

ÁLTALÁNOS RELATIVITÁSELMÉLET HALADÓKNAK

Sailer Kornél

Az [1] tankönyv alapján készült oktatási segédanyag.

Elméleti Fizikai Tanszék
Debreceni Egyetem
Debrecen
2015-2018

Tartalomjegyzék

1. Homogén és izotróp kozmológia	5
1.1. A Robertson-Walker-metrika	5
1.1.1. A Világegyetem homogenitását és izotrópiáját alátámasztó megfigyelések	5
1.1.2. A térben homogén és izotróp Világegyetem görbülete	6
1.1.3. Homogén és izotróp téridő metrikája	9
1.2. A Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker-téridő (FLRW-téridő)	10
1.2.1. A Friedmann-egyenletek	10
1.2.2. A Hubble-törvény és a sztatikus Világegyetem kérdése. A kozmológiai állandó	13
1.2.3. A Nagy Bumm	16
1.2.4. A Világegyetem energiasűrűségének változása	17
1.2.5. A táguló Világegyetem jövője	18
1.2.6. A kozmológiai vöröseltolódás	20
1.2.7. A horizontok	22
2. A Schwarzschild-megoldás	28
2.1. A téridő sztatikus, gömbszimmetrikus test környezetében	28
2.1.1. A sztatikus és a sztatikus és gömbszimmetrikus téridő metrikája	28
2.1.2. Téridő sztatikus, gömbszimmetrikus testen kívül	31
2.2. A téridő sztatikus, gömbszimmetrikus test belsejében	37
2.2.1. A csillagok kritikus tömege	41
2.3. Geodetikusok a Schwarzschild-téridőben	43
2.3.1. Gravitációs vöröseltolódás Schwarzschild-téridőben	43
2.3.2. Az időszerű és a null-geodetikusok egyenlete	46
2.3.3. A Kepler-törvények általánosítása	48
2.3.4. A fénygörbülés	51
2.4. A Kruskal-Szekeres-féle kiterjesztés. Gravitációs összeomlás	54
2.4.1. A szingularitásokról általában	54
2.4.2. Példa a kiterjesztésre: a 2-dimenziós Rindler-téridő	55
2.4.3. A Schwarzschild-metrika kiterjesztése	57

1. Homogén és izotróp kozmológia

1.1. A Robertson-Walker-metrika

1.1.1. A Világegyetem homogenitását és izotrópiáját alátámasztó megfigyelések

Az általános relativitáselmélet abba a helyzetbe hozta a fizikusokat, hogy feltehették a kérdést, létezik-e az Einstein-egyenleteknek olyan megoldása, azaz olyan téridő, ami megfelel az általunk megfigyelt téridőnek, azaz a látható Világegyetemnek. Ahhoz, hogy erre a kérdésre válaszolni tudjunk, szükségünk van részben csillagászati-fizikai megfigyeléseink tapasztalataira, részben az anyag viselkedésére vonatkozó fizikai ismereteinkre, továbbá a Világegyetem természetére vonatkozó feltevésekre.

A Világegyetemre vonatkozó megfigyeléseink az utóbbi évtizedekben nagyon jelentősen gyarapodtak. Mindezzel együtt azonban tudomásul kell vegyünk, hogy megfigyelési módszereinkkel kb. addig tudunk csak „visszanézni” a Világegyetem múltjába, amikor megtörtént az elektromosan semleges (atomokba szerveződött) anyag lecsatolódása az elektromágneses sugárzásról. Az anyag fizikai viselkedésére vonatkozó fizikai ismereteink kb. olyan energiaskálákig terjednek ki a nagyenergiás irányban, ami megfelel az esetleges nagy-egyesített elmélet (GUT, azaz Grand Unified Theory) energiaskálájának. Ennek a korlátozott ismeretnek az a következménye, hogy nem ismerjük, mi volt az anyag energiaimpulzus-tenzora a Világegyetem korai fejlődése idején.

A Világegyetem természetére vonatkozó elképzelések nagy mértékben változtak a tudomány története során. Kopernikust¹ megelőzően az a nézet uralkodott, hogy a Világegyetem középpontjában a Föld foglal helyet, s ez kitüntetett szerepet jelent a Föld számára. Kopernikusz ismerte fel, hogy a Föld nincsen (azaz a mi emberlakta világunk nincs) kitüntetett helyzetben a Világegyetemben. Érdemes megjegyezni, hogy továbbra is leírhatjuk a jelenségeket a Földhöz rögzített vonatkoztatási rendszerben, de ugyanúgy megtehetjük azt a Naphoz rögzített vonatkoztatási rendszerben is. A hangsúly azon van, hogy a Földhöz rögzített vonatkoztatási rendszer nincsen kitüntetve a fizika törvényei által semmilyen más vonatkoztatási rendszerhez képest. A newtoni mechanika egyik alapelve a Galilei-féle relativitási elv, amely szerint minden inerciarendszer egyenértékű a mechanikai törvények szempontjából. Már Galilei olyan példákat hozott a relativitási elvre, amelyből kitűnik, hogy nemcsak a mechanikai törvények, hanem a Természet törvényeinek abszolút érvényére gondolt. Ezt végül az inerciarendszerek vonatkozásában az Einstein által kidolgozott speciális relativitáselmélet fogalmazta meg a speciális relativitási elvben. Einstein az általános relativitáselméletben tovább vitte a kopernikuszi gondolatot. Nemcsak, hogy a Föld, de a Naprendszerünk, sőt a galaxisunk, a Tejútrendszer, amelyben helyet foglalunk, sincsen kitüntetve a Világegyetemben. Az általános relativitáselméletben Einstein a természeti törvények egyetemességének gondolatát még általánosabb alakba öntötte. A Természet törvényei nem tüntetnek ki semmilyen koordináta-rendszert a téridőben, tenzoregyenletek írják le őket, amelyek alakja változatlan marad az általános koordináta-transzformációkkal szemben.

A csillagászati-fizikai megfigyelések alapján azt lehet sejteni, hogy a Világegyetem a 100 Mpc és az annál nagyobb méretskálákon homogén és izotróp. Erre több minden utal. A Világegyetem nagyléptékű szerkezetére vonatkozó mai ismeret-

¹Nicolaus Copernicus, lengyel matematikus és csillagász, 1473-1543.

teink elsősorban a Sloan Digital Sky Survey kutatási programnak köszönhetőek, amely 2000 óta egymást követő fázisokban folyik. Ez az emberiség eddigi legnagyobb vállalkozása arra, hogy minél részletesebben és pontosabban feltérképezze a látható Világegyetemet, amelynek átmérője kb. 28 Gpc (≈ 91 milliárd fényév $\approx 8,8 \cdot 10^{26}$ m). Bár a kb. 100 Mpc méretekben kiátlagolva a Világegyetem anyagának sűrűsége állandónak látszik minden irányban minden helyen, a finomabb felbontás habszerű szerkezetet mutat, amit a Világegyetem nagyléptékű szerkezeteként (large-scale structure) vagy kozmikus hálóként (cosmic web) szoktak emlegetni. A Világegyetem nagy, kb. 10-150 Mpc átmérőjű üregekből áll, amelyeket falak határolnak, ahol a galaxisok koncentrálódnak. A falakon belül kb. 10 Mpc hosszúságú ágakból álló szálak hálózatot (filament) alkotnak a galaxisok. A falak találkozásainál galaxisfürtök (galaxy cluster) alakulhatnak ki, amelyek kb. 50-1000 galaxisból álló, kb. 2-10 Mpc átmérőjű halmazok. A Világegyetem anyageloszlása azonban a 100 Mpc léptékben már homogénnek és izotrópnak látszik. Ezt több megfigyelés is alátámasztja. A rádióforrások leszámllása alapján, továbbá a háttér Röntgen²-sugárzás és γ -sugárzás megfigyelése alapján a megfelelő források izotróp eloszlására lehetett következtetni. A kozmikus mikrohullámú háttérsugárzás (CMB, Cosmic Microwave Background Radiation) megfigyelése és részletes analízise az utóbbi évtizedekben minden eddiginél sokkal nagyobb pontossággal erősítette meg azt, hogy a Világegyetem izotróp. Ma 2,73 K hőmérsékletű háttérsugárzást észlelünk; olyan sugárzást, ami minden korábban ismert feketest-sugárzónál nagyobb pontossággal követi a Planck³-törvényt. A kozmikus mikrohullámú háttérsugárzás azóta terjed szabadon a Világegyetemben, hogy a töltött részecskék semleges atomokat alkottak, azaz rekombinálódtak a hűlő és táguló Világegyetemben (a protonok és az elektronok H-atomokat alkottak). Ettől a rekombinációtól napjainkig a sugárzás hőmérséklete kb. 1100-ad részére csökkent a Világegyetem tágulása következtében. A kozmikus mikrohullámú háttérsugárzás jelenlegi megfigyelt hőmérséklete, $T = 2,7255 \pm 0,0006 K$ $k_B T \approx 0,23$ meV energiának felel meg. A Világegyetem különböző irányából érkező kozmikus mikrohullámú háttérsugárzás hőmérsékletének relatív ingadozása 10^{-5} nagyságrendű. Ez bizonyítja, hogy a Világegyetem térben nagy pontossággal izotróp. A modern kozmológia, mint a fizika és a csillagászat határterületén kifejlődött új tudományág alapelveként fogadja el, hogy a Világegyetem (térben) homogén és izotróp. Ezt nevezik **kozmológiai elvnek** (cosmological principle).

1.1.2. A térben homogén és izotróp Világegyetem görbülete

A homogenitás azt jelenti, hogy „adott időpillanatban” a „tér” minden pontja „egyenértékű”, az izotrópia pedig azt, hogy a „térben” minden irány „egyenértékű”, bárhol is állunk a „térben”. A kérdés az, hogy hogyan lehet ezeknek az állításoknak pontos matematikai jelentést adni, milyen kell legyen a homogén és izotróp Világegyetemenek megfelelő téridő-sokaság. Azért tettük az időpillanat, tér és egyenértékű szavakat idézőjelbe, mert ezeknek kell pontos matematikai jelentést adni. A következő feltevésekkel fogunk élni:

1. Létezik a téridőben térszerű Σ_t (3-dimenziós) hiperfelületek egy-paraméteres serege;
2. Bármely t esetén és bármely két $p, q \in \Sigma_t$ pont esetén létezik olyan izometria, amely a p pontot a q pontba transzformálja; ez a **térbeli homogenitás**

²Wilhelm Conrad Röntgen, német mérnök és fizikus, 1845-1923.

³Max Karl Ernst Ludwig Planck, német fizikus, 1858-1947.

feltevése;

3. Bármely pontban létezik legalább egy olyan megfigyelő, aki izotrópnak látja a Világegyetemet; ez a **térbeli izotrópia** feltevése.

A homogenitás tehát azt jelenti, hogy a téridő rétegezhető térszerű hiperfelületek egy-paraméteres seregével, és ezeken a 3-dimenziós térnek megfelelő hiperfelületeken minden pont egyenértékű, mert bármely 2 pont izometria-transzformációval egymásba átvihető. Az izotrópia azt jelenti, hogy minden $p \in M$ téridő-pontban létezik legalább egy olyan megfigyelő, aki a teret izotrópnak látja. Az izotrópia feltevésével kapcsolatban érdemes megjegyezni, hogy adott Σ_t hiperfelület és adott $p \in \Sigma_t$ pontban az anyaghoz képest lokálisan mozgó megfigyelők az anyag sebességeloszlását mindig anizotrópnak fogják látni. Emiatt az izotrópia feltevését körültekintően kell megfogalmazni. Akkor mondjuk, hogy a téridő minden pontjában **térbeli izotrópiával** rendelkezik, ha létezik a megfigyelőknek, azaz időszerű geodetikusoknak az egész téridőt kitöltő serege az alábbi tulajdonságokkal:

1. minden $p \in M$ téridő-ponton áthalad pontosan egy ilyen időszerű geodetikus, jelölje u^a ennek az érintő-egységvektorát;
2. minden $p \in M$ ponthoz és bármely két $s_1^a, s_2^a \in V_p$ térszerű egységvektorhoz létezik olyan izometria, ami a p pontot és az $u^a \in V_p$ érintővektort invariánsan hagyja, miközben s_1^a -t s_2^a -ba forgatja.

Ez azt jelenti, hogy izotróp Világegyetemben nem lehet az u^a -ra merőleges kitüntetett érintővektort találni. A szóbanforgó megfigyelőket **izotróp megfigyelőknek** szokták nevezni.

Állítás: Az izotróp megfigyelők világvonalai ortogonálisak mindenütt a Σ_t homogenitási hiperfelületekre.

Ha nem így lenne, azaz a Σ_t hiperfelület érintővektorainak $W_p \subset V_p$ altere nem lenne ortogonális u^a -ra V_p -ben, akkor u^a -t merőlegesen vetítve W_p -re kitüntetett vektort kaphatnánk W_p -ben, ami ellentmondana a térbeli izotrópiának.

Definíció: A téridő g_{ab} metrikája $h_{ab}(t)$ **indukált térmetrikát** indukál az összes Σ_t térszerű hiperfelületen, azáltal, hogy a g_{ab} értelmezéséhez használt V_p érintőteret a Σ_t hiperfelület érintővektorainak $W_p \subset V_p$ alterére korlátozzuk.

Állítás: A térben homogén és izotróp téridőben a **tér görbülete állandó**.

Jelölje ${}^{(3)}R_{abc}{}^d$ a tér görbületi tenzorát, azaz a Σ_t hiperfelület Riemann-tenzorát. Az indukált metrikával végezhetjük az indexek fel- és lehúzását. Tekintsük tehát az ${}^{(3)}R_{ab}{}^{cd} = {}^{(3)}R_{abc'}{}^d h^{c'}{}_c(t)$ multilineáris leképezést, ami tekinthető úgy, mint az az $L : \mathcal{T}_A(0, 2) \mapsto \mathcal{T}_A(0, 2)$ leképezés, amely az antiszimmetrikus $(0, 2)$ -tenzorok (2-formák) $\mathcal{T}_A(0, 2)$ lineáris vektorterét képezi le önmagára. (Emlékezzünk rá, ${}^{(3)}R_{ab}{}^{cd}$ definíció szerint antiszimmetrikus az (ab) és a (cd) indexekben.) Az L leképezés szimmetrikus, mert ${}^{(3)}R_{abcd} = {}^{(3)}R_{cdab}$; az L leképezés tehát önadjungált a $\mathcal{T}_A(0, 2)$ téren értelmezett, $h_{ab}(t)$ által generált természetes skalárszorzatra nézve. Ekkor létezik az L sajátvektoraiból álló ortonormált bázis a 2-formák terében. Ha az ezekhez a sajátvektorokhoz tartozó sajátértékek különbözők lennének, akkor ki lehetne tüntetni a p pontban a 2-formák valamelyikét, és ezen keresztül egy vektort W_p -ben. Nevezetesen ki lehetne tüntetni a kitüntetett $(0, 2)$ -tenzor axiálvektor-invariánsát. Az viszont ellentmondana az izotrópia követelményének. Az

L leképezés sajátértékeinek tehát azonosaknak kell lenniük, azaz az L leképezésnek az $\mathbb{I}$ azonossági leképezés számszorosának kell lennie: $L = K\mathbb{I}$, ahol K t -től független valós szám. Ez azt jelenti, hogy

$${}^{(3)}R_{ab}{}^{cd} = K\delta_{[a}^c\delta_{b]}^d, \quad (1.1.1.)$$

vagyis a Σ_t hiperfelület Riemann-görbülete

$${}^{(3)}R_{abcd} = Kh_{c[a}h_{b]d}. \quad (1.1.2.)$$

A Σ_t hiperfelületek homogenitása miatt K -nak állandónak kell lennie a hiperfelületen. A 3-dimenziós térnek, azaz a Σ_t hiperfelületeknek a Gauss-görbülete tehát $K = \text{áll.}$

Állítás: Eisenhart⁴ tétele. Bármely két állandó görbületű tér lokálisan izomorf, ha azonos a dimenziójuk, azonos a metrikájuk szignatúrája és azonos a K skalárgörbületük.

Az állandó K görbületű terek összes lehetséges fajtája könnyen felsorolható:

1. A $K > 0$ állandó pozitív görbületű terek izometrikusak a lapos, euklideszi $\mathbb{R}^4$ térbe ágyazott R -sugarú, a Descartes-koordinátarendszerben

$$x^2 + y^2 + z^2 + w^2 = R^2 \quad (1.1.3.)$$

egyenlettel adott 3-dimenziós gömbfelületekkel, amelyeken gömbi polárkoordinátákban az indukált h_{ab} metrika

$$d\ell^2 = d\psi^2 + \sin^2\psi(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2) \quad (1.1.4.)$$

alakú.

2. A $K = 0$ görbületű terek izomorfak a 3-dimenziós lapos Euklidesz-i térrel, amelyben Descartes-koordinátákban a metrika

$$d\ell^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2. \quad (1.1.5.)$$

3. A $K < 0$ állandó negatív görbületű terek izomorfak a lapos, 4-dimenziós Lorentz-szignatúrájú térbe (a Minkowski-térbe) ágyazott 3-dimenziós hiperboloidokkal, amelyeken az indukált metrika hiperbolikus koordinátákban

$$d\ell^2 = d\psi^2 + \sinh^2\psi(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2) \quad (1.1.6.)$$

alakú.

Az általános relativitáselmélet felveti annak a lehetőségét, hogy homogén és izotróp Világegyetemben a tér bármelyik fenti lehetőséget megvalósíthatja azzal el-lentétben, hogy a newtoni fizika szerint is és a speciális relativitáselmélet szerint is

⁴Luther Pfahler Eisenhart, amerikai matematikus, 1876-1965

a tér lapos, azaz nem görbült, euklideszi geometriájú ($K = 0$). Az általános relativitáselmélet szerint a tér lehet állandó pozitív görbületű, $K > 0$. Ebben az esetben a tér térfogata véges, azaz **a Világegyetem zárt** noha nincsenek határai. Abban az esetben, ha a tér állandó negatív görbületű, $K < 0$, akkor a tér végtelen, azaz **a Világegyetem nyílt**. Ezzel együtt felmerül a jogos kérdés, hogy a Világegyetemünk zárt vagy nyílt.

