntetett megfigyelők serege, azaz egy olyan „háttér”, amelyhez viszonyítva beszélhetnénk a fizikai jelenségekről.

1.3.2. Az anyag mozgását leíró fizikai törvények alakjáról

Az előzőekben elmondott elvek általában nem teszik lehetővé, hogy azokat az egyenleteket egyértelműen általánosítsuk görbült téridőben történő mozgás esetére, amelyek a speciális relativitáselmélet keretében írják le az anyag mozgását. Az eddig elmondottak arra nézve sem adnak közvetlen útmutatást, hogy hogyan határozza meg a mozgó anyag gravitációs hatásánál fogva a téridő geometriai szerkezetét. Amikor tehát az általános relativitáselmélet kidolgozása során Einstein megfogalmazta ezeket a mozgás-törvényeket, akkor egészen általános szempontok is vezették. Frank-

furt am Main városában az Alte Oper frízén a „Dem Wahren, Schönen, Guten” („Az igaznak, szépnek, jónak”) felirat olvasható ma is. A természettudományokban és speciálisan az elméleti fizikában, konkrétan az általános relativitáselméletben is van egy íratlan követelmény: a törvények legyenek **igazak** (helyesen írják le a fizikai jelenségek többé-kevésbé széles körét, és helyesen jelezzenek előre az adott jelenségkörrel kapcsolatos új jelenségeket), **szépek** (pl. tenzoregyenletek, amelyek koordinátarendszertől függetlenek) és **a lehető legegyszerűbb alakúak** (az utóbbit vehetjük a jóság szinonímájának).

Az általános relativitáselmélet szerint a téridő annyiban különbözik a speciális relativitáselmélet téridőről alkotott geometriai elképzelésétől, hogy a téridő-sokaság $\mathbb{R}^4$ helyett most az előre nem specifikált M 4-dimenziós sokaság, továbbá a metrika az η_{ab} Minkowski-metrika helyett az előre nem meghatározott Lorentz-szignatúrájú g_{ab} metrika, úgyhogy a téridő-sokaság görbületi tenzora általában nem zérus. A hasonlóság az, hogy mindkét esetben a téridő egy Lorentz-szignatúrájú metrikával ellátott 4-dimenziós sokaság. Ez és az általános relativitási elv azt sugallja, hogy a fizikai mennyiségeket az általános relativitáselméletben ugyanolyan típusú tenzorokkal írjuk le, mint a speciális relativitáselméletben. Kézenfekvőnek látszik az is, hogy a fizikai törvények alakját úgy kaphatjuk meg a speciális relativitáselméletben használt alakjukból, hogy az η_{ab} metrikához tartozó kovariáns deriválást, azaz a ∂_a deriváló operátort az egyenletekben a g_{ab} metrikához tartozó ∇_a kovariáns deriváló operátorra cseréljük. **Az egyszerű helyettesítési szabály**, $\eta_{ab} \rightarrow g_{ab}$, $\partial_a \rightarrow \nabla_a$ olyan módon csatolja a részecskéket és a fizikai mezőket a gravitációhoz, ami erősen emlékeztet a q ponttöltés és az elektromágneses mező közti $p_a \rightarrow p_a - qA_a$ „minimális csatolásra”, ahol a p_a a ponttöltés négyesimpulzusa, A_a pedig az elektromágneses mező négyesvektorpotenciálja. Ennek a szabálynak az alkalmazása azonban nem mindig mentes az önkénnytől. Lássunk néhány példát fizikai törvényekre görbült téridőben, amelyek leírják az anyag dinamikáját. Ne felejtsük el azonban, hogy az a g_{ab} metrika, ami ezekben az egyenletekben szerepel, nem adott előre, hanem az anyag mozgása határozza meg, hogy milyen lesz.

1. *Anyagi pont mozgása.* Az anyagi pont mozgását négyes-sebességének u^a vektorával jellemezhetjük, amely az anyagi pont időszerű világvonálának érintője. Ha az anyagi pont szabad mozgást végez (azaz a newtoni megfogalmazás szerint szabadon esik a gravitációs mezőben), akkor világvonala időszerű geodetikus, amelynek egyenlete

$$u^a \nabla_a u^b = 0. \quad (1.3.1.)$$

Az egyenlet bal oldalán álló kifejezést tekinthetjük a részecske $a^b = u^a \nabla_a u^b$ gyorsulásának. Ha az m nyugalmi tömegű részecske a^b gyorsulása nem zérus, akkor mondhatjuk, hogy rá $f^b = ma^b$ erő hat. Erre jó példa a külső elektromágneses mezőben mozgó m nyugalmi tömegű, q töltésű részecske. Jelölje F_{ab} a külső elektromágneses mező térerősségtenzorát. A részecskére a Lorentz-erő hat és a mozgásegyenlete

$$u^a \nabla_a u^b = \frac{q}{m} F^b_c u^c, \quad (1.3.2.)$$

ami a speciális relativitáselméletben érvényes egyenlet általánosítása $\partial_a \rightarrow \nabla_a$ helyettesítéssel és azzal, hogy most az indexek fel- és lehúzása a g_{ab} metrikával és g^{ab} inverzével történik, pl. $F^b_c = g^{bd} F_{dc}$. A részecske négyesimpulzusára megtartjuk a

$$p^a = mu^a \quad (1.3.3.)$$

definíciót. Ha a részecske energiáját olyan v^a négyessebességű megfigyelő méri, aki mellett a részecske éppen elhalad, akkor ő a részecske energiáját

$$E = -p_a v^a = g_{ab} p^a v^b \quad (1.3.4.)$$

értékűnek méri. Az energiamérés eredményének ez a definíciója összhangban van a mérési esemény környezetében felvett lokális inerciarendszerben a speciális relativitáselmélet szerinti energia-definícióval. A (1.3.4.) definícióban szereplő v^a és p^a vektorok a téridő ugyanazon pontjához tartozó érintőtérnek a vektorai. Fontos különbség azonban a speciális relativitáselmülethez képest, hogy a távoli megfigyelők nem tudják egyértelműen értelmezni a részecske energiáját. A párhuzamos eltolás ugyanis a görbült téridőben függ a görbétől, amelynek mentén végezzük az eltolást. Ezért nem értelmezhető egyértelműen a távoli megfigyelő v^a sebességének párhuzamos eltoltja, amikor a v^a sebességet el akarjuk párhuzamosan tolni a részecske világvonalának valamely pontjához. Márpedig a részecske energiájának (1.3.4.) alakú összefüggéssel történő értelmezéséhez ezt meg kellene tudnunk tenni, mert matematikailag nem értelmes különböző érintőterek vektorait skalárisan szorozni.

2. Ideális folyadék mozgása.

A folytonos közegeket most is a T_{ab} energiainpulzus-tenzorukkal jellemezhetjük. Az ideális folyadék energiainpulzus-tenzora ugyanolyan alakú, mint a speciális relativitáselméletben,

$$T_{ab} = \rho u_a u_b + P(g_{ab} + u_a u_b), \quad (1.3.5.)$$

azzal az értelemszerű változtatással, hogy a Minkowski-metrika helyébe a téridő ismeretlen g_{ab} metrikája lép. Ha a folyadékra nem hat nem gravitációs természetű külső erő, akkor a speciális relativitáselméletben használt mozgásegyenlet általánosítása:

$$\nabla^a T_{ab} = 0. \quad (1.3.6.)$$

Elismételhetjük azt a levezetést, amit a speciális relativitáselméletben tettünk az előző fejezetben, hogy megkapjuk a kontinuitási egyenlet és az Euler-egyenlet általánosítását. A levezetés lényegében változatlan, hiszen korábban levezetésünk során a ∂_a deriváló operátornak csak azt a tulajdonságát használtuk ki, hogy az is egyfajta kovariáns deriváló operátor (az η_{ab} Minkowski-metrikához tartozó). Ezért a megfelelő egyenletek most is azonos alakúak csak a g_{ab} metrika és a hozzá tartozó ∇_a kovariáns gradiens szerepel bennük:

$$u^a \nabla_a \rho + (\rho + P) \nabla^a u_a = 0, \quad (1.3.7.)$$

$$(\rho + P) u^a \nabla_a u_b + (g_{ab} + u_a u_b) \nabla^a P = 0. \quad (1.3.8.)$$

Lényeges különbség van azonban a (1.3.6.) egyenlet jelentésében. Képzeljük el a megfigyelők egy családját, amelyek négyessebességét a v^a időszerű vektormező, $v^a v_a = -1$ írja le. Ha létezik olyan időszerű v^a vektormező, amelyik **kovariáns konstans**, azaz amelyre $\nabla_a v_b = 0$ mindenütt a téridőben, akkor

$$\nabla^a (T_{ab} v^b) = v^b \nabla^a T_{ab} + T_{ab} \nabla^a v^b = 0, \quad (1.3.9.)$$

és akkor a megfigyelők ezen családjának bármely tagja számára a $J_a = -T_{ab} v^b$ négyes-energiaáramsűrűség divergenciája zérus, $\nabla^a J_a = 0$. Ekkor alkalmazhatjuk a téridő bármely két térszerű (azaz időirányú normálissal rendelkező) hiperfelülete közötti, térben tetszőlegesen határolt tartományára a görbült téridőben érvényes Gauss-tételt. Ilyen esetben ismét megkapjuk a lokális energiamegmaradás törvényét. A változást a lapos téridő (Minkowski-téridő) esetéhez képest az jelenti, hogy görbült téridőben nem mindig létezik olyan időszerű vektormező, amelyik kovariáns konstans. Ezért általában tetszőleges téridőben nem tudunk lokális energiamegmaradási törvényről beszélni. Ez abból látszik, hogy a v^a vektormező kovariáns konstans voltának feltétele átírható $\nabla_{(a} v_{b)} = 0$ alakba, ami viszont a Killing-egyenlet. Azoknak a megfigyelőknek a családja, akiknek létezése lehetővé tenné, hogy lokális energiamegmaradási törvény legyen érvényben, olyan négyes-sebességmezővel kell rendelkezzen, ami egy Killing-vektormező. Ilyen vektormező pedig csak akkor létezik, ha létezik a metrikának egy olyan egy-paraméteres izometria-csoportja, ami időszerű Killing-vektormezőt generál. Ilyen izometria-csoport pedig általában tetszőleges görbült téridőben nem létezik. A helyzetet fizikailag az magyarázza, hogy „csak” az ideális folyadék energiáját diszkutáljuk és nem vesszük figyelembe, hogy az ideális folyadékokra az árapály-erők hatnak, és azok változtatják az energiáját. Ha lenne lehetőség valahogyan figyelembe venni a téridő görbültségéből származó gravitációs energiát, akkor remélhetnénk egy lokális energiamegmaradási törvény kimondhatóságát. Az általános relativitáselméletben azonban nem létezik a gravitációnak értelmes energiaimpulzus-tenzora.

Megjegyzés: Megtehetjük, hogy a téridőnek olyan kicsiny tartományát vizsgáljuk csak, amelynek méretei a görbületi sugárhoz képest kicsinyek. Ilyen kicsiny téridő-tartományban az árapályerők munkája a folyadékon elhanyagolható és ezért a folyadék energiája közelítőleg meg kell, hogy maradjon. **Kicsiny téridő-tartományban valóban lehet mindig találni jó közelítéssel kovariáns konstans Killing-vektormezőt.** Az utóbbi által jellemzett megfigyelők családja számára ezért a (1.3.6.) egyenlet, $\nabla^a T_{ab} = 0$, jó közelítéssel jelenti az energia lokális megmaradását a téridő bármely elegendően kicsiny lokális tartományában. Erre támaszkodva elfogadjuk, hogy bármely anyag és fizikai mező T_{ab} energiaimpulzus-tenzorának kovariáns divergenciája, $\nabla^a T_{ab} = 0$.

3. Klasszikus skalármező.

Kézenfekvő, hogy a Klein-Gordon-egyenletet az egyszerű $\partial_a \rightarrow \nabla_a$ helyettesítési szabály alkalmazásával általánosítsuk,

$$\nabla^a \nabla_a \phi - m^2 \phi = 0. \quad (1.3.10.)$$

Ekkor a klasszikus skalármező energiimpulzus-tenzora:

$$T_{ab} = (\nabla_a \phi)(\nabla_b \phi) - \frac{1}{2}g_{ab}[(\nabla_c \phi)(\nabla^c \phi) + m^2 \phi^2], \quad (1.3.11.)$$

ami eleget tesz a

$$\nabla^a T_{ab} = 0 \quad (1.3.12.)$$

feltételnek.

Meg kell azonban említeni, hogy a Klein-Gordon-egyenletnek nem ez az egyetlen lehetséges általánosítása; egy másik lehetőség az általánosított egyenlet

$$\nabla^a \nabla_a \phi - m^2 \phi - \alpha R \phi = 0 \quad (1.3.13.)$$

alakja, ahol R a téridő Gauss-görbülete, α valós állandó. Pl. az $\alpha = 1/6$ választás különösen érdekes, mert ekkor az egyenlet konform-szimmetriával rendelkezik; az $\alpha = 0$ eset pedig visszaadja az egyszerű helyettesítési szabály alkalmazásával kapott alakot.

4. Az elektromágneses mező.

A Maxwell-egyenletek görbült téridőben az egyszerű helyettesítési szabállyal

$$\nabla^a F_{ab} = -4\pi j_b, \quad (1.3.14.)$$

$$\nabla_{[a} F_{bc]} = 0 \quad (1.3.15.)$$

alakúaknak adódnak. Az energiimpulzus-tenzor alakjában is csak annyi a változás, hogy az η_{ab} metrikát a g_{ab} metrikára kell cserélni:

$$T_{ab} = \frac{1}{4\pi} \left(F_{ac} F_b{}^c - \frac{1}{4} g_{ab} F_{de} F^{de} \right). \quad (1.3.16.)$$

A (1.3.15.) egyenlet alapján legalább lokálisan bevezethető az A_a vektorpotenciál, amelynek segítségével

$$F_{ab} = \nabla_a A_b - \nabla_b A_a. \quad (1.3.17.)$$

A (1.3.15.) egyenletet átírhatjuk az elektromágneses térerősségre, mint az $\mathbf{F}$ két-formára vonatkozó

$$d\mathbf{F} = 0 \quad (1.3.18.)$$

alakba. Ekkor viszont a Poincaré-lemma megfordításaként legalább lokálisan mindig létezik olyan $\mathbf{A}$ egy-forma, az elektromágneses vektorpotenciál, amelynek külső deriváltjaként $\mathbf{F}$ előállítható

$$\mathbf{F} = d\mathbf{A} \quad (1.3.19.)$$

alakban.

A vektorpotenciálra ekkor a (1.3.14.) egyenletből a

$$\nabla^a \nabla_a A_b - R^d_b A_d = -4\pi j_b \quad (1.3.20.)$$

egyenlet adódik a

$$\nabla^a A_a = 0 \quad (1.3.21.)$$

Lorentz-mértékben.

A (1.3.20.) egyenlet bal oldalán a Ricci-tenzort tartalmazó tag azért jelent meg, mert a tetszőleges, nem lapos g_{ab} metrikához tartozó kovariáns gradiens-operátorok nem felcserélhetők,

$$\begin{aligned} \nabla^a F_{ab} &= \nabla^a (\nabla_a A_b - \nabla_b A_a) = \nabla^a \nabla_a A_b - (\nabla_b \nabla_a A^a - R_{ab}^a A^d) \\ &= \nabla^a \nabla_a A_b - R_{ba}^a A^d = \nabla^a \nabla_a A_b - R_{bd} A^d = \nabla^a \nabla_a A_b - R_{db} A^d \\ &= \nabla^a \nabla_a A_b - R^d_b A_d. \end{aligned} \quad (1.3.22.)$$

Ha a speciális relativitáselméletben érvényes megfelelő egyenletre alkalmaztuk volna az egyszerű helyettesítési szabályt, akkor nem kaptuk volna meg a Ricci-tenzort tartalmazó tagot. Ennek azonban ott kell lennie, mert ekkor biztosított a (görbületi sugárhoz képest kellően kicsiny méretű téridő-tartományokban) a **lokális töltés-megmaradás**,

$$\nabla^b j_b = 0. \quad (1.3.23.)$$

Azt kell belássuk, hogy $\nabla^b \nabla_a F_{ab} = 0$. Tetszőleges koordinátabázisban írhatjuk, hogy

$$\begin{aligned} \nabla_\mu \nabla_\nu F^{\nu\mu} &= \nabla_\mu (\partial_\nu F^{\nu\mu} + \Gamma^\nu_{\nu\kappa} F^{\kappa\mu} + \Gamma^\mu_{\nu\kappa} F^{\nu\kappa}) \\ &= \nabla_\mu (\nabla_\nu F^{\nu\mu} + \Gamma^\nu_{\nu\kappa} F^{\kappa\mu} + \underbrace{\Gamma^\mu_{\nu\kappa} F^{\nu\kappa}}_{=0}) + \Gamma^\mu_{\mu\rho} (\partial_\nu F^{\nu\rho} + \Gamma^\nu_{\nu\kappa} F^{\kappa\rho} + \underbrace{\Gamma^\rho_{\nu\kappa} F^{\nu\kappa}}_{=0}) \\ &= \partial_\mu (\Gamma^\nu_{\nu\kappa} F^{\kappa\mu}) - \underbrace{\Gamma^\mu_{\mu\rho} \partial_\nu F^{\rho\nu}}_{=\Gamma^\nu_{\nu\kappa} \partial_\mu F^{\kappa\mu}} \\ &= F^{\kappa\mu} \partial_\mu \Gamma^\nu_{\nu\kappa} \\ &= F^{\kappa\mu} \partial_\mu \partial_\kappa \ln \sqrt{|g|} \\ &= 0. \end{aligned} \quad (1.3.24.)$$

A 3. egyenlet felírásakor felhasználtuk, hogy $\Gamma^\mu_{\nu\kappa} = \Gamma^\mu_{\kappa\nu}$, $F^{\mu\nu} = -F^{\nu\mu}$ és $\Gamma^\mu_{\mu\rho} \Gamma^\nu_{\nu\kappa} F^{\kappa\rho} = 0$.

Ha az elektromágneses mező sokkal kisebb méretskálán változik, mint a téridő görbülete, akkor várhatjuk, hogy lesz a forrásmentes $j_b = 0$ esetben a görbült téridőben érvényes (1.3.20.) hullámeqyenletnek

$$A_a = C_a e^{iS} \quad (1.3.25.)$$

alakú közelítő megoldása, ahol C_a alig változik, jó közelítéssel állandó. Ez a **geometriai optikának** megfelelő közelítés. Helyettesítsük be ezt a vektorpotenciál-alakot a (1.3.20.) egyenletbe. Elhanyagolva C_a deriváltját, ami feltevésünk szerint „kicsi”, és a Ricci-tenzort tartalmazó tagokat, megint azt találjuk, hogy

$$(\nabla^a S)(\nabla_a S) = 0, \quad (1.3.26.)$$

azaz hogy a fázisfelületek null-felületek. A Minkowski-téridőben a geometriai optikai közelítésben ugyanezt kaptuk. Elismételve ottani érvelésünket, most is beláthatjuk, hogy $k^a = \nabla^a S$ egyúttal null-geodetikusok érintője. **A fénysugarak tehát az általános relativitáselmélet szerint is null-geodetikusok mentén terjednek.**

1.3.3. A téridő dinamikája

Az általános relativitáselmélet felfogása szerint a gravitációs mező maga is dinamikai objektum, azonosnak tekinthető a téridő geometriájával. A gravitációs mezőt jellemző dinamikai változó a téridő g_{ab} metrikája, ami egy másodrendű szimmetrikus tenzormező. Az anyag és a fizikai mezők fenti mozgásegyenleteiben egy előre nem meghatározott g_{ab} metrika és az általa indukált kovariáns deriválás operátora szerepel. Most azzal a kérdéssel kezdünk el foglalkozni, hogy milyen törvény határozza meg magát a metrikát és rajta keresztül a téridő görbületét. Mach elképzeléseinek megfelelően a téridő nem egyszerűen „színpada” az anyag dinamikai történéseinek, hanem maga is az anyag mozgására dinamikailag „válaszoló” objektum. Ezért arra keressük a választ, hogy mi az az egyenlet, ami leírja a téridő geometriájának és az anyag mozgásának kapcsolatát. Ha van ilyen egyenlet, az írja le, hogy az anyag hogyan hat vissza a gravitációs mezőre.

A fenti kérdés megválaszolásához segítséget nyújt, ha összehasonlítjuk, mit mond az árapály-erőről a newtoni gravitációs törvény és az általános relativitáselmélet. A newtoni gravitáció szerint a gravitációs mező $\vec{g}(\vec{r})$ térerősségét a $\phi(\vec{r})$ gravitációs potenciálból származtatjuk,

$$\vec{g}(\vec{r}) = -\vec{\nabla}\phi(\vec{r}). \quad (1.3.27.)$$

Az ekvivalencia-elvet figyelembe véve, két szomszédos, az $\vec{r}$ és az $\vec{r} + \vec{x}$ helyen szabadon eső részecske relatív gyorsulása, az árapály-effektus miatti relatív gyorsulás

$$\vec{g}(\vec{r} + \vec{x}) - \vec{g}(\vec{r}) = -(\vec{x} \cdot \vec{\nabla})\vec{\nabla}\phi. \quad (1.3.28.)$$

Az általános relativitáselméletben a geodetikus deviáció egyenlete alapján az árapály gyorsulás,

$$a^a = -R_{cbd}{}^a v^c x^b v^d, \quad (1.3.29.)$$

ami az alábbiakat jelenti: időszerű geodetikusok egy-paraméteres seregén belül két szomszédos, szabadon eső részecskét vizsgálunk, az egyik a P pontban van, négyesebessége $v^c(P)$, a másik az x^b térszerű vektorral odább elhelyezkedő geodetikus Q pontjában van $v^d(Q)$ négyesebességgel, ahol P és Q az időszerű geodetikus-seregére ortogonális valamely hiperfelület pontjai. Hasonlítsuk össze az árapály-gyorsulás (1.3.28.) és (1.3.29.) kifejezéseit. Az összehasonlítás azt sugallja, hogy a $\partial_b \partial^a \phi$ kifejezésnek az $R_{cbd}{}^a v^c v^d$ kifejezés az analogonja. A newtoni gravitációs potenciál másrésztől eleget tesz a

$$\nabla^2 \phi = 4\pi\rho \quad (1.3.30.)$$

egyenletnek ($G = 1$ esetén). Az időszerű geodetikusok egy-paraméteres családjához v^a sebességgel mozgó megfigyelők seregét köthetjük. Ezek a megfigyelők a ρ tömegsűrűséget ($c = 1$ egységrendszerben) a $T_{ab}v^a v^b$ energiasűrűséggel azonosítják. Mindezt

figyelembe véve az alábbi analógia állítható fel:

$$R_{cad}{}^a v^c v^d \Leftrightarrow \vec{\nabla}^2 \phi \Leftrightarrow 4\pi\rho \Leftrightarrow 4\pi T_{ab} v^a v^b, \quad (1.3.31.)$$

Mivel ez az analógia a geodetikus-családhoz tartozó valamennyi megfigyelő esetén kijelenthető, az a sejtésünk támad, hogy

$$R_{cd} \Leftrightarrow 4\pi T_{cd} \quad (1.3.32.)$$

a téridő geometriája és az anyag energiaimpulzus-tenzora közötti kapcsolat. Noha kezdetben Einstein is ezt az analógiát posztulálta, mint egyenlőséget, hamar be lehet látni, hogy az $R_{cd} = 4\pi T_{cd}$ egyenlet nem lehet a helyes egyenlet. Egyrészt, az anyag energiaimpulzus-tenzorának négyesdivergenciája zérus, $\nabla^a T_{ab} = 0$, másrészt a Bianchi-azonosság következtében az Einstein-tenzor négyesdivergenciája is eltűnik, $\nabla^a (R_{ab} - \frac{1}{2}g_{ab}R) = 0$. Ha mármost a (1.3.32.) sejtés mint egyenlet áll fenn, akkor annak kell következnie, hogy $\nabla^a R = 0$, azaz hogy a görbület kovariáns konstans. Ekkor pedig az anyag energiaimpulzus-tenzorának spurja szintén mindenütt kovariáns konstans kell legyen a Világegyetemben. Ez fizikailag nem elfogadható erős korlátozás lenne az anyag mozgására, úgyhogy Einstein el is vetette a görbület és az anyag energiaimpulzus-tenzora közti ezen kapcsolatot.

Az Einstein nevéhez fűződő megoldás is kézenfekvő a fenti megfontolások után. A téridő görbülete (geometriai szerkezete) és az anyag mozgása (energiaimpulzus-tenzora) közti kapcsolatot posztuláljuk

$$G_{ab} = 8\pi T_{ab}, \quad (1.3.33.)$$

azaz

$$R_{ab} - \frac{1}{2}g_{ab}R = 8\pi T_{ab} \quad (1.3.34.)$$

alakban. Ez az **Einstein-egyenlet**. Ekkor összhangban vagyunk az energia lokális megmaradásával, mert a Bianchi-azonosságból következik, hogy az Einstein-tenzor divergenciája zérus, a (1.3.33.) Einstein-egyenletből pedig akkor az, hogy $\nabla^a T_{ab} = 0$.

Megjegyzés: Az (1.3.34.) egyenletet a $G = c = 1$ egységrendszerben írtuk fel. Az egyenlet tetszőleges egységrendszerben érvényes alakja:

$$R_{ab} - \frac{1}{2}g_{ab}R = \frac{8\pi G}{c^4} T_{ab} \quad (1.3.35.)$$

Néha hasznos az Einstein-egyenletet egy másik alakba is átírni. Képezzük ehhez a (1.3.34.) egyenlet mindkét oldalának spurját,

$$-R = 8\pi T, \quad (1.3.36.)$$

ahol $T = T_a$, és helyettesítsük be a skalárgörbület innen kapott kifejezését a (1.3.34.) egyenletbe. Ekkor **az Einstein-egyenletet az alábbi alakban kapjuk:**

$$R_{ab} = 8\pi \left(T_{ab} - \frac{1}{2} g_{ab} T \right). \quad (1.3.37.)$$

Megjegyzés: A newtoni elméletnek olyan esetekben kell alkalmazhatónak lennie, amikor az anyag energiasűrűségét a mechanikai feszültségeknél sokkal nagyobb mértékben mérik az anyaghoz képest közelítőleg nyugvó megfigyelők. Ekkor viszont $T \approx -\rho = -T_{ab}v^av^b$. Ha ezt a közelítést használjuk, akkor a (1.3.37.) Einstein-egyenletből

$$R_{ab}v^av^b = 8\pi \left(T_{ab}v^av^b - \frac{1}{2} v^av_a T \right) = 8\pi \left(T_{ab}v^av^b + \frac{1}{2} T \right) \approx 4\pi T_{ab}v^av^b \quad (1.3.38.)$$

adódik. Ez pontosan az a sejtés, amihez korábban úgy jutottunk el, hogy a newtoni gravitáció és az általános relativitáselméletben érvényes geodetikus deviáció egyenlete alapján meghatározott árapály-gyorsulást hasonlítottuk össze.