1.1.3. Homogén és izotróp téridő metrikája

A téridő g_{ab} metrikája és a térszerű Σ_t hiperfelületek $h_{ab}(t)$ indukált metrikája közötti kapcsolat

$$g_{ab} = -u_a u_b + h_{ab}(t), \quad (1.1.7.)$$

miután u^a ortogonális a Σ_t hiperfelületekre. Itt $h_{ab}(t)$ komponenseit $d\ell^2$ fenti kifejezéseiből tudjuk kiolvasni a megfelelő koordinátarendszerekben. A téridőmetrika koordináta-komponenseinek meghatározásához először alkalmas koordinátarendszert választunk a téridőben. Ehhez a következőképpen jutunk:

1. Először valamely rögzített t -hez tartozó Σ_t hiperfelületen választunk alkalmas koordinátákat, mint pl. fentebb tettük: a $K > 0$ esetben gömbi polárkoordinátákat, a $K = 0$ esetben Descartes-koordinátákat vagy gömbi polárkoordinátákat és a $K < 0$ esetben hiperbolikus koordinátákat.
2. Ezután azonos térkoordinátákkal indexeljük az egyes izotróp megfigyelők világ-vonalain elhelyezkedő különböző pontokat.
3. Az önkényesen bevezetett t időparamétert, ami az egyes Σ_t hiperfelületeket indexeli átcserélhetjük egy tetszőlegesen kiválasztott izotróp megfigyelő óráján mért τ sajátidőre, $dt = d\tau/a(\tau)$. A homogenitás következtében bármely két izotróp megfigyelő azonos sajátidő-különbséget mér ugyanazon két Σ_t és $\Sigma_{t'}$ térszerű hiperfelület között.

A fentiek alapján a homogén és izotróp Világegyetemnek megfelelő g_{ab} metrika, az úgynevezett **Robertson⁵-Walker⁶-metrika**:

$$ds^2 = -d\tau^2 + a^2(\tau) \begin{cases} d\psi^2 + \sin^2 \psi (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2), & \text{ha } K > 0, \text{ azaz } k = +1 \\ d\psi^2 + \psi^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2), & \text{ha } K = 0, \text{ azaz } k = 0 \\ d\psi^2 + \sinh^2 \psi (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2), & \text{ha } K < 0, \text{ azaz } k = -1 \end{cases}, \quad (1.1.8.)$$

⁵Howard Percy Bob Robertson, amerikai matematikus és fizikus, 1903-1961

⁶Arthur Geoffrey Walker, angol matematikus, 1909-2001

ahol a $K = 0$ esetben most gömbi polárkoordinátákat használtunk. A $0, \pm 1$ diszkrét értékeket felvevő k paramétert az egyes térgeometriák megkülönböztetése érdekében vezettük be. A homogenitás és az izotrópia megkövetelése tehát azt jelenti, hogy a téridő metrikája Robertson-Walker-metrika. Azt reméljük, hogy az Einstein-egyenletek alapján tudjuk eldönteni, mi az ismeretlen $a(\tau)$ függvény és milyen típusú a tér geometriája.

1.2. A Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker-téridő (FLRW-téridő)

1.2.1. A Friedmann-egyenletek

A homogén és izotróp Világegyetem dinamikáját az Einstein-egyenletek megoldásával kaphatjuk meg, ha az egyenletekbe egyrészt behelyettesítjük a Robertson-Walker-metrikát, másrészt valamilyen fizikai modell alapján behelyettesítjük az anyag energiaimpulzus-tenzorának explicit alakját. A Világegyetemet kitöltő anyagról némileg leegyszerűsítve azt mondhatjuk, hogy egymással nagyon gyengén kölcsönható galaxisokból áll, amelyek ezért jó közelítéssel szabadon esnek a Világegyetemben; jó közelítéssel ők az együttmozgó megfigyelők, akik a Világegyetemet izotrópnak látják. (A newtoni felfogásban azt mondanánk, hogy a galaxisok között gravitációs kölcsönhatás van. Az általános relativitáselmélet felfogása szerint a galaxisok gravitációs hatásuknál fogva meghatározzák a téridő geometriai szerkezetét, és ezáltal azokat a geodetikusokat is, amelyek mentén ők maguk szabadon esnek.) Az ilyen anyagot **pornak** (dust) nevezzük, amelynek az energiaimpulzus-tenzora

$$T_{ab} = \rho u_a u_b, \quad (1.2.9.)$$

ahol ρ az anyag energiasűrűsége a saját nyugalmi rendszerében, u^a pedig az egyes porszemcsék, azaz együttmozgó galaxisok sebességvektora, a korábbi megfontolásaink szerinti izotróp, együttmozgó megfigyelők sebessége. A fenti energiaimpulzus-tenzor speciális esete az ideális (nem sűrűlő) folyadék

$$T_{ab} = \rho u_a u_b + P(g_{ab} + u_a u_b) \quad (1.2.10.)$$

energiaimpulzus-tenzorának, amelyben szerepel a folyadék P nyomása is. A por tehát olyan ideális folyadék, amelynek a nyomása zérus, $P = 0$. A (1.2.10.) energiaimpulzus-tenzor egyúttal a sugárzás (pl. az elektromágneses sugárzás és a neutrínó-sugárzás) leírására is alkalmas. A sugárzásban a P nyomás és az energiasűrűség kapcsolata $P = \rho/3$. A mai Világegyetemünkben a kozmikus háttérsugárzás elhanyagolható hányadát képviseli a teljes energiasűrűségnek. A Világegyetemnek azonban volt olyan korai szakasza, amikor a sugárzás hozzájárulása volt meghatározó a teljes energiasűrűségben. A Világegyetem fejlődésének korai időszaka **sugárzás uralta korszak** (radiation dominated epoch) volt, jelenleg a Világegyetem az **anyag**

uralta korszakában (matter dominated epoch) van. A (1.2.10.) kifejezés egyúttal a homogén és izotróp közeg energiaimpulzus-tenzorának legáltalánosabb kifejezése.

Az elmondottak alapján a

$$G_{ab} = 8\pi T_{ab} \quad (1.2.11.)$$

Einstein-egyenletekbe tehát a (1.1.8.) metrikát és az ideális folyadék (1.2.10.) energiaimpulzus-tenzorát fogjuk behelyettesíteni.

Figyelembe véve, hogy az (1.2.11.) egyenlet mindkét oldalán szimmetrikus másodrendű tenzor áll, ez 10 darab egyenletet jelentene. Mielőtt továbblépünk, vizsgáljuk meg, hogy az izotrópiának milyen következményei vannak arra nézve, hogy hány független egyenletünk van. Mivel a Σ_t hiperfelületek mindenütt ortogonálisak az izotróp megfigyelők időszerű geodetikusaira, ezért az energiaimpulzus-tenzor és az Einstein-tenzor (idő-tér)-komponensei eltűnnek, $T_{ab}u^a s^b = 0$, $G_{ab}u^a s^b = 0$. Az izotrópia részben azt jelenti, hogy a $-T_{ab}u^b$ energiaáram-sűrűségnek nem lehet zérustól különböző térszerű komponense. Ezért $G_{ab}u^b$ időszerű vektor, de akkor $G_{ab}u^a u^b = G_{\tau\tau}$ az Einstein-tenzor (idő-idő)-komponense. A térbeli izotrópia további következménye, hogy T_{ab} (tér-tér)-komponensei 3×3 -as diagonális mátrixot alkotnak, amelyben a $T_{**} = T_{ab}s^a s^b$ diagonális elemek azonosak, a nem diagonális elemek pedig zérusok. Ennek következménye, hogy ugyanez mondható el az Einstein-tenzor (tér-tér)-komponenseiről, $G_{**} = G_{ab}s^a s^b$ diagonális elemekkel. Végül tehát 2 darab független egyenletet kapunk az Einstein-tenzor 2 független komponensére, $G_{\tau\tau}$ -ra és G_{**} -ra:

$$\begin{aligned} G_{\tau\tau} &= G_{ab}u^a u^b = 8\pi T_{\tau\tau} = 8\pi\rho, \\ G_{**} &= G_{ab}s^a s^b = 8\pi T_{**} = 8\pi P. \end{aligned} \quad (1.2.12.)$$

Látjuk tehát, hogy a tér homogenitásának és izotrópiájának köszönhetően csak 2 független Einstein-egyenletünk van.

A következő lépés, hogy meghatározzuk az Einstein-tenzor független komponenseit felhasználva a Robertson-Walker-metrikát, majd azokat behelyettesítjük a 2 független Einstein-egyenletbe. Ekkor az alábbi egyenleteket kapjuk

$$\frac{3\dot{a}^2}{a^2} = 8\pi\rho - \frac{3k}{a^2}, \quad (1.2.13.)$$

$$\frac{3\ddot{a}}{a} = -4\pi(\rho + 3P), \quad (1.2.14.)$$

ahol $a(\tau)$ a Robertson-Walker-metrika skálaparamétere, $k = +1, 0, -1$ rendre pedig a zárt gömbi, a lapos euklideszi és a nyílt hiperbolikus térgeometriának megfelelő paraméter. Ezek a Világegyetem **Friedmann⁷-modelljének** egyenletei.

⁷Alexander Alexandrovich Friedmann, orosz (szovjet) fizikus és matematikus, 1888-1925

Megjegyzés: A (1.2.13.) és (1.2.14.) egyenleteket $G = c = 1$ egységrendszerben írtuk fel. Tetszőleges egységrendszerben érvényes alakjuk:

$$\frac{3\dot{a}^2}{a^2} = 8\pi G\rho - \frac{3kc^2}{a^2}, \quad (1.2.15.)$$

$$\frac{3\ddot{a}}{a} = -4\pi G\left(\rho + \frac{3P}{c^2}\right), \quad (1.2.16.)$$

az FLRW-téridőben a skalárgörbület pedig

$$R = \frac{6}{c^2 a^2}(\ddot{a}a + \dot{a}^2 + kc^2). \quad (1.2.17.)$$

Az egyszerűség kedvéért a $k = 0$ esetben vázoljuk a Friedmann-egyenletek levezetését. A Christoffel-szimbólumok el nem tűnő komponensei Descartes-koordinátákban:

$$\begin{aligned} \Gamma_{xx}^\tau &= \Gamma_{yy}^\tau = \Gamma_{zz}^\tau = a\dot{a}, \\ \Gamma_{x\tau}^x &= \Gamma_{\tau x}^x = \Gamma_{y\tau}^y = \Gamma_{\tau y}^y = \Gamma_{z\tau}^z = \Gamma_{\tau z}^z = \frac{\dot{a}}{a}, \end{aligned} \quad (1.2.18.)$$

ahol $\dot{a} = da(\tau)/d\tau$. Ezeket felhasználva a Ricci-tenzor független komponensei:

$$R_{\tau\tau} = -\frac{3\ddot{a}}{a}, \quad R_{**} = a^{-2}R_{xx} = \frac{\ddot{a}}{a} + \frac{2\dot{a}^2}{a^2}. \quad (1.2.19.)$$

A téridő skalárgörbülete:

$$R = -R_{\tau\tau} + 3R_{**} = 6\left(\frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\dot{a}^2}{a^2}\right). \quad (1.2.20.)$$

Végül pedig az Einstein-tenzor el nem tűnő komponensei:

$$G_{\tau\tau} = R_{\tau\tau} + \frac{1}{2}R = \frac{3\dot{a}^2}{a^2}, \quad G_{**} = R_{**} - \frac{1}{2}R = -\frac{2\ddot{a}}{a} - \frac{\dot{a}^2}{a^2}. \quad (1.2.21.)$$

Az Einstein-egyenletek ezért

$$\begin{aligned} \frac{3\dot{a}^2}{a^2} &= 8\pi\rho, \\ -\frac{2\ddot{a}}{a} - \frac{\dot{a}^2}{a^2} &= 8\pi P \end{aligned} \quad (1.2.22.)$$

alakot öltenek. Az első egyenletből kifejezhetjük $\frac{\dot{a}^2}{a^2}$ -t és behelyettesíthetjük a második egyenletbe, amely akkor

$$\frac{3\ddot{a}}{a} = -4\pi(\rho + 3P) \quad (1.2.23.)$$

alakot ölt.

A továbbiakban érdemes lesz megoldani a Friedmann-egyenleteket két speciális esetben, amikor a Világegyetemet (a) anyag, pontosabban $P = 0$ nyomású por uralja, és amikor (b) $P = \rho/3$ nyomású sugárzás uralja. Lemaître⁸ Friedmann-tól függetlenül a Friedmann-megoldással lényegében egyező megoldást kapott a homogén és izotróp Világegyetem fejlődésére. Mielőtt azonban a Friedmann-féle megoldás részletes tárgyalására rátérünk, tehetünk néhány kvalitatív észrevételt a Friedmann-egyenletekkel kapcsolatban.

⁸Georges Henri Joseph Édouard Lemaître, belga pap, csillagász és fizikus, 1894-1966

1.2.2. A Hubble-törvény és a sztatikus Világegyetem kérdése. A kozmológiai állandó

Ha a Világegyetemet szokásos viselkedésű anyag vagy sugárzás vagy ezek keveréke uralja, akkor $\rho > 0$ és $P \geq 0$, és ekkor a Világegyetem nem lehet sztatikus.

Az említett esetben a (1.2.14.) egyenletből látjuk, hogy $\ddot{a} < 0$, és akkor $\dot{a}$ szigorúan monoton csökkenő. Ez úgy lehetséges, hogy vagy $\dot{a} < 0$ és a Világegyetem összehúzódó, vagy $\dot{a} > 0$ és a Világegyetem táguló, vagy az is előfordulhat, hogy a táguló Világegyetem egy adott időpillanatban, amikor $\dot{a} = 0$, tágulóból összehúzódóvá válik.

A homogén és izotróp Világegyetem tágulása vagy összehúzódása a **Hubble⁹-törvénnyel** jellemezhető: Ha R két tetszőleges izotróp megfigyelő (galaxis) távolsága a Σ_τ homogenitási felületen (a térben), akkor a megfigyelők (távolodását vagy közeledését jellemző) relatív sebesség

$$v \equiv \frac{dR}{d\tau} = \frac{R(\tau)}{a(\tau)} \dot{a}(\tau) \equiv H(\tau) R(\tau), \quad (1.2.24.)$$

ahol $H(\tau)$ az úgynevezett **Hubble-paraméter**. Nyilvánvaló, hogy a Hubble-paraméter csak a térszerű Σ_τ hiperfelületek mentén állandó, viszont változik, ahogy telik a τ sajátidő az izotróp megfigyelők óráján. A Hubble-törvény fontos sajátja, hogy a tér bármely két, egymástól adott R távolságra levő pontja azonos ütemben, az R távolsággal arányosan változik. **A tágulásnak vagy az összehúzódásnak nincsen tehát centruma.** Ez természetes következménye annak, hogy a Világegyetem homogén, hiszen egy tágulási centrum léte kitüntetett pont létezését jelentené a Világegyetemben. A távoli együttmozgó megfigyelők relatív sebessége lehet $v > c$, azaz meghaladhatja a vákuumbeli fénysebességet. Ez azonban nem mond ellent annak az alapfeltevésünknek, hogy sem részecske, sem sugárzás, azaz az energiának semmilyen formája nem terjedhet gyorsabban a vákuumbeli fénysebességnél. A galaxisok v relatív sebessége két különböző objektumra vonatkozó lokális mérés eredménye, nem valaminek a sebessége, hanem egy „látszólagos” sebesség.

Induljunk ki abból, hogy a Σ_τ hiperfelületen levő 2 pont $R(\tau)$ távolságának négyzete és az együttmozgó x^μ koordinátáik Δx^μ különbsége által meghatározott $\Delta \ell^2$ együttmozgó távolságnégyzet közti kapcsolat $R^2(\tau) = a^2(\tau) \Delta \ell^2$, ahol két együttmozgó galaxis $\Delta \ell$ távolsága független a τ sajátidőtől. A fenti összefüggést differenciális alakba írhatjuk:

$$2RdR = 2a(\tau)da\Delta \ell^2 = 2a(\tau)da\frac{R^2}{a^2}, \quad (1.2.25.)$$

ahonnan

$$\frac{dR}{d\tau} = a(\tau) \frac{da}{d\tau} \frac{R}{a^2} = \frac{R}{a} \dot{a} \quad (1.2.26.)$$

adódik, amit be akartunk látni.

A Hubble-törvényre és a Világegyetem tágulásának lehetőségére először Lemaître mutatott rá. Ezt az elméleti feltételezést, ami ugyancsak összhangban van

⁹Edwin Powell Hubble, amerikai csillagász, 1889–1953

a Friedmann-egyenletek megoldásával Hubble 2 évvel későbbi felfedezése, majd az azóta napjainkig folytatott egyre pontosodó megfigyelések igazolják.

Megjegyzés: A Hubble-törvény felfedezésének jelentősége óriási szemléleti változást hozott világképünkben: **fel kellett adni a sztatikus Világegyetem képét.** Eredetileg Einstein azt remélte, hogy az általános relativitáselmélet sztatikus Világegyetem képét fogja szolgáltatni. Mivel a Friedmann-megoldás nem ilyen volt, feltette a kérdést, hogy hogyan kellene ahhoz módosítani az Einstein-egyenleteket, hogy legyen sztatikus homogén és izotróp megoldásuk. Ebből a célból módosította az Einstein-egyenleteket,

$$G_{ab} + \Lambda g_{ab} = 8\pi T_{ab}, \quad (1.2.27.)$$

azáltal, hogy feltételezte egy további alapvető természeti állandó létét, a Λ **kozmológiai állandóét.**

Állítás: Lovelock¹⁰ bebizonyította, hogy a G_{ab} Einstein-tenzor és a g_{ab} metrika lineáris kombinációja a legáltalánosabb szimmetrikus, (kovariáns) divergenciamentes másodrendű tenzor, amely a metrikából és annak első és második deriváltjaiból képezhető. A (1.2.27.) egyenlet tehát az Einstein-egyenletek legáltalánosabb olyan módosítása, ami megőrzi az eredeti egyenletek főbb tulajdonságait.

Megjegyzés: Az Einstein-egyenletek (1.2.27.) módosításával elérhető, hogy létezzen sztatikus homogén és izotróp megoldás. A kozmológiai állandó bevezetésének azonban nyilvánvalóan ára van, pl. módosul a lassú mozgás és gyenge gravitáció határesetében Newton gravitációs törvénye. Abban lehet reménykedni, hogy ha Λ értéke kicsi, akkor ezt az eltérést nem lehet megfigyelni. Az elgondolás másik gyengéje, hogy Λ értékét **finoman kell hangolni** ahhoz, hogy létezzen a módosított

$$\frac{3\dot{a}^2}{a^2} = 8\pi\rho - \frac{3k}{a^2} + \Lambda, \quad (1.2.28.)$$

$$\frac{3\ddot{a}}{a} = -4\pi(\rho + 3P) + \Lambda, \quad (1.2.29.)$$

Friedmann-egyenleteknek sztatikus megoldása. Megmutatták, hogy ez a sztatikus megoldás ráadásul még instabil is.