Az Einstein-egyenlet birtokában az általános relativitáselmélet a következőképpen foglalható össze. **A gravitáció jelensége a téridő szerkezetében nyilvánul meg, ami meghatározza, hogyan esnek benne szabadon a részecskék, hogyan halad a fénysugár. A téridő egy g_{ab} Lorentz-szignatúrájú metrikával ellátott M sokaság. A téridő-sokaság görbületét a mozgó anyag eloszlása az anyag gravitációs hatásánál fogva alakítja ki az energiaimpulzus-tenzora révén, az Einstein-egyenlet által meghatározott módon.**

Megjegyzés: Az Einstein-egyenlet tényleges megoldásához választanunk kell valamilyen koordinátarendszert, és ki kell fejezzük az $R_{\mu\nu}$ Ricci-tenzor komponenseit a metrikus tenzor $g_{\mu\nu}$ komponenseivel ebben a koordinátabázisban. Mint láttuk, $R_{\mu\nu}$ a metrikus tenzornak és deriváltjainak nem lineáris kifejezése, jóllehet a metrikus tenzor második deriváltjaiban lineáris. Az Einstein-egyenlet tehát a metrika komponenseire egy másodrendű, nem lineáris parciális differenciálegyenlet-rendszer. Erre gondolva szoktunk **Einstein-egyenletekről (többszámban!)** beszélni. Lorentz-szignatúrájú metrika esetén ezek az egyenletek hullámegyenlet jellegűek, azaz hiperbolikusak. Később külön foglalkozunk avval, hogy éppen a kellő számú egyenlet és ismeretlen szerepel az Einstein-egyenletekben ahhoz, hogy jól definiált kezdetiérték-feladatot lehessen megfogalmazni az Einstein-egyenletekkel kapcsolatban, noha ez kellő körültekintést igényel.

Megjegyzés: Az Einstein-egyenletek mutatnak bizonyos analógiát a Maxwell-egyenletekkel. A Maxwell-egyenleteket meg tudjuk oldani úgy, hogy előre megadjuk a j^a áramsűrűséget, mint külső forrást, ügyelve rá, hogy ne sértsük meg a lokális töltésmegmaradás $\partial_a j^a = 0$ törvényét. Az Einstein-egyenletekben a forrás szerepét az anyag T_{ab} energiaimpulzus-tenzora játssza. Még sincsen sok értelme arról beszélni, hogy előre megadjuk T_{ab} -t, hiszen annak kifejezésében az ismeretlen g_{ab} metrikus tenzor is szerepel. **Az**

Einstein-egyenletek tehát csak szimultán oldhatók meg az anyag mozgását leíró mozgásegyenletekkel. Ez lényegi különbség a Maxwell-egyenletekhez képest.

Megjegyzés: Utolsó megjegyzésünk az általános relativitáselmélet konzisztenciájának egyik vonására mutat rá. Azzal indultunk, hogy az anyag mozgásegyenleteit, energia-impulzus-tenzorát posztuláltuk, majd az Einstein-egyenlet révén kapcsolatba hoztuk a téridő geometriai szerkezetét az anyag energiaimpulzus-tenzorával. Az Einstein-egyenletekből azonban következik, hogy $\nabla^a T_{ab} = 0$, ami megszorítást jelent az anyag mozgására. Ideális folyadék (por, olyan részecskékből álló anyag, amelynek részecskéi között elhanyagolható a kölcsönhatás) esetén ez a megszorítás olyan erős, hogy $\nabla^a T_{ab} = 0$ a mozgásegyenletek teljes fizikai tartalmát hordozza: a kontinuitási egyenletet és az Euler-egyenletet. Ebben az esetben a nyomás zérus, $P = 0$, és az Euler-egyenletből következik, hogy az ideális folyadék részecskéi időszerű geodetikusok mentén mozognak, $u^b \nabla_b u^a = 0$. Általánosan is meg lehet mutatni, hogy minden olyan testnek, amely elég kicsi ahhoz, hogy az önmagára gyakorolt gravitációs hatása elhanyagolható legyen, geodetikus mentén kell mozognia. Az Einstein-egyenletekből tehát következik az az alapfeltevésünk, hogy a szabadon eső próbatestek világvonalai geodetikusok. Természetesen a jobban kiterjedt testek mozgásának világvonala (darabkáinak világvonalai) eltér(nek) a geodetikustól az anyagdarabkák között fellépő árapály-erők következtében. Az ilyen testek mozgása is meghatározható a $\nabla^a T_{ab} = 0$ egyenletből (az irodalmi hivatkozásokat ld. [1]).

2. A linearizált Einstein-egyenletek

2.1. Az Einstein-egyenletek linearizált alakja

Az Einstein-egyenletekben a metrikus tenzor és deriváltjai nem lineárisan szerepelnek. Ez is egy nagy különbség a gravitációs mező elmélete és a Maxwell-elmélet között. (Az utóbbiban a térmennyiség és deriváltjai lineárisan szerepelnek.) Abban az esetben azonban, amikor gyenge a gravitációs mező, akkor azt várhatjuk, hogy a téridő geometriája csak kicsit tér el a Minkowski-téridő geometriájától, csak kicsit görbült. Ekkor a metrika csak kicsit különbözik az η_{ab} Minkowski-metrikától, azaz

$$g_{ab} = \eta_{ab} + \gamma_{ab} \quad (2.1.1.)$$

alakba írható, ahol γ_{ab} „kicsi”. A helyzet olyan, mintha lenne egy Minkowski-féle háttér-téridő, amihez képesti eltérést méri a γ_{ab} $(0, 2)$ -tenzor. A Minkowski-háttér azt is biztosítja, hogy választható globális inerciális koordinátarendszer (végtelen sokféleképpen). Az, hogy γ_{ab} kicsi, azt jelenti, hogy tetszőlegesen választott globális inerciális koordinátarendszerben a $\gamma_{\mu\nu}$ komponensek abszolút értékben egynél sokkal kisebbek, $|\gamma_{\mu\nu}| \ll 1$. **A gyenge gravitációs mezőkre alkalmazható közelítésünk abban áll, hogy az Einstein-egyenleteket a γ_{ab} tenzorban, a valódi metrika és a Minkowski-metrika eltérésében linearizáljuk.**

Olyan jelöléseket kell használnunk, hogy a γ_{ab} -függés mindenütt explicit legyen. Ezért ∂_a az η_{ab} Minkowski-metrika szerinti kovariáns deriváló operátort (a koordináták szerinti parciális deriválást) jelöli. Az indexek fel- és lehúzását pedig η_{ab} -vel és η^{ab} -vel fogjuk végezni. Egyetlen kivétel, hogy g^{ab} továbbra is az inverz-metrikát és nem $\eta^{ac}\eta^{bd}g_{cd}$ -t jelenti. Lineáris közelítésben

$$g^{ab} = \eta^{ab} - \gamma^{ab}, \quad (2.1.2.)$$

mert ekkor

$$(\eta^{ab} - \gamma^{ab})(\eta_{bc} + \gamma_{bc}) = \delta^a_c - \gamma^a_c + \gamma^a_c + \mathcal{O}((\gamma)^2) \approx \delta^a_c. \quad (2.1.3.)$$

Az Einstein-egyenlet lineáris közelítésben a

$$G_{ab}^{(1)} = \partial^c \partial_{(b} \bar{\gamma}_{a)c} - \frac{1}{2} \partial^c \partial_c \bar{\gamma}_{ab} - \frac{1}{2} \eta_{ab} \partial^c \partial^d \bar{\gamma}_{cd} = 8\pi T_{ab} \quad (2.1.4.)$$

alakot ölti, ahol bevezettük a

$$\bar{\gamma}_{ab} = \gamma_{ab} - \frac{1}{2} \eta_{ab} \gamma \quad (2.1.5.)$$

tenzort, amelynek spúrja $\bar{\gamma} = \bar{\gamma}^a_a$.

Lineáris közelítésben a Christoffel-szimbólumok,

$$\Gamma_{ab}^c = \frac{1}{2}\eta^{cd}(\partial_a\gamma_{bd} + \partial_b\gamma_{ad} - \partial_d\gamma_{ab}), \quad (2.1.6.)$$

$$\begin{aligned} \Gamma_{cb}^c &= \frac{1}{2}\eta^{cd}(\partial_c\gamma_{bd} + \partial_b\gamma_{cd} - \partial_d\gamma_{cb}) = \frac{1}{2}(\partial^c\gamma_{bc} + \partial_b\gamma - \partial^c\gamma_{cb}) \\ &= \frac{1}{2}\partial_b\gamma, \quad \gamma = \gamma_a^a, \end{aligned} \quad (2.1.7.)$$

elsőrendűek, a Ricci-tenzor első renddel bezárólag

$$\begin{aligned} R_{ab}^{(1)} &= \partial_c\Gamma_{ab}^c - \partial_a\Gamma_{cb}^c = \frac{1}{2}\partial^d(\partial_a\gamma_{bd} + \partial_b\gamma_{ad} - \partial_d\gamma_{ab}) - \frac{1}{2}\partial_a\partial_b\gamma \\ &= \partial^c\partial_{(a}\gamma_{b)c} - \frac{1}{2}\partial^c\partial_c\gamma_{ab} - \frac{1}{2}\partial_a\partial_b\gamma, \end{aligned} \quad (2.1.8.)$$

az $R^{(1)}$ skalárgörbület pedig ugyanebben a közelítésben

$$R^{(1)} = R^{(1)a}{}_a = \partial^c\partial^d\gamma_{cd} - \partial^c\partial_c\gamma, \quad (2.1.9.)$$

úgyhogy végül az Einstein-tenzor

$$\begin{aligned} G_{ab}^{(1)} &= R_{ab}^{(1)} - \frac{1}{2}\eta_{ab}R^{(1)} \\ &= \partial^c\partial_{(a}\gamma_{b)c} - \frac{1}{2}\partial^c\partial_c\gamma_{ab} - \frac{1}{2}\partial_a\partial_b\gamma - \frac{1}{2}\eta_{ab}(\partial^c\partial^d\gamma_{cd} - \partial^c\partial_c\gamma) \\ &= \partial^c\partial_{(b}\left(\gamma_{a)c} - \frac{1}{2}\eta_{a)c}\gamma\right) + \frac{1}{2}\partial_{(a}\partial_{b)}\gamma - \frac{1}{2}\partial^c\partial_c\left(\gamma_{ab} - \frac{1}{2}\eta_{ab}\gamma\right) - \frac{1}{2}\frac{1}{2}\eta_{ab}\partial^c\partial_c\gamma \\ &\quad - \frac{1}{2}\partial_a\partial_b\gamma - \frac{1}{2}\eta_{ab}\partial^c\partial^d\left(\gamma_{cd} - \frac{1}{2}\eta_{cd}\gamma\right) - \frac{1}{2}\frac{1}{2}\eta_{ab}\partial^c\partial_c\gamma + \frac{1}{2}\eta_{ab}\partial^c\partial_c\gamma \\ &= \partial^c\partial_{(b}\bar{\gamma}_{a)c} - \frac{1}{2}\partial^c\partial_c\bar{\gamma}_{ab} - \frac{1}{2}\eta_{ab}\partial^c\partial^d\bar{\gamma}_{cd} \end{aligned} \quad (2.1.10.)$$

alakba írható.

A diffeomorfizmusok és a metrika perturbációi közötti kapcsolatról a ???. Függelékben elmondottak értelmében a linearizált Einstein-egyenletek valamely γ_{ab} megoldása és γ'_{ab} megoldása fizikailag egyenértékű, ha γ_{ab} és γ'_{ab} csupán a perturbálatlan η_{ab} metrika valamely infinitezimális ξ^a vektormező szerinti Lie-deriváltjában különböznek, azaz

$$\gamma'_{ab} = \gamma_{ab} + \partial_a\xi_b + \partial_b\xi_a. \quad (2.1.11.)$$

Ez megfelel az $x^a \rightarrow x'^a = x^a + \xi^a(x)$ infinitezimális lokális koordináta-transzformációnak.

A perturbált metrikus tenzor infinitezimális általános koordinátatranszformáció után:

$$\begin{aligned} (\eta_{\mu\nu} + \gamma'_{\mu\nu}) &= \sum_{\kappa,\lambda} \frac{\partial x'^\kappa}{\partial x^\mu} \frac{\partial x'^\lambda}{\partial x^\nu} (\eta_{\kappa\lambda} + \gamma_{\kappa\lambda}) \\ &= \sum_{\kappa,\lambda} \left(\delta_\mu^\kappa \delta_\nu^\lambda + \delta_\mu^\kappa \frac{\partial \xi^\lambda}{\partial x^\nu} + \delta_\nu^\lambda \frac{\partial \xi^\kappa}{\partial x^\mu} + \mathcal{O}((\xi)^2) \right) (\eta_{\kappa\lambda} + \gamma_{\kappa\lambda}) \\ &= \eta_{\mu\nu} + \gamma_{\mu\nu} + \frac{\partial \xi_\mu}{\partial x^\nu} + \frac{\partial \xi_\nu}{\partial x^\mu} + \mathcal{O}((\xi)^2), \end{aligned} \quad (2.1.12.)$$

ahonnan megkapjuk az (2.1.11.) mértéktranszformáció képletét.

Ez a mértékszabadság lehetővé teszi, hogy a γ_{ab} metrikákat ekvivalencia-osztályokba soroljuk. Egy ekvivalencia-osztályba tartoznak mindazok a γ_{ab} perturbációk, amelyek egymásból az (2.1.11.) mértéktranszformációval megkaphatók, és különböző ekvivalencia osztályokba azok, amelyek egymásból nem kaphatók meg mértéktranszformációkkal. A mértékekvivalens perturbációk közül kiválaszthatunk egyet a

$$\partial^b \bar{\gamma}_{ab} = 0 \quad (2.1.13.)$$

mértékfeltétel segítségével, ami az elektrodinamikában gyakran használt Lorentz-feltétel analogonja. (Pontosabban, az (2.1.13.) mértékfeltétel még mindig megenged egy korlátozott mértékszabadságot, amire a gravitációs hullámok vizsgálatokor még visszatérünk.)

Ez a mértékfeltétel valóban kiróható, ha ugyanis $\xi^a(x)$ -et a

$$\partial^b \partial_b \xi_a = -\partial^b \bar{\gamma}_{ab} \quad (2.1.14.)$$

egyenlet megoldásaként választjuk, ahol γ_{ab} tetszőleges perturbáció, akkor a belőle az (2.1.11.) mértéktranszformációval kapott γ'_{ab} , ill. $\bar{\gamma}'_{ab}$ perturbáció kielégíti az (2.1.13.) feltételt. Ekkor ugyanis az alábbi összefüggések állnak fenn:

$$\begin{aligned} \gamma'_{ab} &= \gamma_{ab} + \partial_a \xi_b + \partial_b \xi_a, \\ \gamma' &= \gamma + 2\partial_a \xi^a, \\ \bar{\gamma}'_{ab} &= \gamma'_{ab} - \frac{1}{2}\eta_{ab}\gamma' = \bar{\gamma}_{ab} + \partial_a \xi_b + \partial_b \xi_a - \eta_{ab}\partial_c \xi^c, \\ \partial^b \bar{\gamma}'_{ab} &= \partial^b \bar{\gamma}_{ab} + \partial_a \partial^b \xi_b + \partial^b \partial_b \xi_a - \eta_{ab} \partial^b \partial_c \xi^c = \partial^b \bar{\gamma}_{ab} + \partial_a \partial^b \xi_b - \partial^b \bar{\gamma}_{ab} - \partial_a \partial^b \xi_b = 0. \end{aligned} \quad (2.1.15.)$$

Az (2.1.13.) mértékfeltételt felhasználva, az (2.1.4.) **linearizált Einstein-egyenletet** a

$$\partial^c \partial_c \bar{\gamma}_{ab} = -16\pi T_{ab} \quad (2.1.16.)$$

alakba tudjuk átírni. Az (2.1.16.) egyenlet analóg a

$$\partial^a \partial_a A_b = -4\pi j_b \quad (2.1.17.)$$

Maxwell-egyenlettel, ahol a vektorpotenciál eleget tesz a $\partial^a A_a = 0$ Lorentz-feltételnek.

Megjegyzés: Ha a lineáris Einstein-egyenleteket az anyagmentes Világegyetemre alkalmazzuk, akkor azokat a szabad gravitációs mező klasszikus téregyenleteinek tekinthetjük. Ekkor $T_{ab} = 0$ miatt az (2.1.16.) egyenlet az $m = 0$ tömegű, $s = 2$ spinű mező klasszikus téregyenletének $\partial^c \partial_c \bar{\gamma}_{ab} = 0$ alakját ölti. Ezért mondhatjuk, hogy általános esetben az Einstein-egyenletek egy önkölcsönható $m = 0$ tömegű, $s = 2$ spinű mező klasszikus, nem lineáris téregyenletei. Ez a kijelentésünk azonban némileg „sántít”, mert azoknak a fogalmaknak, hogy egy fizikai mező tömege és spinje, csak Minkowski-téridőben, azaz csak az általános relativitáselmélet lineáris közelítésében adható egzakt jelentés.

2.2. A newtoni gravitáció, mint határeset

Az általános relativitáselmélet egyik próbaköve, hogy következik-e belőle Newton gravitációs törvénye olyan körülmények között, amikor az a tapasztalat szerint jó közelítéssel igaz. Ezek a körülmények az alábbiakban foglalhatók össze:

1. A gravitáció gyenge.
2. A gravitációs mező forrásainak (a gravitáló anyagnak) a sebessége kicsi a vákuumbeli fénysebességhez képest.
3. Az anyagban a mechanikai feszültségek abszolút értékben sokkal kisebbek, mint az anyag tömegsűrűsége (ami $c = 1$ esetén azonos az anyag energiásűrűségével).

Az 1. körülmény lehetővé teszi, hogy az anyagnak a téridő geometriájára gyakorolt hatását jó közelítéssel az (2.1.16.) linearizált Einstein-egyenlettel írjuk le. A 2. és a 3. körülmény azt jelenti, hogy az energiaimpulzus-tenzornak csak az (idő-idő)-komponense nem nulla, a többi komponense elhanyagolható. Az (idő-tér)-komponensek elhanyagolása veszi figyelembe, hogy kicsi az anyag impulzussűrűsége, a (tér-tér)-komponensek elhanyagolása pedig, hogy kicsik a mechanikai feszültségek az anyagban. A fenti tulajdonságú energiaimpulzus-tenzort kézenfekvő

$$T_{ab} \approx \rho t_a t_b \quad (2.2.1.)$$

alakban felvenni, ahol t^a időszerű vektormező. Egy ilyen vektormező létezésének feltételezése azt jelenti, hogy van olyan globális inerciális koordinátarendszer a Minkowski-féle háttér-téridőben, amelyhez az érintőtérben a $t^a = (\partial/\partial x^0)^a$ időszerű bázisvektor tartozik. A térszerű koordinátáknak megfelelő $X_{(\mu)}^a = (\partial/\partial x^\mu)^a$ ($\mu = 1, 2, 3$) bázisvektorokat választhatjuk t^a -ra ortogonálisan. A t^a vektormező integrálgörbéi az x^0 -koordinátavonalak. A 2. körülmény értelmében az anyag „lassan” mozog, úgyhogy feltehető, hogy a metrika is csak „lassan” változik. Ezért az (2.1.16.) egyenlet olyan megoldásait keressük, amikor $\bar{\gamma}_{ab}$ idő-koordináta szerinti deriváltjait elhanyagoljuk.

A választott globális koordinátarendszerben a linearizált Einstein-egyenletek:

$$\Delta \bar{\gamma}_{\mu\nu} = \begin{cases} 0, & \text{ha } \mu, \nu \neq 0 \\ -16\pi\rho, & \text{ha } \mu = \nu = 0 \end{cases}, \quad (2.2.2.)$$

ahol Δ a 3-dimenziós (térkoordináták szerinti) Laplace-operátor. Ha $\mu, \nu \neq 0$, akkor a homogén Laplace-egyenlet egyetlen, a végtelenben jó viselkedésű megoldása

$$\bar{\gamma}_{\mu\nu} = 0, \quad \text{ha } \mu, \nu \neq 0. \quad (2.2.3.)$$

(Az egyenlet egyetlen alulról és felülről is korlátos megoldása a $\bar{\gamma}_{\mu\nu} = \text{const.}$ megoldás, ami mértéktranszformációval zérussá tehető.) Ha bevezetjük a

$$\phi = -\frac{1}{4}\bar{\gamma}_{00} \quad (2.2.4.)$$

gravitációs potenciált, akkor azt kapjuk, hogy az a

$$\Delta\phi = 4\pi\rho \quad (2.2.5.)$$

Poisson-egyenlet megoldása. Feltevésünk szerint a ϕ potenciál idő szerinti deriváltja elhanyagolható, azaz ϕ sztatikus potenciál, vagy ha ρ lassan változik a $t = x^0$ időkoordináta függvényében, akkor kvázisztatikus. Megjegyezzük, hogy közelítéseinknek megfelelően a

$$(\partial/\partial x^0)\bar{\gamma}_{0\mu} + \sum_{\nu=1}^3 (\partial/\partial x^\nu)\bar{\gamma}_{\nu\mu} = 0 \quad (2.2.6.)$$

Lorentz-feltétel automatikusan teljesül. Könnyen beláthatjuk, hogy a **newtoni közelítésben az (2.2.2.) linearizált Einstein-egyenletek megoldása**

$$\gamma_{ab} = -(4t_a t_b + 2\eta_{ab})\phi \quad (2.2.7.)$$

alakban fejezhető ki a gravitációs potenciál segítségével.

Ennek belátásához használjuk fel az alábbi összefüggéseket. Induljunk ki a

$$\bar{\gamma}_{ab} = \gamma_{ab} - \frac{1}{2}\eta_{ab}\gamma \quad (2.2.8.)$$

definícióból, ahonnan spúrképzéssel

$$\bar{\gamma} = \gamma - \frac{1}{2}\eta^a_a \gamma = -\gamma, \quad (2.2.9.)$$

mert $\eta^a_a = \eta_{ab}\eta^{ab} = 4$. Másrészt

$$\bar{\gamma} = \bar{\gamma}_{ab}\eta^{ab} = \bar{\gamma}_{00}\eta^{00} = -\bar{\gamma}_{00} = 4\phi, \quad \gamma = -\bar{\gamma} = -4\phi, \quad (2.2.10.)$$

amit felhasználva adódik, hogy

$$\gamma_{ab} = \bar{\gamma}_{ab} + \frac{1}{2}\eta_{ab}\gamma = \bar{\gamma}_{ab} - 2\eta_{ab}\phi, \quad (2.2.11.)$$

ahol $\bar{\gamma}_{ab} = \bar{\gamma}_{00}t_a t_b$ írható, mert csak az (idő-idő)-komponens nem zérus, úgyhogy végül

$$\gamma_{ab} = -4\phi t_a t_b - 2\eta_{ab}\phi = (-4t_a t_b + 2\eta_{ab})\phi. \quad (2.2.12.)$$

A fentiekből látjuk tehát, hogy a linearizált Einstein-egyenletből a newtoni gravitáció érvényességi feltételeinek megfelelő körülmények között következik a gravitációs potenciálra vonatkozó Poisson-egyenlet, ami a Newton-féle gravitációs

törvény alapja. Például ebből közvetlenül megkapjuk a pontrészcse által keltett gravitációs potenciálmezőt: a térbeli koordinátarendszer origójában nyugvó pontrészcse $\rho = m\delta(\vec{x})$ tömegsűrűségével a

$$\Delta\phi = 4\pi m\delta(\vec{x}) \quad (2.2.13.)$$

Poisson-egyenlet megoldása a $\phi = -\frac{m}{|\vec{x}|}$ potenciálmező.

Érdemes meghatározni egy egységnyi tömegű próbarészecske világvonalát is a newtoni közelítésben. Legyen ez a globális inerciális koordinátarendszerünkben $x^\mu(\tau)$, ahol τ a részecske sajátideje. A világvonal időszerű geodetikus, amelynek egyenlete:

$$\frac{d^2x^\mu}{d\tau^2} + \sum_{\nu,\kappa} \Gamma^\mu_{\nu\kappa} \frac{dx^\nu}{d\tau} \frac{dx^\kappa}{d\tau} = 0. \quad (2.2.14.)$$

Ha a próbatest sebessége nem relativisztikus, akkor közelítőleg $\left(\frac{dx^\nu}{d\tau}\right) = (1, 0, 0, 0)$. Ez viszont azt jelenti, hogy a próbarészecske τ sajátideje megegyezik a $t = x^0$ koordinátaidővel, $\tau = t$. A próbarészecske négyessebességét behelyettesítjük a geodetikus egyenletébe, akkor az a

$$\frac{d^2x^\mu}{dt^2} = -\Gamma^\mu_{00} \quad (2.2.15.)$$

alakúra egyszerűsödik. A $\mu = 1, 2, 3$ komponensek esetén

$$\Gamma^\mu_{00} = \frac{1}{2}\eta^{\mu\mu}\left(\frac{\partial\gamma_{0\mu}}{\partial x^0} + \frac{\partial\gamma_{0\mu}}{\partial x^0} - \frac{\partial\gamma_{00}}{\partial x^\mu}\right) = -\frac{1}{2}\frac{\partial\gamma_{00}}{\partial x^\mu} = \frac{\partial\phi}{\partial x^\mu}, \quad (2.2.16.)$$

mivel $\gamma_{00} = -(4-2)\phi = -2\phi$. Ekkor viszont a geodetikus egyenletéből megkapjuk a ϕ gravitációs potenciálmezőben mozgó próbarészecske Newton II. törvényének megfelelő mozgásegyenletét:

$$\frac{d^2x^\mu}{dt^2} = -\frac{\partial\phi}{\partial x^\mu}, \quad (\mu = 1, 2, 3). \quad (2.2.17.)$$

Ez azt is jelenti, hogy Kepler törvényei is érvényben maradnak ebben a közelítésben. **Az általános relativitáselmélet tehát teljesen összhangban van gyenge gravitációs mező és lassan mozgó anyag, azaz próbatest esetén Newton gravitációs törvényével.**

Megjegyzés: A geodetikus egyenletét használtuk fel, amikor a próbarészecske mozgásegyenletét lineáris közelítésben levezettük. Mint láttuk, a geodetikus hipotézis, azaz hogy a szabadon eső részecskék időszerű geodetikusok mentén mozognak, az energiainpulzus-tenzor divergenciájának eltűnéséből, $\nabla^a T_{ab} = 0$ következik, ami viszont az Einstein-egyenletekből következő megszorítás az anyag mozgására. A linearizált Einstein-egyenletekből azonban a $\partial^a T_{ab} = 0$ megszorítás következik, ahol ∂^a a lapos η_{ab} metrika által

indukált kovariáns derivált, azaz az egyszerű, koordináták szerinti parciális derivált Minkowski-koordináták használata esetén. Ebből a feltételből viszont az következne, hogy a próbatest világvonala a háttér η_{ab} metrika szerinti egyenes, azaz hogy a próbatest egyáltalán nem „érzi” a metrika perturbációját. Látjuk tehát, hogy mennyire körültekintően kell a közelítésünket ahhoz megválasztani, hogy a Newton gravitációs törvényének megfelelő mozgást visszkapjuk az általános relativitáselméletből.