Megjegyzés: Az elméleti ellenérveknél azonban sokkal súlyosabban esett latba a **Hubble-törvény felfedezése. Egyértelműsítette, hogy a Világegyetem nem sztatikus.** A Hubble-törvényt az utóbbi kb. egy évszázad alatt végzett nagyszámú megfigyelés igazolja. Kellően alátámasztott tehát, hogy feladjuk azt az elképzelést, hogy a Világegyetemünk sztatikus. A megfigyelések azt igazolják, hogy a Világegyetemünk tágul, és a Hubble-állandó jelenlegi értéke kb. $H \approx 70(\text{km/s})/\text{Mpc}$. A kozmológiai állandó bevezetésének eredeti indoka tehát megszűnt.

¹⁰David Lovelock, angol fizikus és matematikus, 1938-

A modern kozmológiában újra felmerül a kozmológiai állandó bevezetése. A tapasztalatok szerint a Világegyetem gyorsulva tágul. Ilyen eredményre a Friedmann-egyenletek alapján akkor juthatunk, ha $P = -\rho$ állapotegyenletű, azaz negatív nyomású „valami” létezését képzeljük el, ami homogénan kitölti a Világegyetemet, avagy azt engedjük meg, hogy bár nincsen jelen sem sugárzás, sem anyag, de a vákuumot $\Lambda \neq 0$ kozmológiai állandó jellemzi.

Csakugyan, a (1.2.28.) és (1.2.29.) egyenletek alapján figyelhetünk arra, hogy **a tágulás szempontjából a $P = -\rho$ állapotegyenletű, hipotetikus ideális folyadék ugyanolyan szerepet játszik ($\Lambda = 0$ esetén), mint anyag és sugárzás hiányában ($\rho = 0$ mellett) a $\Lambda \neq 0$ kozmológiai állandó.** Vegyük az egyszerűség kedvéért a lapos tér ($k = 0$) esetét, és tegyük fel, hogy $\Lambda \neq 0$ és $\rho = 0$. Ebben az esetben a (1.2.28.) és a (1.2.29.) egyenletek jobb oldalai megegyeznek, úgyhogy

$$\dot{a}^2 = a\ddot{a} \Rightarrow \frac{\dot{a}}{a} = \frac{\ddot{a}}{\dot{a}}, \quad (1.2.30.)$$

ahonnan megoldásként a $H = C = \text{áll.}$ Hubble-paraméterrel jellemzett $a(\tau) = e^{C\tau}$ összefüggés szerinti exponenciális tágulás adódik, amelynek során a kozmológiai állandótól származó energiasűrűséget úgy azonosíthatjuk, mint a $\rho_\Lambda = \Lambda/8\pi = 3H^2/8\pi$ állandót. A gyorsulva táguláshoz az szükséges, hogy $\Lambda > 0$ legyen, s ekkor $H = \sqrt{\Lambda/3}$.

A kozmológiai állandó szerepe tehát hasonló, mint a $\rho = -P$ állapotegyenletű, pozitív energiasűrűségű és negatív nyomású vákuumé, mindkettő gravitációs taszításnak felel meg a mai Világegyetem méretskáláján. A kozmológiai állandó, ill. a vákuum kicsiny pozitív (homogén) energiasűrűsége magyarázata lehet a **sötét energiának**, ami a Világegyetem teljes energiasűrűségének jelenleg kb. 70 %-át teszi ki, azaz annak *döntő többségét!* A kozmológiai állandó értékének felső korlátja $\Lambda \lesssim 10^{-52} \text{ m}^{-2}$.

Megjegyzés: A (1.2.13.)-(1.2.14.) Friedmann-egyenletek megoldása $\dot{a} > 0$ esetén táguló. Mivel közönséges anyag és sugárzás esetén $\rho + 3P > 0$, úgyhogy $\ddot{a} < 0$, ezért a tágulás sebessége annál nagyobb, minél korábban megyünk vissza az időben. Ezzel kapcsolatban elmondhatjuk, hogy a Friedmann-modell, csak közönséges anyag és sugárzás jelenlétét feltételezve a Világegyetemben, lassulva táguló Világegyetemet eredményez; nem tudja megmagyarázni a gyorsulva táguló Világegyetemre vonatkozó megfigyeléseket. Ehhez vagy a $\Lambda \neq 0$ kozmológiai állandó létezésére, vagy $P = -\rho$ állapotegyenletű „valami” jelenlétére van szükség, bármi is legyen annak fizikai magyarázata.

Megjegyzés: Nem zérus kozmológiai állandó esetén a (1.2.28.) és a (1.2.29.) Friedmann-egyenletek tetszőleges egységrendszerben érvényes alakja:

$$\frac{3\dot{a}^2}{a^2} = 8\pi G\rho - \frac{3kc^2}{a^2} + \Lambda c^2, \quad (1.2.31.)$$

$$\frac{3\ddot{a}}{a} = -4\pi G\left(\rho + \frac{3P}{c^2}\right) + \Lambda c^2, \quad (1.2.32.)$$

az FLRW-téridőben a skalárgörbület pedig továbbra is (1.2.17.).

1.2.3. A Nagy Bumm

Ha elhanyagoljuk a homogén és izotróp Világegyetem $a(\tau)$ skálaparaméterének gyorsulását, azaz $\dot{a} = \text{áll.}$ közelítéssel élünk, akkor a Hubble-állandó jelenlegi értékéből arra kell következtetnünk, hogy

$$T = \frac{a}{\dot{a}} = \frac{1}{H} \quad (1.2.33.)$$

idővel ezelőtt kezdődött a Világegyetem tágulása, amikor $a = 0$ kellett legyen. Ez a Világegyetem kezdete kb. $T = 13,799 \pm 0,021$ milliárd évvel ezelőtt olyan állapot volt, amelyben bármely két pont távolsága zérus volt, az anyag energiasűrűsége és a Világegyetem görbülete pedig végtelen volt. Ezt a kezdeti állapotot nevezzük **Nagy Bumnak** (Big Bang).

A Nagy Bumm pillanatában a Világegyetem és az anyag egyetlen pontba volt összehúzódva. Nincsen értelme arról beszélni, hogy milyen volt a Világegyetem állapota a Nagy Bumm előtt, ezen szinguláris állapot előtt. Ezt megelőzően nem volt téridő sem, úgyhogy a kezdet nem egy adott térben egy pontba összehúzódott anyagot jelent, amely a robbanásakor az adott pontból minden irányban szétrepül. Ez inkább egy valódi szinguláris kezdet, amelyben egyszerre születik meg a Világegyetem és vele együtt a téridő. Leginkább egy analógiával tehetjük szemléletessé a kezdetet, ill. annak az időbeli megfordítását: vegyünk egy léggömböt, fessünk a gumihártya felszínére egyenletes sűrűséggel pontokat, majd kezdjük el kieresztetni a gázt a léggömbből; ekkor a léggömb felszínének 2-dimenziós világában „élő” megfigyelő azt veszi észre, hogy minden pont végül egy pontba kerül és a pontok felületi sűrűsége végtelenhez tart; ez a Világegyetem kezdeti szingularitásának valamiféle analogonja. A Friedmann-modellben a Nagy Bumm a táguló homogén és izotróp Világegyetem fejlődésének kezdeteként adódik a megoldásból. Volt számos elméleti próbálkozás az általános relativitáselmélet keretében annak tisztázására, hogy a kezdeti szingularitás csak a homogenitás és az izotrópia követelményének következménye, avagy akkor is meg kellett legyen a Világegyetem történetében, ha a homogenitás és az izotrópia nem teljesült. Később a kezdeti szingularitás kérdésével részletesen fogunk foglalkozni. Most csak előrebocsátjuk, hogy a téridőre és az anyagra vonatkozó meglehetősen általános feltételek mellett a kozmológiai modellekben megjelenik a kezdeti szingularitás. Erre vonatkoznak Penrosenak¹¹ és Hawkingnak¹² a tételei. Az általános relativitáselmélet nagyon általános feltevések mellett azt mondja tehát, hogy a Világegyetem fejlődése szingularitással kezdődött. Természetesen a fizikusokban jogosan fogalmazódik meg a kétség, hogy kielégítő-e az általános relativitáselmélet, mint olyan elmélet, amelyik a Világegyetem fejlődését szinguláris kezdettel indítja.

Általában a fizikában bebizonyosodott, hogy a Természet nem „kedveli” a szingularitásokat: ha azok megjelennek egy elméletben, akkor többnyire azt jelzik, hogy nem megfelelő a jelenség leírására tett próbálkozásunk. Ma az a sejtésünk, hogy az általános relativitáselmélet a Világegyetem történetében gondolatban visszafelé haladva valamikor érvényét veszti. Nagyjából akkor következhet ez be, amikor addig jutunk

¹¹Sir Roger Penrose, angol matematikus és fizikus, 1931-

¹²Stephen William Hawking, angol fizikus, 1942-

a Világegyetem történetének visszafejtésében, hogy annak mérete az $\ell_P = \sqrt{\hbar G/c^3} \approx 1,62 \cdot 10^{-35}$ m Planck-hossz nagyságrendjébe esik. A Planck-hossz egy olyan jellegzetes távolság, amit a kvantumfizikában szereplő $\hbar \approx 6,63 \cdot 10^{-34}$ m²kg/s Planck-állandóból ($\hbar = h/2\pi$), a G Newton-féle gravitációs állandóból és a c vákuumbeli fénysebességből lehet dimenzionális megfontolással képezni. Azt gondoljuk, hogy a Planck-hosszal összemérhető vagy annál kisebb méretskálákon a gravitáció és a kvantumfizika egyformán fontosak, valószínűleg maga a gravitáció is kvantumos természetű. Ha így van, akkor a Nagy Bumm a Világegyetemnek a gravitáció klasszikus fizikai elméletéből extrapolált kezdete csupán. A Világegyetem története azonban az extrapolált kezdetet követő t_P időtartamú Planck-korszakban nem érthető meg az általános relativitáselmélet keretében. Jelenleg a kvantumgravitációnak nem létezik kiforrott és fizikai-csillagászati megfigyelésekkel igazolt elmélete. Egy ilyen elmélet, ha egyszer rendelkezésre fog állni, más megvilágításba fogja helyezni a Világegyetem fejlődésének a t_P idő előtti szakaszát; vélhetően a kezdeti szingularitás problémáját is megoldja majd.

1.2.4. A Világegyetem energiasűrűségének változása

A Friedmann-egyenletek alapján az energiasűrűség jellegzetes módon változik a por és a sugárzás által uralt Világegyetemben. Por uralta Világegyetemben

$$\rho a^3 = \text{áll.}, \quad (1.2.34.)$$

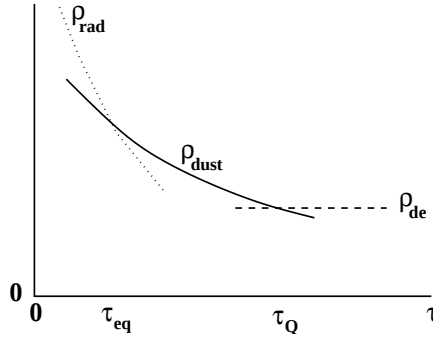
sugárzás uralta Világegyetemben pedig

$$\rho a^4 = \text{áll.} \quad (1.2.35.)$$

összefüggés szerint változik a Világegyetem skálaparaméterével az energiasűrűség. A (1.2.34.) összefüggés értelmében az egységnyi térfogatra eső porszemcsék (galaxisok) száma a^3 -nel fordított arányban csökken. A (1.2.35.) összefüggést pedig az magyarázza, hogy a tágulás során nemcsak az egységnyi térfogatra eső fotonok száma csökken (szintén a^3 -nel fordított arányban), hanem a fotonok energiája is csökken a -val fordított arányban, mert a fotonok vöröseltolódást szenvednek a tágulás során.

A por és a sugárzás energiasűrűségének a Világegyetem tágulása miatti változása a következőket jelenti. Először is a kezdeti $a \rightarrow 0$ korszakban a sugárzás dominálja a Világegyetemet. Másodszor, mivel kezdetben a sugárzás uralja a Világegyetemet, ezért elkövetkezik a Nagy Bummot ($\tau = 0$) követően egy τ_{eq} pillanat, amikor megegyezik a por és a sugárzás energiasűrűsége, hiszen a sugárzás energiasűrűsége a tágulás során gyorsabban csökken, mint a poré. A sugárzás és a porszerű anyag energiasűrűségének egyenlősége kb. $\tau_{eq} \approx 10^5$ évvel a Nagy Bumm után következett be Világegyetemünkben. A későbbiekben, azaz $\tau > \tau_{eq}$ esetén már a por uralja a Világegyetemet egészen addig, amíg – állandó tágulás esetén – elkövetkezik majd egy pillanat, amikor a tágulás miatt a por energiasűrűsége kisebbé válik, mint a sötét energia sűrűsége. Ekkor az utóbbi veszi át az uralmat a kiüresedett Világegyetemben.

Szorozzuk meg a (1.2.13.) egyenletet a^2 -tel, majd deriváljuk mindkét oldalát az izotróp megfigyelők τ sajátideje szerint. Az így kapott egyenletbe helyettesítsük be $\ddot{a}$ -nak a (1.2.14.)



1. ábra. Az energiasűrűség egyes összetevőinek alakulása a Világegyetem tágulása során: a sugárzás ρ_{rad} energiasűrűsége (pontosított vonal), a por ρ_{dust} energiasűrűsége (folytonos vonal) és a sötét energia ρ_{de} sűrűsége (szaggatott vonal); τ_{eq} és τ_Q rendre a (sugárzás - por) és a (por - sötét energia) sűrűségei egyezésének pillanatai.

egyenletből kifejezett alakját. Ekkor azonos átalakítások után a

$$\dot{\rho} + 3\frac{\dot{a}}{a}(\rho + P) = 0 \quad (1.2.36.)$$

egyenletet kapjuk.

Por uralta Világegyetemben a nyomás zérus, $P = 0$, úgyhogy

$$\dot{\rho} = -3H\rho = -3\frac{\dot{a}}{a}\rho \quad (1.2.37.)$$

adódik, ahonnan

$$\frac{\dot{\rho}}{\rho} = -3\frac{\dot{a}}{a}, \quad (1.2.38.)$$

azaz $\rho a^3 = \text{áll.}$

Sugárzás uralta Világegyetemben a nyomás $P = \rho/3$, úgyhogy

$$\frac{\dot{\rho}}{\rho} = -4\frac{\dot{a}}{a}, \quad (1.2.39.)$$

ahonnan $\rho a^4 = \text{áll.}$ adódik.

Ezt a fejezetet azzal zárhatjuk, hogy ha a tágulás tovább folyik (mint a $k = 0$ és $k = -1$ esetekben), akkor el kell jönnie annak a Nagy Bumot követő τ_Q pillanatnak, amikor az anyag (a por) energiasűrűsége a sötét energia sűrűsége alá esik. Ettől kezdve a sötét energia és a vele járó gravitációs taszítás uralja a kiüresedett (lényegében elhanyagolható anyagsűrűséget és sugárzási energiasűrűséget tartalmazó) Világegyetemet.

1.2.5. A táguló Világegyetem jövője

A Friedmann-egyenletek alapján előrejelezhetjük a Világegyetem jövőjét, ha az *jelesen tágul*. Tegyük fel, hogy az *anyag* $P \geq 0$ *nyomású*. Ekkor különböző k térgeo-

metriák esetén a Világegyetem az alábbi viselkedést mutatja a jövőben.

1. A $k = 0$ esetben (lapos térgeometria) a (1.2.13.) egyenlet $3\dot{a}^2 = 8\pi\rho a^2$ alakba írható át. A $\tau \rightarrow \infty$ határesetben ρ legalább olyan gyorsan csökken, mint $1/a^3$, azaz $\rho a^2 \sim 1/a \rightarrow 0$ az egyenlet jobb oldalán. Ez azt jelenti, hogy $\dot{a} \rightarrow 0$, ha $\tau \rightarrow \infty$. Ilyenkor a Világegyetem örökké tágul, de a tágulás sebessége zérushoz tart.
2. A $k = -1$ esetben (hiperbolikus térgeometria) a (1.2.13.) egyenlet $3\dot{a}^2 = 8\pi\rho a^2 + 3$ alakba írható. Mivel $\tau \rightarrow \infty$ esetén a jobb oldal első tagja zérushoz tart, a távoli jövőben $\dot{a} \rightarrow +1$ adódik. A Világegyetem ekkor is örökké tágulni fog, a tágulás sebessége állandóvá válik.
3. A $k = +1$ esetben (gömbi térgeometria) a (1.2.13.) egyenlet $3\dot{a}^2 = 8\pi\rho a^2 - 3$ alakba írható át. Ahogy τ nő, az első tag csökken, és ezért létezik a skálaparaméternek olyan kritikus $a_c = \sqrt{3/(8\pi\rho)}$ értéke, amikor a tágulás sebessége zérussá válik. Mivel az egyenlet jobb oldalának pozitívnak kell lennie, ezért teljesülnie kell az $a(\tau) \leq a_c$ egyenlőtlenségnek. A Világegyetem skálaparamétere tehát nem nőhet korlátlanul. Amikor a Nagy Bumm utáni tágulás során eléri az a_c kritikus értéket, ami az a paraméter maximális értéke, akkor $a(\tau)$ elkezd csökkenni. A Nagy Bumm után véges idővel a skálaparaméter ismét zérussá válik, $a = 0$ lesz. A zárt gömbi Világegyetem története szingularitással ér véget, ez a „Nagy Zutty” (Big Crunch).

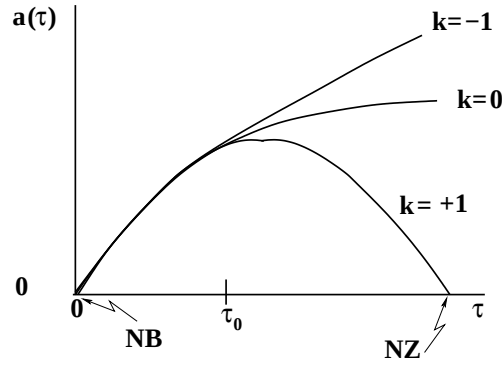
Mindezeket a kvalitatív jegyeket közvetlenül ki lehet olvasni a numerikus eredményekből, ha megoldjuk a Friedmann-egyenleteket. Akár por, akár sugárzás uralja Világegyetemet, ismerjük az anyag $P = P(\rho)$ állapotegyenletét, ami rendre $P = 0$ és $P = \rho/3$. Felhasználjuk továbbá, hogy a por és a sugárzás uralta Világegyetemben rendre $8\pi\rho a^3/3 = C = \text{áll.}$ és $8\pi\rho a^4/3 = C' = \text{áll.}$ Ekkor a (1.2.13.) egyenlet rendre

$$\dot{a}^2 - \frac{C}{a} + k = 0, \quad \text{ha } P = 0, \quad (1.2.40.)$$

$$\dot{a}^2 - \frac{C'}{a^2} + k = 0, \quad \text{ha } P = \rho/3 \quad (1.2.41.)$$

alakot ölt. A (1.2.14.) egyenlet már nem független, miután felhasználtuk a $\rho = \rho(a)$ függést. Rendre a fenti közönséges elsőrendű differenciálegyenleteket kell megoldani $a(0) = 0$ kezdőfeltétellel.