Megjegyzés: Meg lehet mutatni (ld. [1]), hogy ha a mozgó anyag sebességét lineáris közelítésben figyelembe vesszük, akkor a gyenge gravitációs mezőben lassan mozgó próbatestre **magneto-gravitációs** erőhatás felléptét kapjuk, amelynek erőtvénnye a Lorentz-erőtvénnyel azonos alakú.

2.3. A gravitációs sugárzás

2.3.1. Gravitációs hullámok

A forrásmentes elektromágneses mező egyik jellegzetes tulajdonsága, hogy benne elektromágneses hullámok terjedhetnek, azaz maga az elektromágneses mező is dinamikai objektum. Hasonló a helyzet az általános relativitáselméletben, a metrika (maga a téridő, azaz a gravitációs mező) dinamikai objektum. A téridő görbületében keltett inhomogenitások hullámszerűen terjedhetnek, amit gravitációs sugárzásnak nevezünk. A gravitációs sugárzás forrásaitól távol feltehetjük, hogy a metrika lényegében a lapos Minkowski-metrikához képest kicsit változik csak meg a sugárzás hatására. Ekkor a linearizált, forrásmentes Einstein-egyenleteket használhatjuk a gravitációs sugárzás leírására, amelyek Lorentz-mértékben

$$\begin{aligned}\partial^a \bar{\gamma}_{ab} &= 0, \\ \partial^c \partial_c \bar{\gamma}_{ab} &= 0\end{aligned}\tag{2.3.1.}$$

alakúak. Ezek hasonlóak, mint a forrásmentes elektromágneses mező egyenletei:

$$\begin{aligned}\partial^a A_a &= 0, \\ \partial^c \partial_c A_a &= 0.\end{aligned}\tag{2.3.2.}$$

A lényegi különbség annyi, hogy az elektromágneses sugárzást az A_a vektorpotenciál, egy $(0,1)$ -tenzor, a gravitációs sugárzást pedig a $\bar{\gamma}_{ab}$ $(0,2)$ -tenzor írja le. Az elektrodinamikában a Lorentz-mérték még nem rögzíti egyértelműen a térkonfigurációt, mert minden olyan további $A_a \rightarrow A_a + \partial_a \chi$ mértéktranszformáció megengedett, ahol a χ skalárfüggvény a $\partial^c \partial_c \chi = 0$ egyenlet megoldása. Hasonlóan, a linearizált gravitáció esetében megengedett az (2.3.1.) mértékfeltétel kirovása után minden olyan további

$$\gamma_{ab} \rightarrow \gamma'_{ab} = \gamma_{ab} + \partial_a \xi_b + \partial_b \xi_a\tag{2.3.3.}$$

mértéktranszformáció, ahol

$$\partial^c \partial_c \xi^a = 0. \quad (2.3.4.)$$

Ennek belátásához megmutatjuk, hogy a Lorentz-feltételt kielégítő bármely γ_{ab} (2.3.3.) transzformáltja is kielégíti a Lorentz-feltételt, ha a transzformáció (2.3.4.) tulajdonságú. Képezzük γ'_{ab} divergenciáját,

$$\partial^a \gamma'_{ab} = \partial^a \gamma_{ab} + \partial^a \partial_a \xi_b + \partial_b \partial^a \xi_a = \partial^a \gamma_{ab} + \partial_b \partial^a \xi_a. \quad (2.3.5.)$$

Másrészt

$$\gamma' = \gamma'^c{}_c = \gamma + 2\partial_c \xi^c \quad (2.3.6.)$$

miatt

$$-\frac{1}{2}\eta_{ab}\partial^a \gamma' = -\frac{1}{2}\eta_{ab}\partial^a \gamma - \partial_b \partial^c \xi^c \quad (2.3.7.)$$

adódik. Vonjuk ki az (2.3.5.) egyenlet oldalából az (2.3.7.) egyenlet megfelelő oldalait:

$$\partial^a \bar{\gamma}'_{ab} = \partial^a \bar{\gamma}_{ab} + \partial^a \partial_b \xi_a - \partial_b \partial^c \xi_c = \partial^a \bar{\gamma}_{ab} = 0. \quad (2.3.8.)$$

Ezt akartuk bizonyítani.

Az elektrodinamikában a Lorentz-feltétel kirovása után megmaradt mértékszabadságot arra használhatjuk fel, hogy a téridő forrásmentes tartományában **Coulomb**⁷- vagy más néven **sugárzási mértéket** rögzítsünk, azaz kirojúk az $A_0 = 0$ további mértékfeltételt.

Ez valóban mindig lehetséges, azaz tetszőleges, a Lorentz-feltételt kielégítő $(A^0, \vec{A})$ vektorpotenciálhoz találhatunk olyan, a $\partial^a \partial_a \chi = 0$ egyenletet megoldó χ függvényt, hogy $A'_a = A_a + \partial_a \chi$ olyan, hogy kielégíti a Lorentz-feltételt és $A'_0 = 0$ abban a tartományban, ahol az elektromágneses mezőnek nincsenek forrásai. Ehhez oldjuk meg először valamely tetszőlegesen választott $t = t_0$ hipersíkon a

$$\vec{\nabla} \vec{A} + \Delta \chi = 0 \quad (2.3.9.)$$

egyenletet χ -re, és jelöljük a megoldást $\chi_0(\vec{x})$ -szel. Tekintsük ezután az alábbi kezdetiértékfeladatot a teljes téridőben:

$$\partial^a \partial_a \chi = 0, \quad \chi|_{t=t_0} = \chi_0, \quad \left. \frac{\partial \chi}{\partial t} \right|_{t=t_0} = -A_0|_{t=t_0}, \quad (2.3.10.)$$

amelynek egyértelműen létezik a $\chi(t, \vec{x})$ megoldása. Ennek a χ megoldásnak a segítségével képezzük az eredeti, Lorentz-feltételt kielégítő A_a vektorpotenciálnak az A'_a mértéktranszformáltját. Ekkor $\vec{A}' = \vec{A} + \nabla \chi$ és $A'_0 = f \equiv A_0 + \frac{\partial \chi}{\partial t}$. A képzés módjából adódik, hogy A'_a is kielégíti a Lorentz-feltételt. Most már csak azt kell megmutatnunk, hogy $A'_0 = 0$. Az eredeti vektorpotenciál kielégíti az $\partial^c \partial_c A_a = -4\pi j_a$ egyenletet, ahonnan $\partial^c \partial_c A_0 = -4\pi j_0$, úgyhogy

$$\partial^c \partial_c f = -4\pi j_0. \quad (2.3.11.)$$

⁷Charles-Augustin de Coulomb, francia hadmérnök és fizikus, 1736-1806.

Az f függvény emellett kielégíti a következő kezdeti feltételeket:

$$f|_{t=t_0} = A_0|_{t=t_0} + \frac{\partial \chi}{\partial t} \Big|_{t=t_0} = 0, \quad (2.3.12.)$$

és

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial t} \Big|_{t=t_0} &= \left(\frac{\partial A_0}{\partial t} + \frac{\partial^2 \chi}{\partial t^2} \right) \Big|_{t=t_0} = \left(\vec{\nabla} \vec{A} + \frac{\partial^2 \chi}{\partial t^2} \right) \Big|_{t=t_0} \\ &= \left(-\Delta \chi + \frac{\partial^2 \chi}{\partial t^2} \right) \Big|_{t=t_0} = 0, \end{aligned} \quad (2.3.13.)$$

mivel A_a kielégíti a Lorentz-feltételt, amiből $\partial A_0 / \partial t = \vec{\nabla} \vec{A}$ adódik. Az f függvény tehát ennek a kezdetiérték-feladatnak a megoldása:

$$f(t, \vec{x}) = \int_{\Lambda_p} \frac{j_0(x')}{|\vec{x} - \vec{x}'|} dS(x'), \quad (2.3.14.)$$

ahol $x = (t, \vec{x})$ a téridő tetszőleges $p \in M$ pontjának koordinátái, az integrálás az p téridő-ponthoz tartozó Λ_p múltbeli fénykúp palástjára történik. Ha egy Ω téridő-tartomány forrásmentes, pontosabban ha e tartomány minden $p \in \Omega$ pontjához tartozó Λ_p fénykúpon, a p pont és a $t = t_0$ hiperfelület között $j_0 = 0$, akkor a kezdetiérték-feladat megoldása azonosan zérus, $f|_{\Omega} = 0$ ezen az Ω tartományon. Ezzel beláttuk, hogy forrásmentes tartományban $A'_0 = f$ csakugyan eltűnik.

Hasonlóképpen az elektrodinamika esetéhez, a linearizált gravitáció esetében bármely, a Lorentz-feltételt kielégítő γ_{ab} perturbációhoz tudunk találni a még megmaradt mértékszabadságot felhasználva olyan (2.3.3.), (2.3.4.) mértéktranszformációt, amelynek segítségével γ és $\gamma_{0\mu}$ ($\mu = 1, 2, 3$) zérussá tehető a téridő forrásmentes Ω tartományában, azaz abban a tartományban, ahol $T_{ab} = 0$:

$$\gamma|_{\Omega} = 0, \quad \gamma_{0\mu}|_{\Omega} = 0. \quad (2.3.15.)$$

Ennek megmutatásához a következőképpen járunk el. Először meghatározzuk ξ_μ és $\partial \xi_\mu / \partial t$ ($\mu = 0, 1, 2, 3$) olyan kezdőértékeit valamely tetszőlegesen választott $t = t_0$ hiperfelületen, amelyek biztosítják, hogy az (2.3.3.) transzformációval előállított γ'_{ab} eleget tegyen az (2.3.15.) mértékfeltételnek a $t = t_0$ hiperfelületen. Ezután az így kapott kezdőfeltételekkel megoldjuk ξ_μ -kre ($\mu = 0, 1, 2, 3$) az (2.3.4.) parciális differenciálegyenletrendszer. Az (2.3.3.) mértéktranszformáció eredménye:

$$\begin{aligned} \gamma' &= \gamma + 2 \frac{\partial \xi^\mu}{\partial x^\mu} = \gamma + 2 \left(-\frac{\partial \xi_0}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{\xi} \right), \\ \gamma'_{0\mu} &= \gamma_{0\mu} + \frac{\partial \xi_\mu}{\partial t} + \frac{\partial \xi_0}{\partial x^\mu}, \quad \mu = 1, 2, 3, \\ \frac{\partial \gamma'}{\partial t} &= \frac{\partial \gamma}{\partial t} + 2 \left(-\frac{\partial^2 \xi_0}{\partial t^2} + \vec{\nabla} \cdot \frac{\partial \vec{\xi}}{\partial t} \right) = \frac{\partial \gamma}{\partial t} + 2 \left(-\Delta \xi_0 + \vec{\nabla} \cdot \frac{\partial \vec{\xi}}{\partial t} \right), \\ \frac{\partial \gamma'_{0\mu}}{\partial t} &= \frac{\partial \gamma_{0\mu}}{\partial t} + \frac{\partial^2 \xi_\mu}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 \xi_0}{\partial t \partial x_\mu} = \frac{\partial \gamma_{0\mu}}{\partial t} + \Delta \xi_\mu + \frac{\partial^2 \xi_0}{\partial t \partial x_\mu}, \quad \mu = 1, 2, 3. \end{aligned} \quad (2.3.16.)$$

Ha ezeket figyelembe vesszük, akkor a

$$\gamma'|_{t=t_0} = 0, \quad \frac{\partial \gamma'_{0\mu}}{\partial t} \Big|_{t=t_0} = 0, \quad \mu = 1, 2, 3 \quad (2.3.17.)$$

feltételek kielégíthetők a $t = t_0$ hiperfelületen, ha a $(\xi_0, \xi_1, \xi_2, \xi_3)|_{t=t_0}$, $\left(\frac{\partial \xi_0}{\partial t}, \frac{\partial \xi_1}{\partial t}, \frac{\partial \xi_2}{\partial t}, \frac{\partial \xi_3}{\partial t}\right)\bigg|_{t=t_0}$ kezdeti adatok (mint a térkoordináták függvényei) olyanok, hogy az alábbi, a $t = t_0$ hiperfelületen felírt differenciálegyenletrendszer megoldásai:

$$2\left(-\frac{\partial \xi_0}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{\xi}\right) = -\gamma, \quad (2.3.18.)$$

$$\frac{\partial \xi_\mu}{\partial t} + \frac{\partial \xi_0}{\partial x^\mu} = -\gamma_{0\mu}, \quad \mu = 1, 2, 3, \quad (2.3.19.)$$

$$2\left(-\Delta \xi_0 + \vec{\nabla} \cdot \frac{\partial \vec{\xi}}{\partial t}\right) = -\frac{\partial \gamma}{\partial t}, \quad (2.3.20.)$$

$$\Delta \xi_\mu + \frac{\partial^2 \xi_0}{\partial t \partial x_\mu} = -\frac{\partial \gamma_{0\mu}}{\partial t}, \quad \mu = 1, 2, 3. \quad (2.3.21.)$$

Ennek a feladatnak létezik egyértelmű megoldása. A teljes téridőben ezután úgy választjuk meg a ξ_μ ($\mu = 0, 1, 2, 3$) függvényeket, hogy azok az (2.3.4.) parciális differenciálegyenleteknek ezen kezdeti adatokhoz tartozó megoldása legyen. Az így meghatározott ξ_a segítségével kapott γ'_{ab} mértéktranszformált perturbáció konstrukciójánál fogva továbbra is ki fogja elégíteni a Lorentz-feltételt, de a téridő forrásmentes tartományában a $\gamma' = 0$ és a $\gamma'_{0\mu} = 0$ ($\mu = 1, 2, 3$) további feltételeket is.