Megjegyzés: A csillagászati megfigyeléseinkből arra kell következtetnünk, hogy Világegyetemünk jelenlegi energiasűrűségének kb. 70 %-át sötét energia teszi ki, amelynek nem ismerjük a mibenlétét. Az anyagnak ez a komponense gyenge és a térben homogén gravitációs taszítást eredményez. A sötét energia természetes jelöltje lehet a kicsiny $\Lambda > 0$ kozmológiai állandó, aminek magyarázatát esetleg a bozonikus és fermionikus kvantummezők zérusponti energiáinak összjátéka jelenti. Egy másik elképzelés szerint a sötét energia negatív nyomású, $P = w\rho$ ($w < 0$) állapotegyenletű ideális folyadékként képzelhető el,



2. ábra. A Friedmann-egyenlet megoldásainak kvalitatív szemléltetése nyílt hiperbolikus ($k = -1$), nyílt euklideszi ($k = 0$) és zárt gömbi ($k = +1$) térgeometria esetén; NB a Nagy Bumm, NZ a Nagy Zutty jelölésére szolgál. A jelenünket τ_0 illusztrálja az idő-tengelyen.

ahol w értéke időben lassan változik, ez az úgynevezett kvintesszencia. A $w = -1$ eset pontosan olyan ideális folyadéknak felel meg, ami fizikai hatásában megegyezik a $\Lambda > 0$ kozmológiai állandó hatásával, ha más anyag nincs jelen.

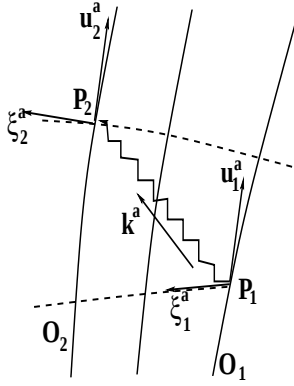
Vegyük a $k = 0$, $\rho = P = 0$ és $\Lambda > 0$ esetet. Ekkor a (1.2.29.) egyenletből $\ddot{a} = \Lambda a/3 > 0$, azaz a tágulás gyorsuló, a (1.2.28.) egyenletből pedig $H = \sqrt{\Lambda/3} = \text{áll.}$ Hubble-paraméter adódik. Ez jellemezheti a kiüresedett Világegyetem tágulásának késői szakaszát, amikor $\tau \gg \tau_Q$.

Hasonló eredményre jutunk a $k = 0$, $P = -\rho$ ($w = -1$) és $\Lambda = 0$ esetben. Ekkor a (1.2.13.) és a (1.2.14.) egyenletek jobb oldalai megegyeznek $8\pi\rho/3$ -mal, úgyhogy ismét a (1.2.30.) egyenletet és annak $a(\tau) = e^{C\tau}$ megoldását kapjuk és $H = C = \text{áll.}$ a Hubble-állandó. Másrészt a (1.2.13.) egyenletből $\rho = 3H^2/8\pi = \text{áll.}$ energiasűrűség adódik. A (1.2.14.) egyenlet értelmében $\ddot{a} = (8\pi\rho/3)a = \text{const.}e^{H\tau}$ pozitív, a tágulás most is gyorsuló.

Az Emberiséget joggal izgatja a kérdés, hogy a Világegyetem, amelyben élünk, melyik esetet valósítja meg. Örökké fog-e létezni, avagy szinguláris véget fog-e érni. Az újabb megfigyelések azt látszanak alátámasztani, hogy a Világegyetem lapos térgeometriájú. Ha ez így van, akkor a Világegyetem tágulása örökké fog tartani. Meg kell azonban jegyezni, hogy jelenleg a Világegyetem fejlődésének olyan szakaszában van, amikor a Nagy Bumm utáni feljődésben még alig jelent különbséget az, hogy melyik térgeometria valósul meg. Ezért a megfigyelések hibahatárait is figyelembe véve nem lehet egyértelmű kijelentést tenni a Világegyetem jövőjére nézve.

1.2.6. A kozmológiai vöröseltolódás

Az, hogy a Világegyetem $a(\tau)$ skálaparamétere hogyan függ az együttmozgó megfigyelők τ sajátidejétől, meghatározza a fény gravitációs vöröseltolódásának mértékét a táguló Világegyetemben. Jelölje a téridő P_1 pontja azt az eseményt, amikor az



3. ábra. Az O_1 együttmozgó megfigyelő által P_1 eseményként kibocsátott ω_1 frekvenciájú fényjel P_2 eseményként megérkezik az O_2 együttmozgó megfigyelőhöz, aki azt ω_2 frekvenciájúnak észleli, miközben a Világegyetem tágulása miatt a fényjel vöröseltolódást szenvedett. A szaggatott vonalak a Σ_{τ_1} és Σ_{τ_2} térszerű hiperfelületeket illusztrálják.

1-es együttmozgó megfigyelő (saját lokális mérése szerint) ω_1 frekvenciájú fényjelet bocsát ki, és a téridő P_2 pontja azt az eseményt, amikor ezt a fényjelet a 2-es együttmozgó megfigyelő (saját mérése szerint) ω_2 frekvenciájúnak észleli. Legyen $P_1 \in \Sigma_{\tau_1}$ és $P_2 \in \Sigma_{\tau_2}$, ahol $\tau_2 > \tau_1$. Ekkor a frekvenciák hányadosára fennáll az

$$\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{a(\tau_2)}{a(\tau_1)} \quad (1.2.42.)$$

összefüggés. A táguló Világegyetemben $a(\tau_2) > a(\tau_1)$, ezért $\omega_2 < \omega_1$, azaz az észlelt frekvencia kisebb, mint a kibocsátott frekvencia, azaz a fény frekvenciája a vörös felé tolódik el. **Ez a gravitációs vöröseltolódás jelensége.**

Legyen u_1^a és u_2^a rendre a két, időszzerű geodetikuson mozgó megfigyelő sebességvektora, k^a pedig a fényjel hullámvektora, azaz annak a null-geodetikusnak az érintővektormezeje, amely mentén a fény az 1-es megfigyelőtől eljut a 2-es megfigyelőhöz. Az egyes megfigyelők által mért frekvenciák rendre $\omega_1 = -k_a u_1^a$ és $\omega_2 = -k_a u_2^a$. Az izotrópia miatt létezik ξ^a térszerű Killing¹³-vektormező (az adott irány körüli elforgatásokat generáló egy-paraméteres diffeomorfizmus-csoport orbitájának érintővektor-mezeje). A Killing-vektormezőnek és bármely geodetikus érintővektormezejének skalárszorzata állandó a geodetikus mentén, úgyhogy $(k^a \xi_a)|_{P_1} = (k^a \xi_a)|_{P_2}$ azon null-geodetikus mentén, amelyen a fényjel eljut P_1 -ből P_2 -be. Tudjuk továbbá, hogy k^a fényszerű vektor, ezért időirányú vetületének nagysága meg kell egyezzen a térirányú (azaz a Σ_t -re vett) vetületének nagyságával, vagyis $-k_a u_1^a|_{P_1} = k_a \xi^a / (\xi^b \xi_b)^{1/2}|_{P_1}$ és $-k_a u_2^a|_{P_2} = k_a \xi^a / (\xi^b \xi_b)^{1/2}|_{P_2}$. A Killing-vektor hossza pedig a skálaparaméter növekedésével arányosan nő, $(\xi^b \xi_b)^{1/2}|_{P_1} / (\xi^b \xi_b)^{1/2}|_{P_2} = a(\tau_1) / a(\tau_2)$. Mindebből következik, hogy

$$\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{k_a u_1^a|_{P_1}}{k_a u_2^a|_{P_2}} = \frac{k_a \xi^a}{(\xi^b \xi_b)^{1/2}} \Big|_{P_1} \frac{(\xi^b \xi_b)^{1/2}}{k_a \xi^a} \Big|_{P_2} = \frac{(\xi^b \xi_b)^{1/2}|_{P_2}}{(\xi^b \xi_b)^{1/2}|_{P_1}} = \frac{a(\tau_2)}{a(\tau_1)}, \quad (1.2.43.)$$

amit be akartunk látni.

¹³Wilhelm Karl Joseph Killing, német matematikus, 1847-1923.

Megjegyzés: A gravitációs vöröseltolódás a téridő görbületi sugarához ($\approx 1/H$) képest kicsiny kiterjedésű téridő-tartományokban Doppler¹⁴-effektusként is értelmezhető.

Ilyenkor elhanyagolhatjuk a téridő görbületét. Úgy érvelhetünk, mint a klasszikus fizikában. A 2-es megfigyelő saját lokális inerciarendszeréből nézve azt látja, hogy a fényforrás a tágulás következtében távolodik, de a távolodás $v_f = HR = R/(1/H) \ll 1$ sebessége kicsinynek tekinthető, ahol R a megfigyelő és a fényforrás távolsága. A megfigyelt és az észlelt frekvencia különbsége az emittált frekvencia (v/c) -szerese ($c = 1$),

$$\omega_1 - \omega_2 = v_f \omega_1 = HR \omega_1, \quad (1.2.44.)$$

ahol elhanyagoltuk a Hubble-paraméter változását. Kellően kicsiny téridő-tartományban a kibocsátás és az észlelés közötti idő is kicsi, $\tau_2 - \tau_1 \ll 1/H$. Ekkor $\dot{a} \approx [a(\tau_2) - a(\tau_1)]/(\tau_2 - \tau_1) = [a(\tau_2) - a(\tau_1)]/R$, úgyhogy

$$1 - \frac{\omega_2}{\omega_1} = HR \approx \frac{a(\tau_2) - a(\tau_1)}{a(\tau_2)} = 1 - \frac{a(\tau_1)}{a(\tau_2)}, \quad (1.2.45.)$$

ahonnan visszkapjuk a vöröseltolódásra a korábbi eredményt. Vegyük észre, a helyes eredményt csak akkor kapjuk meg, ha – mint azt következetesen tennünk kell – az $a(\tau)$ paramétert a P_2 pontban fejtjük sorba, hiszen a 2-es megfigyelő lokális inerciarendszeréből nézzük az eseményeket. Korábbi bizonyításunk azonban általános érvényű, bármilyen nagy téridő-tartományban érvényes.

Megjegyzés: Be szokás vezetni a z **vöröseltolódási tényezőt**,

$$z = \frac{\omega_1 - \omega_2}{\omega_2} = \frac{a(\tau_2)}{a(\tau_1)} - 1 \approx HR. \quad (1.2.46.)$$

A Hubble-törvényt is ebben az alakjában fedezte fel Hubble. Az $1 + z$ paraméter lényegében azt méri, hogy hányszorosa most a Világegyetem skálaparamétere az akkori értékének, amikor a most észlelt sugárzást a távoli objektum kibocsátotta.

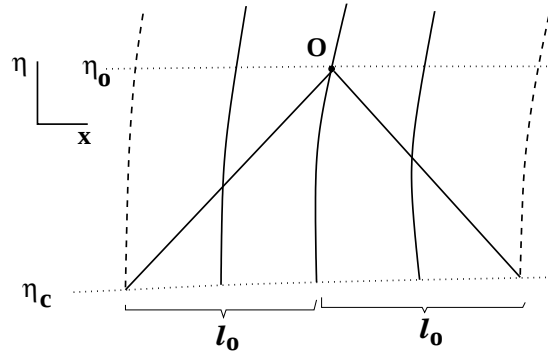
1.2.7. A horizontok

Alapvető kérdés, hogy a Világegyetem mekkora részéről kaphat egy megfigyelő információt, és az is, hogy a megfigyelő fizikai történései a Világegyetem mekkora tartományának történéseire lehetnek kihatással. Egy másik fontos kérdés, hogy a görbült Világegyetem mekkora tartománya tekinthető jó közelítéssel laposnak. Ezekkel a kérdésekkel kapcsolatosak a különböző horizont-fogalmak.

- **A részecske-horizont**

Tegyük fel azt a kérdést, hogy egy tetszőlegesen kiválasztott O izotróp megfigyelő elvileg mennyire tudja megfigyelni a Világegyetemet. A Világegyetemről tetszőleges O izotróp megfigyelő történetének $P \in M$ eseménye pillanatában

¹⁴Christian Andreas Doppler, osztrák matematikus és fizikus, 1803-1853.



4. ábra. A részecske-horizont sematikus ábrája a FLRW-téridő konform diagramján; η a konform idő, x az együttmozgó koordináta. A szaggatott vonalak azon izotróp megfigyelők világvonalai, akiknél távolabbi megfigyelőktől az O izotróp megfigyelő nem kaphatott a jelen τ_0 pillanatig fényjeleket (a $0 \leq \tau \leq \tau_0$ intervallum megfelel a véges $\eta_c \leq \eta \leq \eta_0$ intervallumnak). A szaggatottan jelölt világvonalak jelölik ki azt - az együttmozgó távolságban ℓ_0 sugarú - tartományt a Σ_{τ_0} térszerű hiperfelületen, amelynek határa a jelenlegi részecske-horizont.

rendelkezhet valamilyen mérési tapasztalattal. A maximális mérési tapasztalata azokból a, legfeljebb vákuumbeli fénysebességgel terjedő jelekből tevődhet össze, amelyeket más izotróp megfigyelők küldtek, és amely jelek elérték az O megfigyelőt eddigi története során, azaz a P esemény τ_0 pillanatában, vagyis a jelenben, vagy azt megelőzően.

Definíció: Legyen a Világegyetem kora τ_0 , az ennek megfelelő térszerű hiperfelület $\Sigma_{\tau_0} \subset M$. Ekkor a **részecske-horizont** az a határfelület a téridőben, amely az O izotróp megfigyelő világvonalának $P \in \Sigma_{\tau_0}$ pontjából „látható” és „nem-látható” izotróp megfigyelők világvonalait elválasztja. „Látható”, ill. „nem-látható” megfigyelőn rendre olyan izotróp megfigyelőt értünk, aki tudott, ill. nem tudott olyan fényjelet küldeni, amely elérte az O megfigyelőt a P esemény pillanatában vagy annál korábban.

Az ember azt hihetné, hogy a homogén és izotróp Világegyetem kezdeti korszakában minden megfigyelő tudott jeleket cserélni minden másikkal, hiszen a Világegyetem kora véges, és kezdetben egyetlen szingularitásból indult a fejlődése. Valójában ez még sincsen így. **A FLRW-téridőben mindig létezik részecske-horizont, ha a Világegyetemet sugárzás, por vagy pornál nagyobb $P > 0$ nyomású anyag uralja.**

A helyzet elemzéséhez érdemes bevezetni az izotróp megfigyelők τ sajátideje helyett az η konform időt,

$$\eta = \int_{\tau_i}^{\tau} \frac{d\tau'}{a(\tau')}, \quad (1.2.47.)$$

azaz $d\eta = d\tau/a(\tau)$. Itt τ_0 helyett τ jelöli a Világegyetem változó korát, továbbá a FLRW-modellben a Világegyetem története a Nagy Bummal kezdődik, úgyhogy $\tau_i = 0$. A $ds^2 =$

$-d\tau^2 + a^2(\tau)d\ell^2$ Robertson-Walker-metrika ennek segítségével átirható

$$ds^2 = a^2(\eta)(-d\eta^2 + d\ell^2) \quad (1.2.48.)$$

alakba. Azt mondjuk, hogy ez a metrika **konform lapos** metrika, mert $g_{ab} \rightarrow a^2 g_{ab}$ konform transzformációval kapható meg a Minkowski-metrikából. A Robertson-Walker-metrika szerint ezért a vektorok pontosan akkor időszerű -, térszerű - vagy null-vektorok, ha a Minkowski-metrika szerint is azok. A részecske-horizontnak P -től együttmozgó koordinátákban mért távolsága $\ell_p(\eta) = \eta - \eta_i$, aminek a

$$d_p(\tau) = a(\tau) \int_{\tau_i}^{\tau} \frac{d\tau'}{a(\tau')} \quad (1.2.49.)$$

fizikai távolság felel meg. Az, hogy az O megfigyelő a P esemény pillanatáig kaphatott-e jeleket az összes többi izotróp megfigyelőtől, vagy azoknak csak egy részétől, attól függ, hogy a fenti konform transzformáció az FLRW-téridőt az egész Minkowski-téridőre, vagy annak csak egy tartományára képezi le. Ez azon múlik, hogy az η konform idő mekkora intervallumot fut be, amíg a τ „fizikai” időben a P eseménynek megfelelő pozitív értéktől haladunk visszafelé a $\tau \rightarrow \tau_i = 0$ pillanatig, a Világegyetem kezdetének pillanatáig. Ha $\tau \rightarrow 0$ határesetben $\eta \rightarrow -\infty$, akkor a térben O -tól végtelen (együttmozgó koordinátákban mért) távolságra ($\ell = \int d\ell \rightarrow \infty$) elhelyezkedő megfigyelők is tudhattak P -be fényjelet küldeni, ha azt konform időben $\eta = \ell \rightarrow -\infty$ pillanatban bocsátották ki. Ha $\tau \rightarrow 0$ esetén $\eta \rightarrow \eta_c$ véges értékhez tart, akkor a FLRW-téridőt a fenti konform transzformáció a Minkowski-téridőnek csak az $\eta \geq \eta_c$ tartományára képezi le. Ekkor az együttmozgó izotróp megfigyelők közül csak azok tudhattak fényjelet küldeni P -be, akiknek O -tól együttmozgó koordinátákban mért távolsága $\ell \leq \eta_c$.

A részecske-horizont létezése tehát attól függ, hogy a konform időt definiáló integrál divergál vagy konvergál a $\tau \rightarrow 0$ határon. Az utóbbi pedig azon múlik, hogy hogyan változik az $a(\tau)$ skálaparaméter az együttmozgó megfigyelők óráin mért τ sajátidő, azaz a fizikai idő függvényében. Az $a(\tau)$ -függvény a Friedmann-egyenletek megoldása, alakját a térgeometria (k értéke) és a Világegyetem anyagának összetétele határozza meg. Vegyünk sorra néhány tanulságos esetet:

1. *Por uralta (táguló) Világegyetem* és lapos térgeometria ($k = 0$) esetén a (1.2.40.) egyenletből

$$\dot{a} = \sqrt{C}a^{-1/2} \Rightarrow a^{3/2} \propto \tau, \Rightarrow a \propto \tau^{2/3} \quad (1.2.50.)$$

adódik, úgyhogy

$$\eta \propto \int_0^{\tau} \tau'^{-2/3} d\tau' \propto \tau^{1/3} \xrightarrow{\tau \rightarrow 0} 0. \quad (1.2.51.)$$

Ekkor a (1.2.47.) integrál konvergens, tehát létezik részecske-horizont. Ha a Világegyetem anyaga nem por, hanem $P > 0$ nyomású más anyag, akkor meg lehet mutatni, hogy $a(\tau) > a_{\text{por}}(\tau)$, úgyhogy ekkor is konvergens az integrál és létezik a részecske-horizont.

Por uralta Világegyetemben hiperbolikus térgeometria ($k = -1$), ill. gömbi térgeometria ($k = +1$) esetén a $\tau \rightarrow 0$ határesetben a (1.2.40.) egyenlet jobb oldalán álló (k -t tartalmazó) második tag elhanyagolhatóvá válik a végtelenhez tartó első tag mellett. Ezért a (1.2.47.) integrál viselkedése a $\tau \rightarrow 0$ határesetben ugyanaz lesz, mint a lapos geometria esetén. Tehát ekkor is létezik a részecske-horizont.

2. *Sugárzás uralta* lapos Világegyetemben a (1.2.41.) egyenlet alapján

$$\dot{a} = \sqrt{C'} a^{-1} \Rightarrow a^2 \propto \tau, \Rightarrow a \propto \tau^{1/2} \xrightarrow{\tau \rightarrow 0} 0. \quad (1.2.52.)$$

Innen látjuk, hogy szintén létezik a részecske-horizont.

A hiperbolikus és gömbi térgeometriák esetén a (1.2.41.) egyenlet jobb oldalának második tagja ugyancsak elhanyagolhatóvá válik az első, végtelenhez tartó tag mellett a $\tau \rightarrow 0$ határesetben. Így a viselkedés megint azonos lesz, mint lapos térgeometria esetén, vagyis létezik részecske-horizont.

Megjegyzés: A gömbi térgeometria zárt Világegyetemet jelent, azaz véges térfogatú Világegyetemet. Ekkor jogosnak tűnik az a kérdés, hogy megszűnik-e a részecske-horizont létezése a Nagy Zutty pillanatában. Be lehet látni [1], hogy por uralta zárt Világegyetemben valamely izotróp megfigyelő által a Nagy Bumm pillanatában kibocsátott fény éppen félúton tart a zárt Világegyetem körüljárásában, amikor annak maximális a kiterjedése, azaz a Nagy Zutty pillanatáig teljesen körbejárja a Világegyetemet. Ezért a Nagy Zutty pillanatában megszűnik a részecske-horizont létezni. Ebben az egyetlen pillanatban az O megfigyelő bármelyik irányba is néz, észlelhet olyan fényjelet, amelyet bármelyik másik izotróp megfigyelő bocsátott ki.

A por uralta zárt Világegyetem történetének végső, szingularitást jelentő pillanatát leszámítva tehát mindig létezik részecske-horizont a sugárzás, por, ill. pornál nagyobb $P > 0$ nyomású anyag által uralt FLRW-Világegyetemben. A részecske-horizont nagyságrendje hasonlóan becsülhető meg, mint a Világegyetem τ_0 kora. Ha elhanyagoljuk a skálaparaméter időfüggését, akkor a részecske-horizont fizikai mérete

$$a\ell_0 = a\eta_c \approx a \frac{\tau_0}{a} = \tau_0 \approx 1/H. \quad (1.2.53.)$$

A részecske-horizont nagyságrendje tehát a Hubble-paraméter reciprokának nagyságrendje ($c = 1$ választás esetén).

- **Az esemény-horizont** azt mondja meg, hogy a τ_0 korú Világegyetemben mekkora annak a tartománynak a kiterjedése, ahonnan a τ_0 pillanatban indított fényjelek még elérhetik a P megfigyelőt a Világegyetem teljes további története során.

Legyen a Világegyetem mindenkor kora a konform időben η és legyen η_{max} a Világegyetem történetének vége. Ekkor az esemény-horizontnak P -től együttmozgó koordinátákban mért távolsága $\ell_e(\eta) = \eta_{max} - \eta$, úgyhogy az esemény-horizont fizikai távolsága

$$d_e(\tau) = a(\tau) \int_{\tau}^{\tau_{max}} \frac{d\tau'}{a(\tau')}. \quad (1.2.54.)$$

Itt a FLRW-modellben lapos és hiperbolikus térgeometria esetén $\tau_{max} \rightarrow \infty$, gömbi térgeometria esetén τ_{max} véges, a Nagy Zutty pillanata.

- **A Hubble-horizonton** a mindenkor H Hubble-paraméter reciprokával azonos $d_H(\tau) = H^{-1}$ távolságot értik. Az előbb láttuk, hogy a részecske-horizont a Hubble-horizont nagyságrendjébe esik. Másrészt a FLRW-téridő görbületi sugara közelítőleg H^{-1} .

A FLRW-modellben a skalárgörbület $R = 6(\frac{\ddot{a}}{a} + H^2 + \frac{k}{a^2})$. Ha a jobboldali zárójeles kifejezésben elhanyagolható az első és az utolsó tag a második tag mellett, akkor az állítás teljesül. Lapos vagy hiperbolikus térgeometria esetén a Világegyetem késői korában ez jó közelítéssel teljesül.

Megjegyzés: A részecske-horizont létezése a FLRW-Világegyetemben sajátos problémát vet fel a Világegyetem kezdeti állapotával kapcsolatban. Nevezetesen a kozmikus mikrohullámú háttérsugárzás nagyon alapos tanulmányozása során arra a következtetésre jutottak, hogy a Világegyetem igen nagy pontossággal homogén és izotróp volt, amikor a sugárzás lecsatolódott az anyagról. Mi magyarázza ezt a nagyfokú homogenitást és izotrópiát? Naívan azt várnánk, hogy a megszületése után rendkívül nagy energiasűrűségű Világegyetemben jelentős egyenetlenségek (véletlenszerű, kaotikus sűrűségfluktuációk) voltak. Általában az anyag inhomogenitásai véletlenszerű ütközésekben, a globális termikus (vagy termodinamikai) egyensúly elérésével egyenlítődhetnek ki. Ez azonban valószínűtlen mechanizmus olyan Világegyetemben, amelyben létezik részecske-horizont. Utóbbi esetben ugyanis a Világegyetem különböző darabkái nem tudnak egymással kölcsönhatásba lépni. A Világegyetem nagyfokú homogenitásának és izotrópiájának tehát valamilyen más oka kell legyen. Többféle elgondolás született az okokat illetően. Az egyik szerint általunk ismeretlen okból a Világegyetem eleve homogén és izotróp állapotban született meg. Ez elég valószínűtlennek tűnő feltevés, de van olyan kozmológiai modell, amely erre épít (a Penrose által megfogalmazott Ciklikus Konform Kozmológia (Cyclic Conform Cosmology)), és képes magyarázni a Világegyetemre vonatkozó eddigi ismereteinket. Egy másik, Misner¹⁵ nevéhez fűződő elgondolás abból indult ki, hogy kezdetben a Világegyetem nagyon különbözött a FLRW-féle modelltől és nem létezett benne részecske-horizont. A kezdeti inhomogenitásnak és anizotrópiának talán olyan mechanizmusok révén kellett volna lecsengenie, mint az anyag viszkozitása vagy a kvantumozott részecske-keltés visszahatása. Nem sikerült azonban megnyugtató magyarázatot találni arra, hogyan csengett volna le az anizotrópia, és hogyan tudott volna egy kezdetben kaotikus állapot egy homogén és izotróp állapotba fejlődni. Az is az elképzelés ellen szól, hogy a nagy méretskálán kezdetben jelenlevő anizotrópia gravitációsan önkölcsönható rendszerekben nem csökkenni, hanem nőni szokott. Pontosan ez magyarázza, hogy a sugárzás lecsatolódása idején jelenlevő kb. 10^{-5} relatív amplitudójú (azaz kb. 0,001 %-os) sűrűségfluktuációkból kialakult a mai Világegyetem nagyléptékű szerkezete a maga kozmikus méretű üregeivel és falaival. Utóbbi időben az az elképzelés tűnik rendkívül sikeresnek a megfigyelések magyarázata tekintetében, amelyik abból indul ki, hogy a Világegyetem fejlődésének korai szakaszában óriási mértékben felfúvódott. Ez akkortájt történhetett, amikor a Világegyetem kora kb. a τ_P Planck-idő nagyságrendjébe esett vagy kevéssel azután. Ekkor az a skálaparaméter eredeti értékének kb. $e^{50} - e^{70}$ -szeresére nőtt meg viszonylag rövid idő alatt, amivel együtt a részecske-horizont is hasonló arányban megnőtt. Ez tette lehetővé, hogy a kezdetben kaotikus Világegyetem homogén és izotróp állapotba fejlődjön. Az utóbbi elképzelés a Felfúvódó Világegyetem modelljében (Inflationary Universe) fogalmazódott meg, amely-

¹⁵Charles W. Misner, amerikai fizikus, 1932-

nek létrejöttében Guth¹⁶, Linde¹⁷, Starobinsky¹⁸ és Steinhardt¹⁹ játszottak meghatározó szerepet.

Megjegyzés: Az anyagról és az alapvető kölcsönhatásokról a fizika eddigi fejlődése során szerzett ismereteink alapján a Világegyetem fejlődését megbízhatóan nyomon tudjuk követni egészen a Nagy Bumm utáni kb. 10^{-14} s-tól napjainkig, feltételezve hogy mindvégig a Robertson-Walker-metrika volt érvényben. Ezt nevezzük a Világegyetem fejlődését leíró **Standard Kozmológiai modellnek**. Ennek a modellnek egyik lényegi vonása, hogy kezdetben a Világegyetemet a sugárzás uralta, majd bekövetkezett egy pillanat, amikor a kondenzált anyag energiasűrűsége egyenlővé vált a sugárzás energiasűrűségével. Ezután a kondenzált anyag uralta a Világegyetemet. A Standard Kozmológiai modell elsődleges célja az általunk „ma” látható Világegyetem megértése. Minél messzebbre látunk el a térben mai egyre fejlettebb távcsöveinkkel, annál korábbra nézünk vissza a Világegyetem történetében. Az égboltba „belenézni” nem más, mint egy nagy időutazást csinálni.

A Nagy Bumm utáni kb. 10^{-14} s az az időpillanat, amikor a Világegyetem kb. 10 TeV hőmérsékletű volt. Az elektrogyenge és erős kölcsönhatás Standard Modellje már érvényes volt, de még jóval nagyobb volt a hőmérséklet, mint az a kb. 100 GeV, amelyen az elektrogyenge kölcsönhatás szimmetriájának spontán sérülése bekövetkezett. Ennél korábbi időszakra azért nem tudunk igazán megbízhatóan extrapolálni, mert nem ismerjük, milyen fizikai törvények és kölcsönhatások érvényesek a 10 TeV feletti energiasűrűségeken. A Világegyetem sugárzás uralta időszakaiban használhatjuk a kozmikus háttérsugárzás hőmérsékletét is annak jellemzésére, hogy mennyi idővel vagyunk a Nagy Bumm után, hiszen a hőmérséklet a tágulás során maga is gravitációs vöröseltolódást szenved. Ha $T_{\gamma 0} = T_{\gamma}(\tau_0)$ a mikrohullámú kozmikus háttérsugárzás jelenlegi hőmérséklete, akkor korábban $T_{\gamma}(\tau) = T_{\gamma 0}(1+z)$ volt, (hiszen ugyanúgy változott, mint a sugárzás frekvenciája). Másrészt, ha $a(\tau_0)$ a jelenlegi skálaparaméter, akkor $1+z = a(\tau_0)/a(\tau)$, de sugárzás uralta Világegyetemben $a(\tau) \propto \tau^{1/2}$, mint láttuk, úgyhogy $T_{\gamma}(\tau) = T_{\gamma 0}a(\tau_0)/a(\tau) \propto \tau^{-1/2}$. Ez mutatja, hogy a vöröseltolódást is és a hőmérsékletet is használhatjuk „óráként”. A konvenció az, hogy az így értelmezett hőmérsékletet használjuk akkor is a Világegyetem korának megjelölésére, amikor azt már nem a sugárzás uralja.

A Világegyetem fejlődésének vázlatos leírása megtalálható a Kozmológia alapjai c. oktatási segédlet 3. fejezetében.

¹⁶Alan Harvey Guth, amerikai fizikus, 1947-

¹⁷Andrei Dmitriyevich Linde, orosz, amerikai fizikus, 1948-

¹⁸Alexei Alexandrovich Starobinsky, szovjet, orosz fizikus, 1948-

¹⁹Paul Joseph Steinhardt, amerikai fizikus, 1952-

2. A Schwarzschild-megoldás

2.1. A téridő sztatikus, gömbszimmetrikus test környezetében

Azt a kérdést szeretnénk megválaszolni, hogy milyen a téridő egy gömbszimmetrikus, sztatikus objektumon kívül, ahol az energiainpulzus-tenzor azonosan eltűnik. Ebből a célból meg akarjuk keresni az

$$R_{ab} = 0 \quad (2.1.1.)$$

Einstein-egyenletek megoldásául szolgáló összes olyan g_{ab} metrikát, amely gömbszimmetrikus és sztatikus téridőt ír le. Először pontosítjuk, hogy mit is értünk sztatikus és gömbszimmetrikus téridőn.

2.1.1. A sztatikus és a sztatikus és gömbszimmetrikus téridő metrikája

Definíció: A téridőt **stacionáriusnak** nevezzük, ha létezik olyan egy-paraméteres ϕ_t izometria-csoport, amelynek orbitái időszerű görbék. Ez egyenértékű azzal, hogy létezik egy időszerű ξ^a Killing-vektormező. A ξ^a Killing-vektorok a ϕ_t izometria-csoport orbitáinak az érintővektorai.

Megjegyzés: A ϕ_t izometria-csoport létezése azt jelenti, hogy a téridő időbeli eltolási szimmetriával rendelkezik, azaz a metrika invariáns a ϕ_t időbeli eltolásokkal szemben, vagyis a ξ^a Killing-vektormező szerinti Lie²⁰-deriváltja azonosan eltűnik,

$$\mathcal{L}_\xi g_{ab} = \nabla_b \xi_a + \nabla_a \xi_b = 0. \quad (2.1.2.)$$

Definíció: A téridőt **sztatikusnak** nevezzük, ha stacionárius és létezik a ξ^a Killing-vektormezőre ortogonális Σ térszerű hiperfelület. A Frobenius²¹-tétel értelmében a Killing-vektormező akkor és csak akkor hiperfelület-ortogonális, ha kielégíti a

$$\xi_{[a} \nabla_b \xi_{c]} = 0 \quad (2.1.3.)$$

feltételt.

Sztatikus téridőben természetes módon kínálkozik a koordinátarendszer alábbi választása. A Σ térszerű hiperfelületen válasszunk tetszőleges (x^1, x^2, x^3) térkoordinátákat, valamint az $x^0 = 0$ koordinátát. Ha $\xi^a \neq 0$ a Σ hiperfelületen, akkor

²⁰Marius Sophus Lie, norvég matematikus, 1842-1899.

²¹Ferdinand Georg Frobenius, német matematikus, 1849-1917.

a Σ -nak van olyan környezete, amelyből vett bármely p ponton a ϕ_t izometria-csoport pontosan egy, a Σ -t is metsző orbitája fog áthaladni. Rendeljük ekkor p -hez azon $q \in \Sigma$ pont térkoordinátáinak értékeit, amely q pontban a p -n áthaladó orbita metszi Σ -t. Továbbá rendeljük p -hez azt a t paraméter-értéket, amelyhez tartozó ϕ_t izometria-transzformáció viszi át a $q \in \Sigma$ pontot p -be. A Σ_t felületet úgy definiáljuk, mint mindazon pontok halmazát, amelyeket ugyanazzal a t paraméter-értékkel címkéztünk meg. Az így értelmezett Σ_t felület a Σ hiperfelület ϕ_t izometria által előállított képe, $\Sigma_t = \phi_t(\Sigma)$, és ezért szintén ortogonális a ξ^a Killing-vektormezőre. Jelöljük a Killing-vektor normanégyzetének mínusz egyszerűsítését $V^2(x^1, x^2, x^3) = -\xi^a \xi_a > 0$ -val. Ekkor a bevezetett koordinátarendszerben a metrika

$$ds^2 = -V^2(x^1, x^2, x^3)dt^2 + \sum_{\mu, \nu=1}^3 h_{\mu\nu}(x^1, x^2, x^3)dx^\mu dx^\nu \quad (2.1.4.)$$

alakot ölt. Hiányzanak a $dt dx^\mu$ típusú kereszttagok, ami annak a következménye, hogy sztatikus a téridő, azaz hogy a Killing-vektormező ortogonális a Σ térszerű hiperfelületre. Stacionárius, de nem sztatikus esetben ezek a tagok is fellépnének.

Megjegyzés: A sztatikus téridő **időmegfordítási szimmetriával** is rendelkezik. Ez abból következik, hogy a Σ hiperfelület a Σ_t hiperfelületből ugyancsak megkapható izometria-transzformációval, nevezetesen ϕ_{-t} hatására: $\Sigma = \phi_{-t}(\Sigma_t)$. Előfordulhat azonban, hogy időtől független anyag- és sebességeloszlású anyag jelenlétében a téridő nem rendelkezik időmegfordítási szimmetriával. Ebben az esetben nem teljesül a Killing-vektormező hiperfelület-ortogonalitását biztosító (2.1.3.) feltétel, a szomszédos orbiták egymás köré csavarodnak [1]. A (2.1.3.) feltétel teljesülése szükséges és elégséges ahhoz, hogy a téridő időmegfordítási szimmetriával rendelkezzen.

Definíció: A téridő **gömbszimmetrikus**, ha létezik az izometria-csoportjának olyan alcsoportja, amely izomorf a 3-dimenziós euklideszi térben történő valódi forgatások $SO(3)$ csoportjával. Ennek az orbitái 2-dimenziós gömbfelületek. (Az orbita ebben az esetben az összes olyan pont halmaza, amelyeket a téridő egy adott pontjából $SO(3)$ izometria-transzformációkkal kaphatunk.)

Az $SO(3)$ csoport-transzformációknak adott irányú körüli adott szögű elforgatások feleltethetők meg $\mathbb{R}^3$ -ban. Az $SO(3)$ csoport topológiája homeomorf az $\mathbb{R}^3$ -ba rajzolt olyan π sugarú gömb topológiájával, amelynek felületén a diametrálisan átellenes pontok azonosak. A csoport orbitái (az adott szögű, összes különböző lehetséges irányú elforgatásoknak megfelelő pontok halmazai) $\mathbb{R}^3$ -ba ágyazott 2-dimenziós gömbfelületek, amelyeken (θ, ϕ) gömbi polárkoordinátákat vezethetünk be.