Az (2.3.15.) feltételeknek eleget tevő perturbáció $\gamma_{00} = 0$ tulajdonsággal is rendelkezik.

Egyrészt $\gamma = 0$ miatt $\bar{\gamma}_{ab} = \gamma_{ab}$, másrészt $\gamma_{0\mu} = 0$ ($\mu = 1, 2, 3$) miatt a Lorentz-feltételből $\frac{\partial \gamma_{00}}{\partial t} = 0$ adódik. Az (idő-idő)-komponensre vonatkozó linearizált Einstein-egyenlet ekkor

$$-16\pi T_{00} = \left(-\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \Delta\right)\gamma_{00} = \Delta\gamma_{00}. \quad (2.3.22.)$$

Ha T_{00} eltűnik az egész téridőben, akkor az egyenlet egyetlen megoldása $\gamma_{00} = \text{áll.}$ Ez pedig egy további mértéktranszformációval zérussá tehető, $\gamma_{00} = 0$, anélkül, hogy a korábbi mértékfeltételek sérülnének.

A fent leírt sugárzási mértéket választva a linearizált Einstein-egyenletek tehát

$$\partial^a \partial_a \gamma_{\mu\nu} = 0 \quad (2.3.23.)$$

alakúak, és teljesülnek a

$$\partial^a \gamma_{a\nu} = 0 \quad (\nu = 0, 1, 2, 3), \quad \gamma = 0, \quad \gamma_{0\mu} = 0 \quad (\mu = 0, 1, 2, 3) \quad (2.3.24.)$$

mértékfeltételek. Keressük ezeknek az egyenleteknek a **síkhullám-megoldásait**, azaz a

$$\gamma_{ab} = H_{ab} e^{i \sum_{\mu=0}^3 k_\mu x^\mu} \quad (2.3.25.)$$

alakú megoldásait, ahol H_{ab} állandók. A hullámegyenletből ekkor $H_{ab} \sum_{\mu=0}^3 k^\mu k_\mu = 0$, azaz $\sum_{\mu=0}^3 k^\mu k_\mu = \sum_{\mu,\nu=0}^3 \eta_{\mu\nu} k^\mu k^\nu = 0$ adódik, ami azt jelenti, hogy a gravitációs síkhullámok hullámvektorai null-vektorok. A mértékfeltételekből rendre

$$\sum_{\mu=0}^3 k^\mu H_{\mu\nu} = 0 \quad (\nu = 0, 1, 2, 3), \quad \sum_{\mu=0}^3 H^\mu_\mu = 0, \quad H_{0\mu} = 0 \quad (\mu = 0, 1, 2, 3) \quad (2.3.26.)$$

adódik. Ez a 10 darab független $H_{\mu\nu} = H_{\nu\mu}$ tenzorkomponensre 9 darab egyenlet. Azonban a $H_{0\mu} = 0$ feltételekből automatikusan következik a $\sum_{\mu=0}^3 k^\mu H_{\mu 0} = 0$ egyenlet, ezért csak 8 független egyenletünk van, úgyhogy összesen $10 - 8 = 2$ darab lineárisan független síkhullámmegoldás létezik. Ez a **gravitációs síkhullám 2 polarizációs állapotának felel meg**. Bármilyen gravitációs hullámcsomag ilyen síkhullámmódusok lineáris kombinációjaként állítható elő.

A fentiekből tehát arra következtetünk, hogy a linearizált Einstein-egyenletek megengedik gravitációs hullámok terjedését a téridő anyagmentes tartományában. Továbbá, hogy a gravitációs sugárzás kétféle polarizációs állapotú síkhullámmódusok lineáris kombinációjaként áll elő. Felmerül két további fontos kérdés. Hogyan észlelhetjük a gravitációs hullámokat, és hogyan keletkeznek a gravitációs hullámok.

2.3.2. A gravitációs sugárzás észlelésének elvi lehetősége

Először azt kell megmutatnunk, hogy a gravitációs hullámok görbület-ingadozást hoznak létre a téridőben, vagyis olyan fizikai változást, ami további mértéktranszformációval nem tüntethető el. Ehhez elegendő megmutatni, hogy a görbületi tenzor-nak vannak el nem tűnő komponensei, pl.

$$R_{\mu 00\sigma} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \gamma_{\mu\sigma}}{\partial t^2}. \quad (2.3.27.)$$

Induljunk ki abból, hogy a linearizált elméletben, Coulomb-mértékben a Christoffel-szimbólumok elsőrendűek γ_{ab} -ben és

$$\begin{aligned} \Gamma_{\mu 0}^\sigma &= \frac{1}{2} \eta^{\sigma\rho} \left(\frac{\partial \gamma_{0\rho}}{\partial x^\mu} + \frac{\partial \gamma_{\mu\rho}}{\partial x^0} - \frac{\partial \gamma_{\mu 0}}{\partial x^\rho} \right) = \frac{1}{2} \eta^{\sigma\rho} \frac{\partial \gamma_{\mu\rho}}{\partial t}, \\ \Gamma_{00}^\sigma &= \frac{1}{2} \eta^{\sigma\rho} \left(\frac{\partial \gamma_{0\rho}}{\partial x^0} + \frac{\partial \gamma_{0\rho}}{\partial x^\sigma} - \frac{\partial \gamma_{0\sigma}}{\partial x^\rho} \right) = 0. \end{aligned} \quad (2.3.28.)$$

Felhasználva ezeket és azt, hogy

$$R_{\mu\nu}{}^\sigma{}_\rho = \frac{\partial}{\partial x^\nu} \Gamma_{\mu\rho}^\sigma - \frac{\partial}{\partial x^\mu} \Gamma_{\nu\rho}^\sigma, \quad (2.3.29.)$$

kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} R_{\mu 00}{}^\sigma &= \frac{\partial}{\partial t} \Gamma_{\mu 0}^\sigma - \frac{\partial}{\partial x^\mu} \Gamma_{00}^\sigma = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \eta^{\rho\sigma} \frac{\partial \gamma_{\mu\rho}}{\partial t}, \\ R_{\mu 00\sigma} &= \eta_{\sigma\kappa} R_{\mu 00}{}^\kappa = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \gamma_{\mu\sigma}}{\partial t^2}. \end{aligned} \quad (2.3.30.)$$

Mivel a görbületi tenzor fenti komponensei nem tűnnek el a gravitációs hullámban, ezért két közeli szabadon eső test relatív gyorsulást szenved, azaz egymásra árapály-erőt gyakorol, amit a geodetikus deviáció egyenlete,

$$a^a = T^c \nabla_c (T^b \nabla_b X^a) = -R_{cbd}{}^a X^b T^c T^d \quad (2.3.31.)$$

ír le, ahol T^a az egy-paraméteres időszerű geodetikus-sereg érintővektor-mezeje, X^a pedig a geodetikus deviáció vektora. Az η_{ab} metrikájú globális inerciális koordinátarendszerben a szomszédos, X^μ relatív koordinátájú geodetikusokon szabadon eső próbatestek relatív gyorsulásának komponensei:

$$a^\mu = \sum_{\kappa, \nu} T^\kappa \frac{\partial}{\partial x^\kappa} \left(T^\nu \frac{\partial}{\partial x^\nu} X^\mu \right) = - \sum_{\nu} R_{\nu 00}{}^\mu X^\nu. \quad (2.3.32.)$$

Ha a próbatestek sebessége sokkal kisebb, mint a vákuumbeli fénysebesség, akkor a geodetikusok T^a érintővektora jó közelítéssel időirányú, azaz $(T^\mu) \approx (1, 0, 0, 0)$ és közelítőleg

$$T^0 \frac{\partial}{\partial t} \left(T^0 \frac{\partial}{\partial t} X^\mu \right) = \frac{d^2 X^\mu}{dt^2} \approx - \sum_{\nu} R_{\nu 00}{}^\mu X^\nu. \quad (2.3.33.)$$

A geodetikus deviáció egyenletének fenti alakját úgy értelmezhetjük, mint a szomszédos geodetikusok X^μ szeparációs távolságának oszcillációját leíró egyenletet. Elvileg tehát a gravitációs hullám kimutatható, ha pl. lézernyalábbal nyomon követjük két szomszédos, szabadon eső próbatest távolságának változásait. Egy másik detektálási elv az, hogy a két próbatest egy rugalmas rúd két végpontja. Ekkor a metrikának a gravitációs hullám okozta ingadozásai mechanikai feszültség-ingadozásokat hoznak létre a rúdban. Ha a gravitációs hullám frekvenciája megegyezik a rudat alkotó közeg rugalmas sajátfrekvenciájával, akkor rezonancia révén a rúd rugalmas rezgéseinek amplitúdója felerősödik és mérhetővé válhat, ismét lézernyalábok segítségével.

A gravitációs hullám kimutatása végül tehát azon alapszik, hogy a globális η_{ab} metrikájú inerciarendszerben valamely fizikailag beazonosítható távolság, mint pl. a nyugvó rúd hossza periódikusan változik. Meg lehet mérni ezt a változást? Ha olyan naív módszerre gondolnánk, hogy a hullámozó hosszúságú rúd mellé elhelyezünk egy standard vonalzót és azon olvassuk le a változást, akkor ez nem vezet eredményre, hiszen a standard vonalzót is elszenvedí a térmérika változásainak megfelelő hosszváltozásokat. Fontos azonban tudatosítani, hogy a standard vonalzót elvileg egy idealizált merev rúd, amelynek zérus a sajátfrekvenciája, ill. amelyben végtelen a rugalmas visszatérítő erő állandója. A gyakorlatban a standard méter nem egy rúd hossza, hanem a fény vákuumbeli c sebességének és a standard atomi órával mért megfelelő időtartamnak a szorzata. Ezért az oszcilláló hosszúságú rúd hossz-ingadozásainak mérését vissza lehet vezetni olyan lézernyalábos megfigyelésre, amikor nyugvó órákon sajátidő-tartamokat kell mérni. A gravitációs hullám-dektektorok működési elveinek kidolgozása és megépítése a modern fizika rohamosan fejlődő ága. Napjainkban ez a detektálási csúcstechnika tette lehetővé a gravitációs hullámok közvetlen észlelését.

2.3.3. A gravitációs sugárzás forrásai

A gravitációs sugárzás általában akkor keletkezik, ha egy gravitáló objektum gravitációsan összeomlik, úgynevezett kollapszust szenved. Gravitációs sugárzást napjainkig bináris forrásokból észleltek, amikor a rendszer két tagja a közös energia-középpont körül keringve egyre közelebb kerül egymáshoz, majd végül összeolvad miközben gravitációs sugárzást bocsát ki. Viszonylag erős gravitációs sugárzás keletkezése várható szupernóva-robbanás során is (feltéve, hogy a szupernóva nem tökéletesen gömbszimmetrikus vagy tengelyszimmetrikus, ami igen valószínűtlen). A gravitációs összeomlást szenvedő testek környezetében nagyon erős a gravitációs mező, úgyhogy a sugárzás keletkezésének tényleges leírása csak a teljes nem lineáris elmélet keretében lehetséges, a lineáris közelítés nem alkalmazható. Erre nézve nincsenek megbízható módszereink.

Mégis kaphatunk némi betekintést a gravitációs sugárzás keletkezésére, ha azt az Einstein-egyenletek lineáris közelítésében vizsgáljuk. Tegyük fel, hogy a forrás jellemző ℓ mérete sokkal kisebb, mint a kibocsátott sugárzás hullámhossza. Legyen továbbá T_{ab} a forrás anyagának energiaimpulzus-tenzora. Olyan esetet vizsgálunk, amikor a forrást vákuum (azaz gravitáló anyagtól mentes végtelen kiterjedésű tartomány) veszi körül, ebben terjed a sugárzás. A linearizált Einstein-egyenletek Lorentz-mértékben a

$$\partial^c \partial_c \bar{\gamma}_{ab} = -16\pi T_{ab} \quad (2.3.34.)$$

inhomogén hullámegyenlet alakját öltik. Kisméretű forrás esetén ennek a megoldása az η_{ab} Minkowski-metrikájú globális inerciarendszerben

$$\bar{\gamma}_{\mu\nu}(t, \vec{x}) = \frac{2}{3R} \frac{d^2 q_{\mu\nu}}{dt^2} \Big|_{\text{ret}}, \quad (2.3.35.)$$

ahol R az $\vec{x}$ pont távolsága a forrástól, $R \gg \ell$ és $q_{\mu\nu}$ a forrás gravitációs kvadrupólmomentuma, amelynek idő szerinti második deriváltját a $t' = t - R$ retardált időben kell kiszámolni.

Az (2.3.35.) egyenletet $G = c = 1$ egységrendszerben írtuk fel, tetszőleges egységrendszerben az alakja:

$$\bar{\gamma}_{\mu\nu}(t, \vec{x}) = \frac{2G}{3Rc^4} \frac{d^2 q_{\mu\nu}}{dt^2} \Big|_{\text{ret}}, \quad (2.3.36.)$$

ahol a jobb oldalt a $t' = t - (R/c)$ retardált időben kell venni.

Az inhomogén hullámegyenlet minden $\bar{\gamma}_{\mu\nu}$ -re megoldható. Az úgynevezett retardált megoldás kifejezhető a $T_{\mu\nu}$ forrás segítségével, ami lineáris közelítésben a gravitációs sugárzás forrását képező anyagnak az η_{ab} lapos háttér-metrikájú téridőben vett energiaimpulzus-tenzora:

$$\bar{\gamma}_{\mu\nu}(x) = 4 \int_{\Lambda_x} \frac{T_{\mu\nu}(x')}{|\vec{x} - \vec{x}'|} dS(x'), \quad (2.3.37.)$$

ahol Λ_x az x pont múltbeli fénykúpja, amelyen a 3-dimenziós (hiperfelületelem) térfogatelem $dS(x') = r^2 dr d\Omega$. A retardált megoldás automatikusan kielégíti a $\partial^\mu \bar{\gamma}_{\mu\nu} = 0$ mértékfeltételt is, mivel $\partial^a T_{ab} = 0$. Az elektrodinamikában a forrás által keltett elektromágneses mezőt multipólus-járulékok sorának összegeként szoktuk előállítani. Abban az esetben, amikor a forrás térbeli R_f mérete sokkal kisebb, mint a sugárzás λ hullámhossza, $R_f \ll \lambda$, akkor dipólus-közelítésről szokás beszélni, mert a forrás dipólmomentuma határozza meg a forrástól nagy $R \gg \lambda$ távolságban a sugárzás keltette elektromágneses mezőt. Most is az a célunk, hogy a gravitációs mezőt az $R_f \ll \lambda = (2\pi/\omega) \ll R$ feltételek mellett vizsgáljuk. Képezzük ezért először $\bar{\gamma}_{\mu\nu}(t, \vec{x})$ -nek az időváltozó szerinti Fourier-transzformáltját:

$$\hat{\bar{\gamma}}_{\mu\nu}(\omega, \vec{x}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \bar{\gamma}_{\mu\nu}(t, \vec{x}) e^{i\omega t} dt. \quad (2.3.38.)$$

Írjuk ki explicit módon a retardált energiaimpulzus-tenzor t -függését,

$$T_{\mu\nu}(x') = T_{\mu\nu}(t - |\vec{x} - \vec{x}'|, \vec{x}'), \quad (2.3.39.)$$

ami figyelembe veszi, hogy x' az $x = (t, \vec{x})$ ponthoz tartozó múltbeli fénykúp tetszőleges pontja. A (2.3.39.) mennyiség t változó szerinti Fourier-transzformáltja:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} dt T_{\mu\nu}(x') &= \int_{-\infty}^{\infty} T_{\mu\nu}(t - |\vec{x} - \vec{x}'|, \vec{x}') e^{i\omega t} dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} T_{\mu\nu}(t'', \vec{x}') e^{i\omega(t'' + |\vec{x} - \vec{x}'|)} dt'' = \hat{T}_{\mu\nu}(\omega, \vec{x}') e^{i\omega|\vec{x} - \vec{x}'|}, \end{aligned} \quad (2.3.40.)$$

aminek segítségével azt kapjuk, hogy a retardált megoldás Fourier-transzformáltja

$$\hat{\bar{\gamma}}_{\mu\nu}(\omega, \vec{x}) = 4 \int \frac{\hat{T}_{\mu\nu}(\omega, \vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|} e^{i\omega|\vec{x} - \vec{x}'|} d^3x'. \quad (2.3.41.)$$

Itt az $e^{i\omega|\vec{x} - \vec{x}'|}$ szorzó azért jelent meg az integrandusban, mert a múltbeli fénykúpra kellett integrálni, amelyen $t' = |\vec{x} - \vec{x}'|$. Némi egyszerűsödést jelent, hogy a (tér-tér)-komponensekből a Lorentz-feltétel segítségével megkaphatjuk az (idő-tér)-komponenseket,

$$-i\omega \hat{\bar{\gamma}}_{0\mu} = \sum_{\nu=1}^3 \frac{\partial \hat{\bar{\gamma}}_{\nu\mu}}{\partial x^\nu}, \quad \mu = 1, 2, 3. \quad (2.3.42.)$$

Ezért az energiaimpulzus-tenzor (tér-tér)-komponenseinek meghatározásával foglalkozunk a továbbiakban.

Mivel a forrástól távol keressük a $\hat{\bar{\gamma}}_{\mu\nu}(\omega, \vec{x})$ ($\mu, \nu = 1, 2, 3$) megoldást és a sugárzás hullámhossza jóval nagyobb, mint a forrás lineáris mérete, ezért az $e^{i\omega|\vec{x} - \vec{x}'|}$ tényező csak elhanyagolható mértékben változik a forráson belül, amelyre a térfogati integrál vonatkozik. Ezért jó közelítéssel használhatjuk a retardált megoldás (2.3.41.) képletében az

$$\frac{e^{i\omega|\vec{x} - \vec{x}'|}}{|\vec{x} - \vec{x}'|} \approx \frac{e^{i\omega R}}{R} \quad (2.3.43.)$$

közelítést, és ezt a tényezőt kiemelhetjük az integrálás jele alól:

$$\hat{\bar{\gamma}}_{\mu\nu}(\omega, \vec{x}) \approx 4 \frac{e^{i\omega R}}{R} \int \hat{T}_{\mu\nu}(\omega, \vec{x}') d^3x', \quad \mu, \nu = 1, 2, 3. \quad (2.3.44.)$$

Az energiainpulzus-tenzor (tér-tér)-komponenseinek integrálját alakítsuk át:

$$\begin{aligned}\int \hat{T}^{\mu\nu}(\omega, \vec{x}') d^3 x' &= \sum_{\alpha=1}^3 \int \hat{T}^{\alpha\nu}(\omega, \vec{x}') \delta_{\alpha}^{\mu} d^3 x' = \sum_{\alpha=1}^3 \int \hat{T}^{\alpha\nu}(\omega, \vec{x}') \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x'^{\alpha}} d^3 x' \\ &= \sum_{\alpha=1}^3 \left[\int \frac{\partial}{\partial x^{\alpha}} (\hat{T}^{\alpha\nu} x^{\mu}) d^3 x - \int \frac{\partial \hat{T}^{\alpha\nu}}{\partial x^{\alpha}} x^{\mu} d^3 x \right].\end{aligned}\quad (2.3.45.)$$

A térfogati integrálokat formálisan a teljes 3-dimenziós térre vesszük, de el nem tűnő járuléka csak a forrás tartományából származik. A jobb oldalon a szögletes zárójelben az első integrált a 3-dimenziós Gauss-tétel segítségével felületi integrállá alakítjuk. A végtelen távoli határfelületen a forrás anyageloszlása zérussá válik, úgyhogy ennek a tagnak a járuléka zérus. A jobb oldalon a szögletes zárójelben szereplő második integrált az $\sum_{\mu=0}^3 (\partial T^{\mu\nu} / \partial x^{\mu}) = 0$ feltételt, pontosabban az ebből adódó

$$\begin{aligned}\frac{\partial T^{0\nu}}{\partial t} &= - \sum_{\alpha=1}^3 \frac{\partial T^{\alpha\nu}}{\partial x^{\alpha}}, \\ -i\omega \hat{T}^{0\nu} &= - \sum_{\alpha=1}^3 \frac{\partial \hat{T}^{\alpha\nu}}{\partial x^{\alpha}}\end{aligned}\quad (2.3.46.)$$

összefüggést felhasználva alakítjuk át,

$$\int \hat{T}^{\mu\nu}(\omega, \vec{x}') d^3 x' = -i\omega \int \hat{T}^{0\nu} x^{\mu} d^3 x = -\frac{i\omega}{2} \int (\hat{T}^{0\nu} x^{\mu} + \hat{T}^{0\mu} x^{\nu}) d^3 x. \quad (2.3.47.)$$

Mivel $\hat{T}^{\mu\nu}(\omega, \vec{x})$ szimmetrikus a μ, ν indexekben, ezért szimmetrizáltuk a kapott kifejezést. A további átalakítás során ismételten felhasználjuk a 3-dimenziós Gauss-tételt, majd a lokális energiamegmaradást. Azt találjuk, hogy

$$\begin{aligned}\int \hat{T}^{\mu\nu}(\omega, \vec{x}') d^3 x' &= -\frac{i\omega}{2} \int (\hat{T}^{0\nu} x^{\mu} + \hat{T}^{0\mu} x^{\nu}) d^3 x = -\frac{i\omega}{2} \int \left(\sum_{\beta=1}^3 \hat{T}^{0\beta} x^{\mu} \frac{\partial x^{\nu}}{\partial x^{\beta}} + \hat{T}^{0\mu} x^{\nu} \right) d^3 x \\ &= -\frac{i\omega}{2} \int \left[\sum_{\beta=1}^3 \left(\frac{\partial}{\partial x^{\beta}} (\hat{T}^{0\beta} x^{\mu} x^{\nu}) - \hat{T}^{0\beta} \delta_{\beta}^{\mu} x^{\nu} - \frac{\partial \hat{T}^{0\beta}}{\partial x^{\beta}} x^{\mu} x^{\nu} \right) + \hat{T}^{0\mu} x^{\nu} \right] d^3 x \\ &= \frac{i\omega}{2} \int \sum_{\beta=1}^3 \frac{\partial \hat{T}^{0\beta}}{\partial x^{\beta}} x^{\mu} x^{\nu} d^3 x = -\frac{\omega^2}{2} \int \hat{T}^{00} x^{\mu} x^{\nu} d^3 x \\ &= -\frac{\omega^2}{6} \hat{q}^{\mu\nu}, \quad \mu, \nu = 1, 2, 3,\end{aligned}\quad (2.3.48.)$$

ahol bevezettük a forrás anyageloszlásának kvadrupólmomentumát,

$$q^{\mu\nu} = 3 \int T^{00} x^{\mu} x^{\nu} d^3 x, \quad \mu, \nu = 1, 2, 3. \quad (2.3.49.)$$

Ha ezt behelyettesítjük az (2.3.44.) egyenlőség jobb oldalába, akkor megkapjuk a gravitációs sugárzásra vonatkozó (2.3.35.) képletet.

A gravitációs sugárzás keletkezésére vonatkozó, a linearizált Einstein-egyenletek alapján végzett vizsgálatunkból tehát azt látjuk, hogy a sugárzáshoz kis forrástól nagy távolságban a forrás kvadrupólmomentumának oszcillációja adja a vezető rendű járulékat. A dipólsugárzás nem jelenik meg. Utóbbi érthető, hiszen az impulzus-megmaradás megtiltja, hogy az anyag tömeg-, azaz energiaközéppontja oszcilláljon a térben, vagyis hogy oszcilláló dipólmomentum keletkezzen.

2.3.4. A gravitációs sugárzásban távozó energia

A gravitációs sugárzásban távozó energia meghatározása nem nyilvánvaló. Ez abból adódik, hogy nem világos, mekkora lokális energiasűrűséget kell tulajdonítanunk a gravitációs mezőnek. Az általános relativitáselméletben a metrika egyszerre hordozza magában a gravitációs mező dinamikai jellemzőit és a mérték-szabadságot jellemző változókat. A metrikát azonban nem tudjuk úgy felbontani, hogy ez a két dolog explicit módon szétváljon. Ennek ellenére egy **izolált rendszer teljes energiája** értelmezhető annak alapján, hogy milyen a gravitációs mező, azaz a téridő metrikája az izolált testtől nagy távolságban. Ez a teljes energia az izolált test anyagától, az általa keltett gravitációs mezőtől és az anyag és a gravitációs mező kölcsönhatásából származó energia-járulékokból nem szétválasztható módon tevődik össze. Ugyancsak értelmezhető az izolált test által keltett gravitációs sugárzásban távozó energiafluxus.

Az Einstein-egyenletek az anyagmentes téridő-tartományban a γ_{ab} metrikában lineáris közelítésben

$$G_{ab}^{(1)}[\gamma_{cd}] = 0 \quad (2.3.50.)$$

alakúak, ahol $G_{ab}^{(1)}$ az Einstein-tenzor γ_{ab} -ben lineáris tagokkal bezárólag. Ha figyelembe vesszük a γ_{ab} perturbációban kvadratikusan tagokat is, akkor a Ricci-tenzor és a skalárgörbület rendre $R_{ab}^{(2)}$ és $R^{(2)}$ járulékokat kapnak, amelyek a γ_{ab} perturbációban kvadratikusak. Ebben a közelítésben azonban az Einstein-tenzor nem fog eltűnni, $G_{ab}^{(1)}[\gamma_{cd}] + G_{ab}^{(2)}[\gamma_{cd}] \neq 0$, ahol $G_{ab}^{(2)} = R_{ab}^{(2)} - \frac{1}{2}g_{ab}R^{(2)}$. Ha azonban a γ_{ab} metrikát alkalmas $\gamma_{ab}^{(2)}$ korrekció hozzáadásával módosítjuk, akkor elérhetjük, hogy $G_{ab}^{(1)}[\gamma_{cd} + \gamma_{cd}^{(2)}] + G_{ab}^{(2)}[\gamma_{cd}] = 0$ legyen. Mivel itt az első tag γ_{cd} -ben lineáris, ezért a megfelelő feltétel a $\gamma_{cd}^{(2)}$ korrekció megválasztásához

$$G_{ab}^{(1)}[\gamma_{cd}^{(2)}] + G_{ab}^{(2)}[\gamma_{cd}] = 0. \quad (2.3.51.)$$

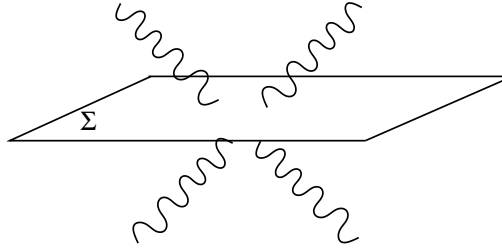
Ezt a feltételt átírhatjuk

$$G_{ab}^{(1)}[\gamma_{cd}^{(2)}] = 8\pi t_{ab} \quad (2.3.52.)$$

alakba, ahol

$$t_{ab} = -\frac{1}{8\pi}G_{ab}^{(2)}[\gamma_{cd}] \quad (2.3.53.)$$

formálisan olyan szerepet tölt be, mintha energiaimpulzus-tenzor lenne, ami azonban most nem az anyagtól származik, hanem a gravitációs mezőtől. Azt az értelmezést, hogy t_{ab} -t a gravitációs mező energiaimpulzus-tenzorának tekintsük még az is sugallja, hogy $t_{ab} = t_{ba}$ szimmetrikus tenzor, továbbá hogy be lehet látni a divergenciájának eltűnését, $\partial^a t_{ab} = 0$, feltéve, hogy γ_{ab} a vákuumra vonatkozó linearizált



1. ábra. A γ_{ab} perturbációhoz tartozó teljes energia kiszámításakor a Σ térszerű hiperfelületre integrálunk.