A téridő $SO(3)$ -izometriái ezért fizikailag forgatásokként értelmezhetők, és a téridő gömbszimmetrikus, ha a metrikája invariáns marad az $SO(3)$ forgatásokkal szemben. A téridő metrikája metrikát indukál minden egyes $SO(3)$ -orbitán, ennek

azonban a forgásszimmetria miatt az egység-sugarú 2-dimenziós gömbfelület metrikájával kell arányosnak lennie. Így az egyes orbitákon indukált metrikát kimerítően jellemzi az orbita A felülete. Gömbszimmetrikus téridőben ezért érdemes bevezetni az

$$r = \left(\frac{A}{4\pi} \right)^{1/2} \quad (2.1.5.)$$

radiális koordinátát, amelynek és a **gömbi polárszögeknek**, mint koordinátáknak a segítségével az orbiták metrikája

$$r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2). \quad (2.1.6.)$$

Megjegyzés: Ha Σ topológiailag a 3-dimenziós euklideszi térrel homeomorf, akkor r a gömb sugarának tekinthető, azaz a gömbfelület és a gömb középpontja közötti távolságnak. Ha azonban más a tér topológiája, pl. $\mathbb{R} \times S^2$, akkor nincsen az orbitáknak középpontja. Ekkor az r koordináta nem hordoz olyan jelentést, hogy „középponttól mért távolság”.

Állítás: Ha a téridő sztatikus, gömbszimmetrikus és a ξ^a Killing-vektormező egyértelműen meghatározott (amit mi mindig fel fogunk tenni), akkor a ξ^a Killing-vektormező ortogonális az $SO(3)$ -orbitákat jelentő 2-dimenziós gömbfelületekre.

Ha ξ^a egyértelműen meghatározott, akkor invariánsnak kell lennie valamennyi $SO(3)$ izometria-transzformációval szemben. Akkor viszont ξ^a bármely orbitára vett vetületének zérusnak kell lennie, mert ha a vetület-vektormező a gömbfelületen nem lenne azonosan zérus, akkor nem lehetne invariáns valamennyi $SO(3)$ -transzformációval szemben.

Az $SO(3)$ -orbiták tehát olyan 2-dimenziós gömbfelületek, amelyek teljes egészében a ξ^a -ra merőleges Σ_t hiperfelületekben helyezkednek el. Ennek következtében természetes módon vezethetünk be koordinátarendszert. Válasszunk egy orbitát Σ_0 -ban, és vezessünk be rajta (θ, ϕ) szférikus koordinátákat, aztán emeljük át ezeket a koordinátákat a többi 2-dimenziós gömbfelületre az orbitákra merőleges geodetikussereg segítségével. Utóbbiak a $\nabla^a r$ vektormező integrálgörbéi. (Eljárásunk hasonló ahhoz, ahogy az (x^1, x^2, x^3) koordinátákat emeltük át Σ_0 -ról a szomszédos Σ_t hiperfelületekre izotróp megfigyelők geodetikusai mentén a homogén és izotróp Világegyetem példáján.) Ha $\nabla^a r \neq 0$, akkor az (r, θ, ϕ) koordinátákat használhatjuk Σ_0 -n, amelyeket aztán ξ^a integrálgörbéi mentén emelünk át Σ_t -re. Végül a (t, r, θ, ϕ) koordinátákban **a sztatikus, gömbszimmetrikus téridő metrikája**

$$ds^2 = -f(r)dt^2 + h(r)dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \quad (2.1.7.)$$

alakot ölt, ahol $f(r)$ és $h(r)$ tetszőleges függvények, amelyek a gömbszimmetria miatt nem függenek a (θ, ϕ) szögektől. A gömbi koordinátarendszer nem használható olyan pontokban, ahol $\xi^a = 0$ vagy $\nabla^a r = 0$, vagy általában ha ξ^a és $\nabla^a r$ kollineárisak.

Az $R_{ab} = 0$ Einstein-egyenletek megoldása szempontjából ez azt jelenti, hogy a metrika 10 darab független, 4-változós komponensének meghatározása helyett a

feladat mindössze 2 darab 1-változós függvény, $f(r)$ és $h(r)$ meghatározására egyszerűsödött.

2.1.2. Térídő sztatikus, gömbszimmetrikus testen kívül

Az $R_{ab} = 0$ Einstein-egyenletek megoldásának első lépése, hogy meg kell határozzuk a Ricci-tenzor komponenseit a (2.1.7.) metrika ismeretében, mint az egyelőre ismeretlen $f(r)$ és $h(r)$ függvények kifejezéseit. Ezt a tetrad-módszer 2. változatának alkalmazásával tesszük. A (2.1.7.) metrikához a $ds^2 = \sum_{\mu,\nu} \eta^{\mu\nu} (e_\mu)^a (e_\nu)_a$ összefüggés alapján választhatjuk az

$$\begin{aligned} (e_0)_a &= f^{1/2}(dt)_a, \\ (e_1)_a &= h^{1/2}(dr)_a, \\ (e_2)_a &= r(d\theta)_a, \\ (e_3)_a &= r \sin \theta (d\phi)_a \end{aligned} \quad (2.1.8.)$$

ortonormált bázist. Ebben a bázisban a Ricci-tenzor $R_{\mu\nu} = R_{ab}(e_\mu)^a (e_\nu)^b$ azonosan el nem tűnő komponensei:

$$\begin{aligned} R_{00} &= \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{fh}} \frac{d}{dr} \frac{f'}{\sqrt{fh}} + \frac{f'}{rfh}, \\ R_{11} &= -\frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{fh}} \frac{d}{dr} \frac{f'}{\sqrt{fh}} + \frac{h'}{rh^2}, \\ R_{22} &= -\frac{1}{2} \frac{f'}{rfh} + \frac{1}{2} \frac{h'}{rh^2} + \frac{1}{r^2} \left(1 - \frac{1}{h}\right) = R_{33}, \end{aligned} \quad (2.1.9.)$$

ahol $\dots' = d\dots/dr$. A Ricci-tenzor többi komponense szimmetria-okoknál fogva eltűnik: a Σ_t hiperfelületek ortogonálisak a ξ^a Killing-vektormezőre, ezért azonosan eltűnnek a Ricci-tenzor (idő-tér)-komponensei, mert az $R_{ab}(e_0)^b$ vektornak nem lehet térszerű komponense; a $\nabla_a r$ vektormező integrálgörbéi ortogonálisak az $SO(3)$ -orbitáknak megfelelő 2-dimenziós gömbfelületekre, ezért azonosan zérus R_{12} és R_{13} ; végül a gömbszimmetria miatt R_{23} is eltűnik és $R_{22} = R_{33}$.

A (2.1.9.) összefüggések kiszámolásához először a konnexiók egy-formákat határozzuk meg a (??) feltételekből. Ezek bal oldalán rendre az alábbi kifejezések állnak:

$$\begin{aligned} \partial_{[a}(e_0)_{b]} &= \partial_{[a} f^{1/2}(dt)_{b]} = \frac{1}{2} f^{-1/2} f'(dr)_{[a}(dt)_{b]}, \\ \partial_{[a}(e_1)_{b]} &= \partial_{[a} h^{1/2}(dr)_{b]} = \frac{1}{2} h^{-1/2} h'(dr)_{[a}(dr)_{b]} = 0, \\ \partial_{[a}(e_2)_{b]} &= \partial_{[a} r(d\theta)_{b]} = (dr)_{[a}(d\theta)_{b]}, \\ \partial_{[a}(e_3)_{b]} &= \partial_{[a} r \sin \theta (d\phi)_{b]} = \sin \theta (dr)_{[a}(d\phi)_{b]} + r \cos \theta (d\theta)_{[a}(d\phi)_{b]}. \end{aligned} \quad (2.1.10.)$$

A (??) egyenletek

$$\begin{aligned}\sum_{\mu,\nu}\eta^{\mu\nu}(e_\mu)_{[a}\omega_{b]}\sigma_\nu &= -(e_0)_{[a}\omega_{b]}\sigma_0 + (e_1)_{[a}\omega_{b]}\sigma_1 + (e_2)_{[a}\omega_{b]}\sigma_2 + (e_3)_{[a}\omega_{b]}\sigma_3 \\ &= -f^{1/2}(dt)_{[a}\omega_{b]}\sigma_0 + h^{1/2}(dr)_{[a}\omega_{b]}\sigma_1 + r(d\theta)_{[a}\omega_{b]}\sigma_2 + r\sin\theta(d\phi)_{[a}\omega_{b]}\sigma_3\end{aligned}\quad (2.1.11.)$$

jobb oldalait is részletesen kiírva, az alábbi egyenleteket kapjuk az $\omega_{a\mu\nu} = -\omega_{a\nu\mu}$ konnexiós 1-formákra:

$$\frac{1}{2}f^{-1/2}f'(dr)_{[a}(dt)_{b]} = h^{1/2}(dr)_{[a}\omega_{b]01} + r(d\theta)_{[a}\omega_{b]02} + r\sin\theta(d\phi)_{[a}\omega_{b]03}, \quad (2.1.12.)$$

$$0 = f^{1/2}(dt)_{[a}\omega_{b]01} + r(d\theta)_{[a}\omega_{b]12} + r\sin\theta(d\phi)_{[a}\omega_{b]13}, \quad (2.1.13.)$$

$$(dr)_{[a}(d\theta)_{b]} = f^{1/2}(dt)_{[a}\omega_{b]02} - h^{1/2}(dr)_{[a}\omega_{b]12} + r\sin\theta(d\phi)_{[a}\omega_{b]23}, \quad (2.1.14.)$$

$$\sin\theta(dr)_{[a}(d\phi)_{b]} + r\cos\theta(d\theta)_{[a}(d\phi)_{b]} = f^{1/2}(dt)_{[a}\omega_{b]03} - h^{1/2}(dr)_{[a}\omega_{b]13} - r(d\theta)_{[a}\omega_{b]23}. \quad (2.1.15.)$$

Próbálkozzunk azzal, hogy a (2.1.12.) egyenletet $\omega_{b02} = \omega_{b03} = 0$ -val elégítsük ki, ekkor

$$\omega_{b01} = \frac{1}{2}\frac{f'}{\sqrt{fh}}(dt)_b + \alpha_1(dr)_b, \quad (2.1.16.)$$

ahol $\alpha_1(r)$ egyelőre meghatározatlan függvény. Helyettesítsük ezt be a (2.1.13.) egyenletbe, akkor $\alpha_1 = 0$ adódik, mert az egyenlet többi tagjaiban nem léphet fel a $(dt)_{[a}(dr)_{b]}$ tenzor. Keressük a (2.1.13.) egyenlet megoldását

$$\begin{aligned}\omega_{b12} &= \alpha_2(d\theta)_b + \alpha_3(d\phi)_b, \\ \omega_{b13} &= \alpha_4(d\phi)_b + \frac{\alpha_3}{\sin\theta}(d\theta)_b\end{aligned}\quad (2.1.17.)$$

alakban, ahol α_2 , α_3 és α_4 egyelőre meghatározatlan függvények. A fentieket behelyettesítjük a (2.1.14.) egyenletbe, ahonnan $\alpha_2 = -1/\sqrt{h}$ adódik, továbbá azt kapjuk, hogy

$$\alpha_3\sqrt{h}(dr)_{[a}(d\phi)_{b]} = r\sin\theta(d\phi)_{[a}\omega_{b]23}, \quad (2.1.18.)$$

ahonnan

$$\omega_{b23} = -\alpha_3\frac{\sqrt{h}}{r\sin\theta}(dr)_b + \alpha_5(d\phi)_b, \quad (2.1.19.)$$

ahol α_5 további meghatározatlan függvény. Végül a fentieket behelyettesítjük a (2.1.15.) egyenletbe:

$$\begin{aligned}\sin\theta(dr)_{[a}(d\phi)_{b]} + r\cos\theta(d\theta)_{[a}(d\phi)_{b]} &= -h^{1/2}(dr)_{[a}\left(\alpha_4(d\phi)_{b]} + \frac{\alpha_3}{\sin\theta}(d\theta)_{b]}\right) \\ &\quad - r(d\theta)_{[a}\left(-\alpha_3\frac{\sqrt{h}}{r\sin\theta}(dr)_b + \alpha_5(d\phi)_b\right),\end{aligned}\quad (2.1.20.)$$

ahonnan leolvashatjuk, hogy

$$\alpha_3 = 0, \quad \alpha_4 = -\frac{\sin\theta}{\sqrt{h}}, \quad \alpha_5 = -\cos\theta. \quad (2.1.21.)$$

Mivel a kezdeti feltevéseink, $\omega_{b02} = \omega_{b03}$ nem vezetett ellentmondásra, azért valóban megtaláltuk az *egyetlen* megoldást:

$$\begin{aligned}\omega_{b02} = \omega_{b03} = 0, \quad \omega_{b01} &= \frac{1}{2} \frac{f'}{\sqrt{fh}} (dt)_b, \quad \omega_{b12} = -\frac{1}{\sqrt{h}} (d\theta)_b, \\ \omega_{b13} &= -\frac{\sin \theta}{\sqrt{h}} (d\phi)_b, \quad \omega_{b23} = -\cos \theta (d\phi)_b.\end{aligned}\tag{2.1.22.}$$

A Ricci-féle rotációs együtthatókat behelyettesítjük az $R_{ab\mu\nu}$ görbületi 2-formák (??) kifejezéseibe, ahonnan

$$R_{ab\mu\nu} = 2\partial_{[a}\omega_{b]\mu\nu} + 2\sum_{\alpha}\omega_{[a|\mu}{}^{\alpha}\omega_{b]|\alpha\nu} = -R_{ab\nu\mu}.\tag{2.1.23.}$$

Szükségünk lesz az alábbi kifejezésekre:

$$\begin{aligned}2\partial_{[a}\omega_{b]01} &= \partial_{[a}\frac{f'}{\sqrt{fh}}(dt)_{b]} = \frac{d}{dr}\frac{f'}{\sqrt{fh}}(dr)_{[a}(dt)_{b]}, \\ 2\partial_{[a}\omega_{b]02} &= 2\partial_{[a}\omega_{b]03} = 0, \\ 2\partial_{[a}\omega_{b]12} &= -2\partial_{[a}\frac{1}{\sqrt{h}}(d\theta)_{b]} = -2\frac{d}{dr}\frac{1}{\sqrt{h}}(dr)_{[a}(d\theta)_{b]} = \frac{h'}{h^{3/2}}(dr)_{[a}(d\theta)_{b]}, \\ 2\partial_{[a}\omega_{b]13} &= -2\partial_{[a}\frac{\sin \theta}{\sqrt{h}}(d\phi)_{b]} = \left(\frac{h'\sin \theta}{h^{3/2}}(dr)_{[a}(d\phi)_{b]} - \frac{2\cos \theta}{\sqrt{h}}(d\theta)_{[a}(d\phi)_{b]}\right), \\ 2\partial_{[a}\omega_{b]23} &= -2\partial_{[a}\cos \theta(d\phi)_{b]} = 2\sin \theta(d\theta)_{[a}(d\phi)_{b]},\end{aligned}\tag{2.1.24.}$$

továbbá az

$$2\sum_{\alpha}\omega_{[a|\mu}{}^{\alpha}\omega_{b]|\alpha\nu} = -2\omega_{[a|\mu 0}\omega_{b]|\alpha\nu} + 2\omega_{[a|\mu 1}\omega_{b]|\alpha\nu} + 2\omega_{[a|\mu 2}\omega_{b]|\alpha\nu} + 2\omega_{[a|\mu 3}\omega_{b]|\alpha\nu}\tag{2.1.25.}$$

ékszorzatok alábbi kifejezéseire:

$$\begin{aligned}2\sum_{\alpha}\omega_{[a|0}{}^{\alpha}\omega_{b]|\alpha 1} &= -2\omega_{[a|02}\omega_{b]|\alpha 1} - 2\omega_{[a|03}\omega_{b]|\alpha 1} = 0, \\ 2\sum_{\alpha}\omega_{[a|0}{}^{\alpha}\omega_{b]|\alpha 2} &= 2\omega_{[a|01}\omega_{b]|\alpha 2} = -\frac{f'}{h\sqrt{f}}(dt)_{[a}(d\theta)_{b]}, \\ 2\sum_{\alpha}\omega_{[a|0}{}^{\alpha}\omega_{b]|\alpha 3} &= 2\omega_{[a|01}\omega_{b]|\alpha 3} = -\frac{f'\sin \theta}{h\sqrt{f}}(dt)_{[a}(d\phi)_{b]}, \\ 2\sum_{\alpha}\omega_{[a|1}{}^{\alpha}\omega_{b]|\alpha 2} &= -2\omega_{[a|13}\omega_{b]|\alpha 2} = -\frac{\sin 2\theta}{\sqrt{h}}(d\phi)_{[a}(d\phi)_{b]} = 0, \\ 2\sum_{\alpha}\omega_{[a|1}{}^{\alpha}\omega_{b]|\alpha 3} &= 2\omega_{[a|12}\omega_{b]|\alpha 3} = \frac{2\cos \theta}{\sqrt{h}}(d\theta)_{[a}(d\phi)_{b]}, \\ 2\sum_{\alpha}\omega_{[a|2}{}^{\alpha}\omega_{b]|\alpha 3} &= -2\omega_{[a|12}\omega_{b]|\alpha 3} = -\frac{2\sin \theta}{h}(d\theta)_{[a}(d\phi)_{b]}.\end{aligned}\tag{2.1.26.}$$

Az azonosan el nem tűnő görbületi 2-formák végül:

$$\begin{aligned}
R_{ab01} &= \frac{d}{dr} \frac{f'}{\sqrt{fh}} (dr)_{[a} (dt)_{b]}, \\
R_{ab02} &= -\frac{f'}{h\sqrt{f}} (dt)_{[a} (d\theta)_{b]}, \\
R_{ab03} &= -\frac{f' \sin \theta}{h\sqrt{f}} (dt)_{[a} (d\phi)_{b]}, \\
R_{ab12} &= \frac{h'}{h^{3/2}} (dr)_{[a} (d\theta)_{b]}, \\
R_{ab13} &= \left(\frac{h' \sin \theta}{h^{3/2}} (dr)_{[a} (d\phi)_{b]} - \frac{2 \cos \theta}{\sqrt{h}} (d\theta)_{[a} (d\phi)_{b]} \right) + \frac{2 \cos \theta}{\sqrt{h}} (d\theta)_{[a} (d\phi)_{b]} \\
&= \frac{h' \sin \theta}{h^{3/2}} (dr)_{[a} (d\phi)_{b]}, \\
R_{ab23} &= 2 \sin \theta (d\theta)_{[a} (d\phi)_{b]} - \frac{2 \sin \theta}{h} (d\theta)_{[a} (d\phi)_{b]} = 2 \left(1 - \frac{1}{h} \right) \sin \theta (d\theta)_{[a} (d\phi)_{b]}. \quad (2.1.27.)
\end{aligned}$$

Ezeket felhasználva tudjuk meghatározni a Ricci-tenzor komponenseit,

$$\begin{aligned}
R_{\rho\mu} &= \sum_{\sigma,\nu} \eta^{\sigma\nu} R_{\rho\sigma\mu\nu} = (e_\rho)^a \sum_{\sigma,\nu} \eta^{\sigma\nu} (e_\sigma)^b R_{ab\mu\nu} \\
&= (e_\rho)^a [-(e_0)^b R_{ab\mu 0} + (e_1)^b R_{ab\mu 1} + (e_2)^b R_{ab\mu 2} + (e_3)^b R_{ab\mu 3}]. \quad (2.1.28.)
\end{aligned}$$

Kiszámításukhoz szükségünk lesz a $(dr)^a (dr)_a$, stb. kontrakciókra, amelyeket az ortonormáltság $(e_\mu)^a (e_\nu)_a = \eta_{\mu\nu}$ feltételéből kapunk meg. Mivel $\mu \neq \nu$ esetén $(e_\mu)^a (e_\nu)_a = 0$, ezért a $(dt)^a (dr)_a = (dt)^a (d\theta)_a = (dt)^a (d\phi)_a = (dr)^a (d\theta)_a = (dr)^a (d\phi)_a = (d\theta)^a (d\phi)_a = 0$, továbbá a bázisvektorok normanégyszeteiből

$$\begin{aligned}
(e_0)^a (e_0)_a &= f (dt)^a (dt)_a = -1, & \Rightarrow & (dt)^a (dt)_a = -\frac{1}{f}, \\
(e_1)^a (e_1)_a &= h (dr)^a (dr)_a = +1, & \Rightarrow & (dr)^a (dr)_a = \frac{1}{h}, \\
(e_2)^a (e_2)_a &= r^2 (d\theta)^a (d\theta)_a = +1, & \Rightarrow & (d\theta)^a (d\theta)_a = \frac{1}{r^2}, \\
(e_3)^a (e_3)_a &= r^2 \sin^2 \theta (d\phi)^a (d\phi)_a = +1, & \Rightarrow & (d\phi)^a (d\phi)_a = \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \quad (2.1.29.)
\end{aligned}$$

adódik. Példaként álljon itt a Ricci-tenzor R_{00} komponensének kiszámítása:

$$\begin{aligned}
R_{00} &= (e_0)^a [(e_1)^b R_{ab01} + (e_2)^b R_{ab02} + (e_3)^b R_{ab03}] \\
&= f^{1/2} (dt)^a \left[h^{1/2} (dr)^b \frac{d}{dr} \frac{f'}{\sqrt{fh}} (dr)_{[a} (dt)_{b]} - r (d\theta)^b \frac{f'}{h\sqrt{f}} (dt)_{[a} (d\theta)_{b]} \right. \\
&\quad \left. - r \sin \theta (d\phi)^b \frac{f' \sin \theta}{h\sqrt{f}} (dt)_{[a} (d\phi)_{b]} \right] \\
&= f^{1/2} (dt)^a (dt)_a \left[-\frac{1}{2} h^{1/2} (dr)^b (dr)_b \frac{d}{dr} \frac{f'}{\sqrt{fh}} - \frac{1}{2} r \frac{f'}{h\sqrt{f}} (d\theta)^b (d\theta)_b \right. \\
&\quad \left. - \frac{1}{2} r \sin \theta \frac{f' \sin \theta}{h\sqrt{f}} (d\phi)^b (d\phi)_b \right] \\
&= \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{fh}} \frac{d}{dr} \frac{f'}{\sqrt{fh}} + \frac{f'}{rfh}, \quad (2.1.30.)
\end{aligned}$$

és hasonlóan kapjuk meg R_{11} , R_{22} és R_{33} kifejezését.

Az Ricci-tenzor (2.1.9.) komponenseinek felhasználásával a sztatikus, gömbszimmetrikus testen kívüli téridőben a független Einstein-egyenletek

$$0 = \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{fh}} \frac{d}{dr} \frac{f'}{\sqrt{fh}} + \frac{f'}{r f h}, \quad (2.1.31.)$$

$$0 = -\frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{fh}} \frac{d}{dr} \frac{f'}{\sqrt{fh}} + \frac{h'}{r h^2}, \quad (2.1.32.)$$

$$0 = -\frac{1}{2} \frac{f'}{r f h} + \frac{1}{2} \frac{h'}{r h^2} + \frac{1}{r^2} \left(1 - \frac{1}{h}\right) \quad (2.1.33.)$$

alakot öltenek. Adjuk össze a (2.1.31.) és (2.1.32.) egyenletek megfelelő oldalait, ekkor a

$$0 = \frac{f'}{f} + \frac{h'}{h} \quad (2.1.34.)$$

egyenletet kapjuk, ahonnan $\ln f = -\ln h + \ln K$ ($K = \text{áll.}$), azaz

$$f = \frac{K}{h} \quad (2.1.35.)$$

adódik. Ha átskálázzuk a t időkoordinátát, $dt \rightarrow \sqrt{K} dt$, ami megfelel az $f/K \rightarrow f$ átskálázásnak, akkor $K = 1$ választható az általánosság csorbítása nélkül. Helyettesítsük be $h = 1/f$ -et a (2.1.33.) egyenletbe,

$$-f' + \frac{1-f}{r} = 0, \Rightarrow \frac{d}{dr}(rf) = 1, \quad (2.1.36.)$$

ahonnan

$$f = 1 + \frac{C}{r} \quad (2.1.37.)$$

adódik, ahol $C = \text{áll.}$ Visszahelyettesítéssel meggyőződhetünk róla, hogy (2.1.37.) és $h = 1/f$ megoldja a (2.1.31.)-(2.1.33.) egyenleteket. Megtaláltuk tehát a **sztatikus, gömbszimmetrikus téridő metrikáját, a Schwarzschild-metrikát**,

$$ds^2 = -\left(1 + \frac{C}{r}\right) dt^2 + \frac{1}{1 + \frac{C}{r}} dr^2 + r^2 d\Omega^2, \quad (2.1.38.)$$

ahol $d\Omega^2 = d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2$ és C tetszőleges állandó, amelynek fizikai jelentését alább tisztázzuk.

Az alábbiakban áttekintjük a Schwarzschild-metrikájú téridő, azaz az üres vákuumban az egyetlen sztatikus, gömbszimmetrikus téridő néhány fontos tulajdonságát.

1. A Schwarzschild-téridő **aszimptotikusan lapos**, azaz az $r \rightarrow \infty$ határesetben átmegy a Minkowski-metrikába, ami a nem görbült, sztatikus téridő metrikája. Ez teszi lehetővé, hogy a Schwarzschild-metrikát úgy interpretáljuk, mint egy izolált test által a testen kívül keltett gravitációs mezőt.
2. Az előző pontnak megfelelő értelmezés lehetővé teszi, hogy a C állandónak a Schwarzschild-téridőt keltő izolált test tömegével kapcsolatos jelentést adjunk. Az $r \rightarrow \infty$ aszimptotikus tartományban össze kell hasonlítani egy próbatest szabadesését, azaz geodetikus mozgását ugyanezen próbatestnek a newtoni gravitáció szerinti szabadesésével. Azt, hogy a próbatest milyen geodetikus mentén esik szabadon az izolált test által keltett Schwarzschild-téridőben, alább meg fogjuk határozni. A newtoni gravitációval történő összehasonlításból kiderül, hogy $C = -2M$ a $G = c = 1$ egységrendszerben, ahol M az izolált test tömege. Tetszőleges egységrendszerben a $C = -2GM/c^2$ összefüggés adódik. A Schwarzschild-metrika tehát átírható

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2M}{r}\right)dt^2 + \frac{1}{1 - \frac{2M}{r}}dr^2 + r^2d\Omega^2 \quad (2.1.39.)$$

alakba.

3. A Schwarzschild-metrika **szinguláris** az $r = 0$ és az $r = 2M$ helyeken. A szingularitás alapvetően kétféle lehet. **Koordináta-szingularitásról** beszélünk, ha a bevezetett koordinátarendszer valamely pontban érvényét veszti (a téridő valamely pontja nem fedhető le az adott koordinátarendszerrel). Esetünkben ez akkor következik be, ha vagy $\xi^a = 0$, vagy $\nabla^a r = 0$ vagy pedig ξ^a és $\nabla^a r$ kollineárisak. Ilyen típusú szingularitás lép fel az $r = 2M$ helyen. Ekkor a téridő görbülete véges marad. Más, alkalmasabb koordinátarendszerre történő áttérés után a metrika komponenseinek szingularitása megszűnik. A másik típusú szingularitás fizikai, amikor a görbület végtelenné válik. Ez a szingularitás nem szüntethető meg koordináta-transzformációval. Esetünkben ilyen szingularitás lép fel $r = 0$ -ban.

A Schwarzschild-metrika koordináta-szingularitásának helyét, az úgynevezett **Schwarzschild-sugár** értékét érdemes számszerűen is meghatározni,

$$r_s = \frac{2GM}{c^2} \approx 3\left(\frac{M}{M_\odot}\right)\text{km}, \quad (2.1.40.)$$

ahol a Nap tömege $M_\odot \approx 2 \cdot 10^{30}$ kg. Ezért a Nap, vagy a Föld, ill. más bolygók Schwarzschild-sugara mélyen ezen égitestek belsejében helyezkedik el, ahol a vákuum-megoldás nem érvényes. Az $r = r_s$ és $r = 0$ szingularitások csak akkor válnak érdekessé, ha az égitest teljes **gravitációs összeomlást, azaz kollapszust** szenvedett.

4. Végül érdemes megemlíteni, hogy az Einstein-egyenleteknek vákuumban egyetlen gömbszimmetrikus megoldása van (ha nem követeljük meg eleve a sztatikusságot), és ez a Schwarzschild-megoldás. Ez összhangban van **Birkhoff**²² **tételével**, amely szerint minden gömbszimmetrikus téridő, amely megoldása a vákuumbeli $R_{ab} = 0$ Einstein-egyenleteknek, sztatikus. Ez analóg azzal az állítással, hogy vákuumban a Maxwell-egyenletek egyetlen gömbszimmetrikus megoldása a sztatikus Coulomb-mező. Ez azt is jelenti, hogy ahogy az elektrodinamikában, úgy a gravitációs mezőben sem létezik monopólus-sugárzás, azaz gömbszimmetrikus sugárzás.

2.2. A téridő sztatikus, gömbszimmetrikus test belsejében

Most megkeressük izolált sztatikus, gömbszimmetrikus égitesten belül a téridő metrikáját abban az esetben, amikor az égitest anyaga ideális folyadék, amelynek energia-impulzus-tenzora

$$T_{ab} = \rho u_a u_b + P(g_{ab} + u_a u_b), \quad (2.2.41.)$$

ahol u^a a folyadék négyes-sebessége. A sztatikusság követelménye miatt az u^a négyes-sebességnek párhuzamosnak kell lennie a ξ^a Killing-vektorral, úgyhogy

$$u^a = \frac{\xi^a}{(-\xi^b \xi_b)^{1/2}} = -\sqrt{f(r)}(dt)^a = -(e_0)^a. \quad (2.2.42.)$$

A sztatikuság és a gömbszimmetria miatt most is 3 független Einstein-egyenletünk van, a többi $0 \equiv 0$ alakú azonosság,

$$\begin{aligned} 8\pi T_{00} &= G_{00}, \\ 8\pi T_{11} &= G_{11}, \\ 8\pi T_{22} &= G_{22}, \end{aligned} \quad (2.2.43.)$$

ahol $T_{\mu\mu} = (e_\mu)^a (e_\mu)^b T_{ab}$ és $G_{\mu\mu} = (e_\mu)^a (e_\mu)^b G_{ab}$.

Az energiainpulzus-tenzor diagonális komponensei

$$\begin{aligned} T_{00} &= (e_0)^a (e_0)^b T_{ab} = u^a u^b T_{ab} = \rho, \\ T_{11} &= (e_1)^a (e_1)^b T_{ab} = P(e_1)^a (e_1)^b g_{ab} = \eta_{11} P = P, \\ T_{22} &= (e_2)^a (e_2)^b T_{ab} = P(e_2)^a (e_2)^b g_{ab} = \eta_{22} P = P. \end{aligned} \quad (2.2.44.)$$

Az Einstein-tenzor komponenseinek kiszámításához felhasználjuk, hogy a Gauss-görbület

$$R = \sum_{\mu=0}^3 R_\mu^\mu = \sum_{\mu,\nu=0}^3 \eta_{\mu\nu} R_{\mu\nu} = -R_{00} + R_{11} + 2R_{22}, \quad (2.2.45.)$$

²²George David Birkhoff, amerikai matematikus, 1884-1944

úgyhogy a $G_{ab} = R_{ab} - \frac{1}{2}g_{ab}R$ Einstein-tenzor diagonális komponensei a tetrad-bázisban

$$\begin{aligned}
G_{00} &= R_{00} - \frac{1}{2}\eta_{00}R = R_{00} + \frac{1}{2}R = \frac{1}{2}R_{00} + \frac{1}{2}R_{11} + R_{22} \\
&= \frac{h'}{2h^2} + \frac{1}{r^2}\left(1 - \frac{1}{h}\right), \\
G_{11} &= R_{11} - \frac{1}{2}\eta_{11}R = R_{11} - \frac{1}{2}R = \frac{1}{2}R_{00} + \frac{1}{2}R_{11} - R_{22} \\
&= \frac{f'}{rfh} - \frac{1}{r^2}\left(1 - \frac{1}{h}\right), \\
G_{22} &= R_{22} - \frac{1}{2}\eta_{22}R = R_{22} - \frac{1}{2}R = \frac{1}{2}R_{00} - \frac{1}{2}R_{11} \\
&= \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{fh}}\frac{d}{dr}\frac{f'}{\sqrt{fh}} + \frac{f'}{2rfh} - \frac{h'}{2rh^2}.
\end{aligned} \tag{2.2.46.}$$

Az Einstein-egyenletek tehát az alábbi alakot öltik:

$$8\pi\rho = \frac{h'}{2h^2} + \frac{1}{r^2}\left(1 - \frac{1}{h}\right), \tag{2.2.47.}$$

$$8\pi P = \frac{f'}{rfh} - \frac{1}{r^2}\left(1 - \frac{1}{h}\right), \tag{2.2.48.}$$

$$8\pi P = \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{fh}}\frac{d}{dr}\frac{f'}{\sqrt{fh}} + \frac{f'}{2rfh} - \frac{h'}{2rh^2}. \tag{2.2.49.}$$

A (2.2.47.) egyenletben csak az ismeretlen $h(r)$ függvény szerepel, úgyhogy ez az egyenlet a másik két egyenlettől függetlenül megoldható h -ra:

$$h(r) = \frac{1}{1 - \frac{2m(r)}{r}}, \tag{2.2.50.}$$

ahol

$$m(r) = 4\pi \int_0^r \rho(r')r'^2 dr' \tag{2.2.51.}$$

a gömbszimmetrikus égitest r sugáron belüli tömege.

Azonos átalakítással a (2.2.47.) egyenletet átírhatjuk az alábbi alakba,

$$8\pi\rho = \frac{1}{r^2}\left(\frac{rh'}{h^2} + 1 - \frac{1}{h}\right) = \frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left[r\left(1 - \frac{1}{h}\right)\right], \tag{2.2.52.}$$

ahonnan integrálás után

$$r\left(1 - \frac{1}{h}\right) = 8\pi \int_0^r \rho(r')r'^2 dr' + 2a \equiv 2m(r) \tag{2.2.53.}$$

adódik. Innen kifejezzük h -t, amire a (2.2.50.) kifejezést kapjuk. Ha nem akarjuk, hogy a térmetrika a Σ térszerű hiperfelületen szinguláris legyen, akkor az a integrálási állandónak $a = 0$ -nak kell lennie. Így megkapjuk a (2.2.51.) kifejezést.

A fentiekből úgy tűnhet, hogy $a = 0$ egy választás következménye. Valójában nincsen lehetőségünk választani. Az $r \rightarrow 0$ sugarú gömb felszíne

$$\oint \sqrt{{}^{(3)}g} dA = 4\pi r^2 \sqrt{h(r)} \xrightarrow{r \rightarrow 0} 4\pi r^2 \rightarrow 0 \quad (2.2.54.)$$

kell legyen, ami csak akkor tud teljesülni, ha $h(r) \rightarrow 1$ az $r \rightarrow 0$ határesetben, azaz ha $a = 0$. (Felhasználtuk, hogy a Σ térszerű hiperfelületen indukált 3-dimenziós metrika determinánsa ${}^{(3)}g = g_{rr}g_{\theta\theta}g_{\phi\phi} = h r^2 \sin^2 \theta$, úgyhogy az invariáns térfogatelem $\sqrt{{}^{(3)}g} dr d\theta d\phi = \sqrt{h} r^2 \sin \theta dr d\theta d\phi$ és az invariáns felületelem az r sugarú gömb felszínén $dA = \sqrt{h} r^2 \sin \theta d\theta d\phi$.)