Einstein-egyenletek megoldása. Mindez arra utal, hogy t_{ab} olyan, mintha a gravitációs mezőnek az energiaimpulzus-tenzora lenne, ami a lapos téridőhöz képesti eltérést kvadratikus tagokkal bezárólag veszi figyelembe. Ezt az értelmezést azonban nem szabad szó szerint venni, amire két dolog is utal. A t_{ab} tenzor nincsen egyértelműen meghatározva és nem mértékinvariáns, azaz megváltozik infinitezimális lokális koordináta-transzformációk során, $\gamma_{ab} \rightarrow \gamma_{ab} + 2\partial_{(a}\xi_{b)}$.

Mindezzel együtt jól definiált a γ_{ab} perturbációhoz tartozó **teljes energia**,

$$E = \int_{\Sigma} t_{00} d^3x, \quad (2.3.54.)$$

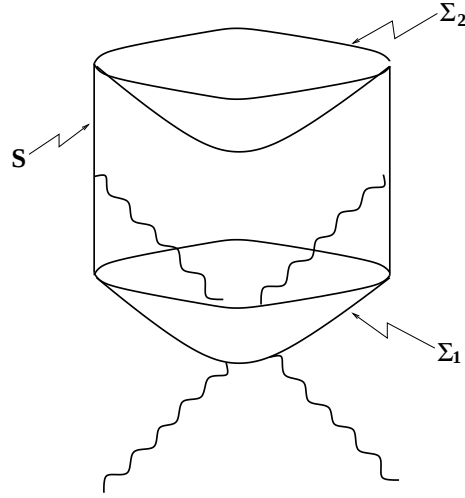
ahol az integrálás a Σ térszerű hiperfelületre történik (ld. a 1. ábrát). Az E teljes energia mértékinvariáns minden olyan lokális infinitezimális koordináta-transzformációval szemben, amely megőrzi a metrika aszimptotikus laposságát, amennyiben az $\eta_{ab} + \gamma_{ab}$ metrika aszimptotikusan lapos, azaz a globális inerciális háttér-koordináta-rendszerben γ_{ab} -nek a komponensei és azok deriváltjai $r \rightarrow \infty$ esetén kellően gyorsan zérushoz tartanak: $\gamma_{\mu\nu} \sim 1/r$, $\partial_{\rho}\gamma_{\mu\nu} \sim 1/r^2$, $\partial_{\sigma}\partial_{\rho}\gamma_{\mu\nu} \sim 1/r^3$. (Ezek a feltételek biztosítják az (2.3.54.) integrál konvergenciáját.) Ekkor az E teljes energia egyértelműen meghatározott annak dacára, hogy t_{ab} nincsen egyértelműen meghatározva.

A lokális energiaáram-sűrűség, $-t^a_0$ szintén nem mértékinvariáns. A

$$\Delta E = - \int_S t_{a0} dS^a \quad (2.3.55.)$$

teljes kisugárzott energia azonban mértékinvariáns, ha a következő feltételek teljesülnek:

1. A téridő kezdetben és hosszú idő után stacionárius (azaz $\eta_{ab} + \gamma_{ab}$ időtől független) és csak egy közbülső időszakban függ az időtől.
2. A kezdeti és a végső stacionárius tartományokban felvesszük a Σ_1 és Σ_2 aszimptotikusan (ha $r \rightarrow \infty$) null-hiperfelületeket, majd az ezek közötti téridő-tartomány térbeli végtelenben elhelyezkedő S időszerű hiperfelületére integrálunk (ld. a 2. ábrát).



2. ábra. A teljes kisugárzott energia meghatározásához használt felületek sematikus ábrája.

3. Feltételezzük, hogy γ_{ab} -re teljesülnek az aszimptotikus laposság feltételei az $r \rightarrow \infty$ határesetben a Σ_1 és Σ_2 aszimptotikusan null-felületek mentén.

Az (2.3.53.) és (2.3.54.) összefüggéseket alkalmazva a gravitációs sugárzást jellemző (2.3.35.) perturbációra hosszadalmas számolással adódik a következő eredmény (ld. [1]):

$$\Delta E = \int P dt, \quad P = \frac{1}{45} \sum_{\mu, \nu=1}^3 \left(\frac{d^3 Q_{\mu\nu}}{dt^3} \Big|_{\text{ret}} \right)^2, \quad (2.3.56.)$$

ahol $Q_{\mu\nu}$ a kvadrupólmomentum-tenzor spúrmentes része, $Q_{\mu\nu} = q_{\mu\nu} - \frac{1}{3}\delta_{\mu\nu}q$, $q = \sum_{\mu=1}^3 q_{\mu}^{\mu}$. A gravitációs sugárzásban távozó energia fluxusa rendkívül kicsi, a [1] tankönyvben található becslés szerint az M nyugalmi tömegű, L hosszúságú, középpontja körül Ω szögsebességgel a rúdra merőleges tengely körül forgó rúd esetében $P = \frac{2G}{45c^5} M^2 L^4 \Omega^6$, ahol G a Newton-féle gravitációs állandó, c vákuumbeli fénysebesség. Ha $M = 1\text{kg}$, $L = 1\text{m}$ és $\Omega = 1\text{s}^{-1}$, akkor $P = 10^{-54}\text{J/s}$. Ha a rúd lineáris mérete kozmikus méretű, még akkor is nagyon kicsi marad az időegység alatt kisugárzott energia. Ahhoz, hogy mérhető effektust remélhessünk a gravitációs sugárzás során kibocsátott energiaáram-sűrűségtől, olyan forrásra van szükség, amelyben nagyon erős gravitációs mező uralkodik, mint például kozmikus objektumok gravitációs összeomlása során.

2.3.5. Gravitációs hullámok észlelése

1. *Gravitációs hullámot közvetett módon észleltek*⁸ bináris rendszerben, amiért Nobel-díjat adtak a felfedezőknél. A PSR B1913-16 egy pulzár⁹ (egy erősen mágnesezett, rádióhullámokat kibocsátó dipólsugárzó, tengelye körül forgó neutroncsillag), amely egy másik neutroncsillaggal együtt alkot bináris rendszert. A két neutroncsillag közös tömegközéppontjuk körül kering. A pulzár a forgása miatt sugároz periódikusan, ennek periódusideje pontos óráként használható a megfigyelések során. A pulzálás periódusideje 59 ms, az elliptikus pályán a keringési idő 7,75 h. A megfigyelések kezdete óta (2018-ig kb. 40 év alatt) fokozatosan csökken a bináris rendszer tagjainak legkisebb távolsága. Ennek a megfigyelt mértéke pontosan összhangban van az általános relativitáselmélet alapján végzett számítással, ami azon a feltevésen alapszik, hogy a bináris rendszer fokozatosan energiát veszít gravitációs sugárzás révén. A mért és az elméletileg becsült összehúzóási sebességek aránya $0,997 \pm 0.002$.

A *gravitációs hullámok* közvetlen kimutatására számos kísérlet indult kb. az 1960-es évektől kezdve, jóllehet kb. egy fél évszázadon át nem sikerült gravitációs hullámokat közvetlen módon észlelni. Az egyik detektálási elv, hogy egy fém rúd (a Weber¹⁰-rúd esetében egy 2 m hosszú, 1 m átmérőjű alumínium henger) szolgál gravitációs antennaként. Az elképzelés az, hogy a rúd rugalmas rezgéseinek sajátfrekvenciájával (1660 Hz) egyező frekvenciájú gravitációs hullám rezonanciát gerjeszt. A berendezést eredetileg az SN1987A szupernóva-robbanás során keletkezett gravitációs hullámok detektálása céljából tervezték. A detektor kb. 10^{-16} m-es hosszváltozást lett volna képes érzékelni piezoelektromos szenzorok segítségével. Az elv számos továbbfejlesztése ismeretes. Eddig ezen az elven nem sikerült gravitációs hullámokat észlelni.

Egy másik elvet képviselnek a lézer-interferometriás alapon működő detektorok, amelyek két távoli, „szabadon eső” anyagi pont közötti távolság gravitációs hullámok okozta változásának kimutatását szolgálják. Ezen az elven működnek a LIGO (Laser Interferometer Gravitational-Wave Observatory, USA) és a Virgo kollaboráció (Olaszország) gravitációs hullám-detektorai. Ezek 3 darab, a Föld különböző pontján elhelyezett Michelson¹¹-interferométert jelentenek, amelyek mindegyikének 4 km-es, egymásra merőleges két karja van. Az interferométer tükreinek távolságában az interferométeren áthaladó

⁸Russell Alan Hulse, amerikai fizikus, 1950-; Joseph Hooton Taylor Jr., amerikai fizikus, 1941-

⁹Az első pulzárt 1967-ben Dame Susan Jocelyn Bell Burnell (ír asztrofizikus, 1943-) fedezte fel, és azt doktori témavezetőjével, Antony Hewish-sal (brit rádiócsillagász, 1924-) közösen publikálta. Hewish a pulzárok felfedezésében betöltött meghatározó szerepéért 1974-ben Martin Ryleval (angol rádiócsillagász, 1918-1984) megosztott Nobel-díjat kapott, Burnell a felfedezéséért 2018-ban megkapta a fizikában nagy áttörést jelentő felfedezésekért járó díjat.

¹⁰Joseph Weber, amerikai fizikus, 1919-2000

¹¹Albert Abraham Michelson, amerikai fizikus, 1852-1931.

gravitációs hullám hatására periodikus változás következik be. A karok hossz-változását interferometriás úton mérik. A pontosságot jellemzi, hogy a 4 km-es karhossznak olyan kis megváltozását ki tudják mutatni, ami kisebb, mint a proton töltéssugarának tízezred része (kb. 10^{-19} relatív hosszúság-változás). Az áthaladó gravitációs hullám a detektor egyik karját megnyújtja, a másikat összehúzza, és ez eredményez változást az interferenciaképben. A várható legerősebb gravitációs hullámok is csak 10^{-18} m változást tudnak okozni a karok hosszában. A LIGO-Virgo együttműködés 2016-ban jelentette először gravitációs hullám észlelését, amelyről bebizonyosodott, hogy két feketelyukból álló bináris rendszer tagjainak egymásba zuhanása váltotta ki. Említésre érdemes, hogy amíg egy ilyen bináris rendszer évmillióig kering a közös tömegközéppont körül, a közvetlenül észlelhető intenzív gravitációs hullámok az egymásbaolvadás előtti kevesebb, mint egy perc alatt emittálódnak. 2017-ben észleltek először olyan gravitációs hullámot, amelyet optikai teleszkópokkal megfigyelhető jelenség is kísért; a sugárzás két neutroncsillag összezuhánásából származott. Azóta (2018 márciusáig) további 6 gravitációs hullám-kisugárzást észleltek. A gravitációs hullámok közvetlen detektálása területén elindult tehát egy olyan rohamos fejlődés, amely új távlatokat nyit a Világegyetem megfigyelésének területén.

Megjegyzés: Egy fontos új fejlesztési irányt jelölt ki a LISA (Laser Interferometer Space Antenna), az első űrben telepített lézer-interferometrián alapuló gravitációs hullám-detektor. Ennek továbbfejlesztése az eLISA (Evolved Laser Interferometer Space Antenna), amely 3 darab, egy egyenlő oldalú háromszög csúcaiban elhelyezkedő, Nap körüli pályán keringő űrállomásból áll. Mindegyik űrállomáson 2 teleszkóp, 2 lézer és 2 tesztömeg található, amelyek úgy vannak a másik két űrállomás megfelelő eszközei felé irányítva, hogy mindegyik űrállomás egy-egy Michelson-interferométer centruma legyen. Az interferométerek karjait a platina-arany tesztömegek zárják le, a karok hossza 1 millió km. Az egész rendszer mérete kb. 10-szer akkora, mint a Hold pályája, és kb. a Naptól és a Földtől egyenlő távolságra (kb. 50 millió km) fog a Nap körül keringeni.

Hivatkozások

- [1] Robert M. Wald, *General relativity* (The Univ. of Chicago Press, Chicago, 1984).
- [2] S. W. Hawking, G. F. R. Ellis, *The large-scale structure of space-time* (Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1973).
- [3] R. Arnowitt, S. Deser, C.W. Misner, „*The Dynamics of General Relativity*”, *Gravitation: An Introduction to Current Research* ed. by L. Witten (Wiley, New York, 1962).

- [4] A.E. Fischer, J.E. Marsden, „*The Initial Value Problem and the Dynamical Formulation of General Relativity*”, *General Relativity, an Einstein Centenary Survey* ed. by S.W. Hawking, W. Israel (Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1979).