A Σ hiperfelületnek a sztatikusság követelménye miatt térszerűnek kell lennie, azaz teljesülnie kell a

$$h(r) \geq 0, \quad \Rightarrow \quad r > 2m(r) \quad (2.2.55.)$$

egyenlőtlenségeknek. Ha az izolált gömbszimmetrikus test sűrűsége $r = R$ radiális koordináta-értéknél válik zérussá, akkor itt kell a testen belüli téridő metrikájának folytonosan illeszkednie a testen kívüli Schwarzschild-metrikához. Mivel $a = 0$, a térmetrika

$$m(R) = 4\pi \int_0^R \rho(r) r^2 dr = M \quad (2.2.56.)$$

esetén átmegy a Schwarzschild-metrikába, ahol – mint azt a Schwarzschild-metrika $r \rightarrow \infty$ aszimptotikusan távoli viselkedéséből tudjuk, – M az izolált test **teljes tömege** (total mass). (Ez az a súlyos tömege, amivel arányos newtoni gravitációs erőt fejt ki egy távoli próbatestre a hagyományos newtoni felfogás szerint.) Másrészt a (2.2.56.) egyenlőséggel értelmezett teljes tömeg nem azonos a test ρ tömegsűrűségéből számolt

$$M_p = \int \sqrt{{}^{(3)}g} \rho(r) r^2 dr d\Omega = 4\pi \int_0^R \frac{r^2 \rho(r) dr}{\sqrt{h(r)}} = 4\pi \int_0^R \frac{r^2 \rho(r) dr}{(1 - \frac{2m(r)}{r})^{1/2}} > M \quad (2.2.57.)$$

teljes saját tömeggel (total proper mass). (Itt megint felhasználtuk, hogy a térfogatelem a Σ térszerű hiperfelületen $\sqrt{{}^{(3)}g} dr d\theta d\phi = \sqrt{h} r^2 \sin \theta dr d\theta d\phi$.) A teljes saját tömeg és a teljes tömeg különbsége pozitív, ami úgy értelmezhető, mint az izolált testnek az

$$E_B = E_p - E = M_p - M > 0 \quad (2.2.58.)$$

kötési energiája, amely a test darabkáinak egymással való gravitációs kölcsönhatásából, avagy másképpen a testnek saját gravitációs mezejével való kölcsönhatásából származik. Ez szép példa arra, hogy bár az általános relativitáselméletben az energia fogalma nem jól definiált, mégis egy (esetünkben sztatikus, gömbszimmetrikus)

izolált test teljes energiáját ki lehet egyértelműen olvasni abból, hogy a test a téridőt hogyan görbíti meg az aszimptotikusan lapos tartományban.

Helyettesítsük be a $h(r)$ függvényre kapott kifejezést a (2.2.48.) egyenletbe és keressük annak megoldását az

$$f(r) = e^{2\phi(r)} \quad (2.2.59.)$$

alakban. Ekkor a $\phi(r)$ függvényre a

$$\frac{d\phi(r)}{dr} = \frac{m(r) + 4\pi r^3 P}{r[r - 2m(r)]} \quad (2.2.60.)$$

differenciálegyenletet kapjuk. A $\phi(r)$ függvény fizikai jelentését abból olvashatjuk ki, hogy ez az egyenlet hogyan viselkedik a newtoni határesetben. Ha $r^3 P \ll m(r)$ és $m(r) \ll r$ (utóbbi következtében $h \approx 1$), akkor a (2.2.60.) egyenlet közelítőleg

$$-\frac{d\phi}{dr} = -\frac{m(r)}{r^2} \equiv E_r(r) \quad (2.2.61.)$$

alakot ölt. Ha azt is figyelembe vesszük, hogy $h \approx 1$ esetén $m(r)$ megegyezik az r „sugáron” belül található tömeggel, akkor a (2.2.61.) egyenletben felismerjük a newtoni gravitációs potenciálra vonatkozó egyenletet: a térerősség a test középpontja felé mutat ($E_r(r) = -d\phi/dr < 0$) és a gömbszimmetrikus test centrumától r távolságra olyan, mintha azt egy fiktív tömegpont keltené, amelyet a centrumba képzelünk akkora tömeggel, mint a test r sugáron belüli részének a tömege. A $\phi(r) = \frac{1}{2} \ln f(r)$ függvény tehát a **newtoni gravitációs potenciál általánosítása**.

Végül a $h(r)$ és $f(r)$ függvényekre kapott összefüggéseket felhasználva kapható meg a (2.2.49.) egyenletből a nyomásra vonatkozó

$$\frac{dP}{dr} = -(P + \rho) \frac{m(r) + 4\pi r^3 P}{r[r - 2m(r)]} \quad (2.2.62.)$$

egyenlet, a Tolman²³-Oppenheimer²⁴-Volkoff²⁵-egyenlet (TOV-egyenlet). Ha a newtoni határesetben ($P \ll \rho$, $m(r) \ll r$) vizsgáljuk meg az egyenletet, akkor az

$$\frac{dP}{dr} = -\frac{\rho(r)m(r)}{r^2}, \quad \Rightarrow \quad [P(r + dr) - P(r)]4\pi r^2 = E_r(r)\rho(r)4\pi r^2 dr \quad (2.2.63.)$$

alakban fejezi ki a hidrosztatikai nyomás és a gravitációs erő egyensúlyát, azaz a **hidrosztatikai egyensúly feltételét**. Ebben semmi meglepő nincsen, hiszen sztatikus esetben az Euler-egyenlet a hidrosztatikai egyensúly szükséges és elégséges

²³Richard Chace Tolman, amerikai matematikai fizikus és fizikai kémikus, 1881-1948

²⁴Julius Robert Oppenheimer, amerikai fizikus, 1904-1967

²⁵George Michael Volkoff, kanadai fizikus, 1914-2000

feltételét fogalmazza meg. **A TOV-egyenlet tehát azt a feltételt fejezi ki, hogy az izolált test hidrosztatikai egyensúlyban van a sajátmaga által keltett sztatikus, gömbszimmetrikus téridőben.**

A sztatikus, gömbszimmetrikus, ideális folyadékból álló testen belül a téridő metrikája tehát

$$ds^2 = -e^{2\phi(r)}dt^2 + \frac{1}{1 - \frac{2m(r)}{r}}dr^2 + r^2d\Omega^2, \quad (2.2.64.)$$

ahol $\phi(r)$ -t a (2.2.60.) egyenlet határozza meg,

$$m(r) = 4\pi \int_0^r \rho(r')r'^2 dr' \quad (2.2.65.)$$

és a (2.2.62.) egyenlet jelenti a hidrosztatikai egyensúly szükséges és elégséges feltételét.

2.2.1. A csillagok kritikus tömege

A fentiek alapján az ideális folyadékból álló gömbszimmetrikus égitest sztatikus konfigurációját az alábbi módon határozhatjuk meg. Tekintsük adottnak az anyag $P = P(\rho)$ állapotegyenletét. Írjunk elő egy tetszőleges ρ_c középponti sűrűséget és ezáltal a $P_c = P(\rho_c)$ középponti nyomást. Integráljuk a (2.2.62.) és (2.2.51.) egyenleteket kifelé, amíg valamilyen $r = R$ mellett elérjük az égitest felszínét, ahol $P(R) = \rho(R) = 0$ lesz. Ebben a pontban „varrjuk össze” az égitest belsejében uralkodó metrikát a Schwarzschild-metrikával. Ezután integráljuk a (2.2.60.) egyenletet $r = R$ -tól befelé haladva, és megkövetelve, hogy $\phi(R)$ egyezzen meg a Schwarzschild-metrikának megfelelő értékkel az égitest felületén. A newtoni elméletben is hasonlóképpen szoktak eljárni a különbséggel, hogy a (2.2.62.) egyenlet helyett a (2.2.63.) egyenletet, a (2.2.60.) egyenlet helyett pedig a (2.2.61.) egyenletet kell használni.

A newtoni elméletből és az általános relativitáselméletből a sztatikus, gömbszimmetrikus égitest (csillag) hidrosztatikai egyensúlyára kapott eredmények azonban különböznek. Az egyik különbség a következő: tegyük fel, hogy a csillagot $P > 0$ nyomású („normális”) anyag alkotja és adott ennek az anyagnak a $\rho(r)$ sűrűségeloszlása (azaz, hogy mekkora méretben mekkora tömeg hogyan oszlik el), akkor a középponti P_c nyomás az általános relativitáselmélet szerint mindig nagyobb, mint a newtoni elmélet szerint. Ez azt mutatja, hogy az általános relativitáselmélet szerint adott anyageloszlás esetén nagyobb a gravitációs vonzásból eredő nyomás, amit a hidrosztatikai nyomásnak kell ellensúlyoznia; úgyhogy „nehezebben” jöhet létre a hidrosztatikai egyensúly. Ez nagyon jelentős különbséget okoz például egy olyan hipotetikus csillag esetén, amelynek anyaga inkompresszibilis, azaz sűrűsége állandó. A newtoni elmélet szerint ebben az esetben bármilyen ρ_0 és R sugár (azaz ρ_0 és $M = 4\pi R^3 \rho_0/3$ csillagtömeg) esetén véges a P_c középponti nyomás. Ugyanakkor, mint azt először Schwarzschild megmutatta, – az általános relativitáselmélet szerint létezik egy olyan kritikus csillagtömeg, $M_c = 4R/9$, hogy a P_c középponti nyomás

$M < M_c$ esetén véges, de $M \rightarrow M_c$ esetén végtelenné válik. Ez azt jelenti, hogy nem létezhet olyan, inkompresszibilis anyagból álló (sztatikus gömbszimmetrikus) csillag, amelynek tömege $M > M_c$, azaz M meghaladja a kritikus értéket. Mivel tulajdonképpen az M/R hányadosra létezik felső korlát, másképpen úgy fogalmazhatunk, hogy nem képzelhető el hidrosztatikai egyensúly, ha összenyomhatatlan anyagból túl nagy tömeg túl kis térfogatban helyezkedne el.

Az, hogy az általános relativitáselmélet szerint az egyensúlyi állapotban levő gömbszimmetrikus csillagokra létezik **felső tömegkorlát**, nem csak az összenyomhatatlan anyagból álló hipotetikus csillag esetén érvényes. Be lehet látni a következőket (ld. [1]-t a további részletekről). Tegyük fel, hogy a sűrűség nem negatív és radiálisan kifelé haladva szigorúan monoton csökken. Ekkor a sztatikus, gömbszimmetrikus csillagokra kétféle felső tömeghatár létezhet. (a) Ha adott a csillag R sugara, akkor a maximális csillagtömeg az a kritikus $M_c = 4R/9$ érték, amit homogén tömegeloszlás esetén kapunk. (b) Ha adott a $P = P(\rho)$ állapotegyenlet „kis” $\rho < \rho_0$ sűrűségek esetén, ahol ρ_0 tetszőleges, akkor létezik egy M_c felső tömeghatár, amelynek értéke nem függ attól, hogy milyen alakú az állapotegyenlet $\rho > \rho_0$ fölött. Természetesen ekkor M_c függ ρ_0 -tól és attól is, hogy milyen alakú kis nyomásokon az állapotegyenlet. Annak, hogy a (b) típusú tömegkorlát független a nagy sűrűségek esetén érvényes állapotegyenlettől, az a jelentősége, hogy megbízható becsléseket lehet tenni a csillagok tömegére a kis nyomásokon érvényes állapotegyenlet alapján, amire nézve vannak megbízható fizikai ismereteink. Érdemes megemlíteni, hogy ha a newtoni elmélet szerint vizsgálódunk, akkor szintén találunk felső tömeghatárt, amennyiben *minden* sűrűség esetén adott az állapotegyenlet. Ezért abban a szerencsés helyzetben vagyunk, hogy az általános relativitáselmélet a felső határra nemcsak elvileg ad jobb becslést, hanem ez a becslés gyakorlatban is megbízhatóbban végezhető el, mert nincsen szükségünk az állapotegyenletre nagy sűrűségeken, ahol azt nem ismerjük.

A fenti tömeghatárra vonatkozó becslést alkalmazhatjuk hideg, $T \approx 0$ hőmérsékletű anyagot tartalmazó csillagra. Az így kapott felső tömeghatárnak lényeges kihatása van a csillagfejlődés végső szakaszára. Ha egy csillagban már nem zajlanak le magreakciók (nukleárisan kiégett), akkor energiát sugároz, és lehűl. Amikor hideg állapotba jutott az anyaga, azaz a termikus mozgásból származó kinetikai nyomás elhanyagolhatóvá válik a csillagban található elfajult Fermi²⁶-gázok (neutronok, elektronok) $T = 0$ hőmérsékleten sem eltűnő nyomásához képest, akkor vagy kisebb lehet a csillag tömege, mint a hidrosztatikai egyensúlyhoz szükséges kritikus tömeg, vagy meghaladhatja azt. Az első esetben stabil hideg csillag marad vissza (pl. neutron-csillag, v. fehér törpe), a második esetben viszont a csillag anyagának óhatatlanul gravitációs összeomlást kell szenvednie.

Amikor egy lényegében hidrogénből álló gázhalmaz összeáll és elindul egy csillag fejlődése, akkor az anyag a gravitáció hatására elkezd összezuhanni, miközben annyira felmelegszik, hogy beindulhatnak a magreakciók, amelyek a hidrogént héliummá alakítják. Kialakul egy hélium törzs, közben az anyag felmelegszik és a gáz nyomása egyensúlyt tud tartani a gravitációval. Ha a csillag elég nagy, akkor a héliumból álló törzs is elkezd összehúzódni és beindulnak olyan magreakciók, amelyek során nehezebb elemek keletkeznek és végül felépülhet egy, a legstabilabb atommagokból, azaz vasból és nikkeltől álló

²⁶Enrico Fermi, olasz, amerikai fizikus, 1901-1954.

törzs. Az, hogy ez a fejlődési folyamat végig lejátszódik-e, avagy valamely ponton megszakad, attól függ, hogy elegendővé válik-e valamikor az elfajult elektrongáz nyomása ahhoz, hogy a csillagot stabilizálja. Ha a csillag tömege kisebb, mint a kritikus $M_{c1} \approx 5M_{\odot}$ érték, akkor stabil képződmény, **fehér törpe** marad vissza. Ha a csillag tömege nagyobb, mint a kritikus M_{c1} érték, akkor, miután lényegében a csillag teljes tömege beépült a nikkelből és vasból álló törzsbe, ez a rendszer nem tudja stabilan fenntartani magát, mert ehhez nem elég a visszamaradt elfajult elektrongáz nyomása. Többé nincsenek energiafelszabadulással járó magreakciók sem. Beindul tehát a csillag összeomlása, egészen addig, amíg az anyag sűrűsége eléri az atommagok sűrűségét, a nukleáris sűrűséget. Ekkor az elfajult neutrongáz nyomása és az átlagosan taszító magerők neutroncsillag állapotban megállíthatják, vagy lelassíthatják az összeomlást, ha a csillag tömege $M < M_{c2} \approx 2M_{\odot}$. A csillag törzsének összeomlását lökéshullám kialakulása kísérheti, amely kifelé, a csillag köpenye felé halad. Ilyen lökéshullám vezet a szupernóva kialakulásához, amikor a csillag a köpenyét robbanásszerűen ledobja magáról, és óriási energia szabadul fel, amit az eltávozó anyag és sugárzás hordoz. Ezt követően neutroncsillag marad vissza, ha elég kicsi a visszamaradó csillag tömege. A csillagfejlődés végállapota tehát vagy **fehér törpe**, **vagy neutroncsillag állapot**, ha a csillag tömege a hideg anyagra vonatkozó (megfelelő) felső tömeghatár(ok)nál kisebb.

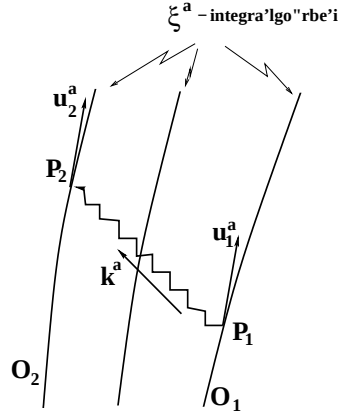
Ha a csillag tömege nagyobb, mint a hideg anyagra vonatkozó felső tömeghatár, akkor a csillag teljes gravitációs összeomlást szenved, amelynek a végkimentele gömbszimmetrikus esetben a Schwarzschild-féle feketelyuk kialakulása, amiről alább lesz szó. Ennek kialakulását is megelőzheti szupernóva-robbanás.

A neutroncsillagok létéről **pulzárok** (periódikusan sugárzó neutroncsillagok) megfigyelése révén szereztünk tudomást. Az egyik leglátványosabb csillagászati megfigyelés az 1987-ben megfigyelt SN 1987A szupernóva-robbanás, amelynek maradványait a Hubble űrteleszkóp 1994 és 2009 között még további 15 éven át megfigyelte. Világosan kirajzolódott a lökéshullám révén az űrbe kidobott, egyre növekvő sugarú gömbhéjban elhelyezkedő anyag képe (a 2-dimenziós felvételeken világító anyaggyűrű, ld. pl. a Wikipedia SN 1987A címszó alatt az eredeti felvételeket).

2.3. Geodetikuskok a Schwarzschild-téridőben

2.3.1. Gravitációs vöröseltolódás Schwarzschild-téridőben

Vizsgáljuk meg a következő problémát. Legyen O_1 és O_2 két sztatikus megfigyelő, akik a sztatikus, gömbszimmetrikus égitesten kívül helyezkednek el (szélsőséges esetben az O_1 megfigyelő az égitest felszínén helyezkedik el). Az O_1 megfigyelő világvonalának P_1 pontjában ω_1 frekvenciájú sugárzást bocsát ki, amelyet az O_2 megfigyelő világvonalának P_2 pontjában ω_2 frekvenciájú sugárzásként észlel. Belátjuk, hogy ha az O_1 és az O_2 sztatikus megfigyelők radiális koordinátája rendre r_1 és r_2 ,



5. ábra. Gravitációs vöröseltolódás észlelésének viszonyai a Schwarzschild-téridőben. A P_1 esemény: az r_1 radiális koordinátájú sztatikus O_1 forrás k^a hullámvektorú fényjelet bocsát ki az O_2 sztatikus megfigyelő irányába. A P_2 esemény: az $r_2 > r_1$ radiális koordinátájú O_2 sztatikus megfigyelő észleli a fényjelet. Az O_1 és O_2 sztatikus megfigyelők világvonalai egyúttal a ξ^a Killing-vektormező integrálgörbéi; a megfigyelők négyes-sebessége rendre u_1^a és u_2^a .

akkor az emittált és az észlelt frekvenciák hányadosa

$$1 + z \equiv \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{\sqrt{1 - \frac{2M}{r_1}}}{\sqrt{1 - \frac{2M}{r_2}}}. \quad (2.3.66.)$$

Ez azt jelenti, hogy amennyiben az észlelő távolabb helyezkedik el a gravitációs centrumtól, mint az emitter, azaz ha $r_2 > r_1$, akkor az észlelt frekvencia kisebb, mint a kibocsátott frekvencia, azaz a fény „vöröseltolódást” szenved.

A fényjel null-geodetikus mentén terjed a téridő P_1 pontjából a P_2 pontba, amelynek érintővektora a k^a null-vektor (ld. a 5. ábrát). A sztatikus O_1 és O_2 megfigyelők világvonalai időszerű geodetikusok, amelyek érintőegységvektorai a P_1 és a P_2 pontokban rendre az $(u_1)^a$ és az $(u_2)^a$ négyessebességek. A sztatikus megfigyelők négyessebessége mindenütt párhuzamos a ξ^a Killing-vektormezővel, értéke a P_1 és a P_2 pontokban

$$(u_s)^a = -\frac{\xi^a}{\sqrt{-\xi_b \xi^b}} \Big|_{P_s}, \quad s = 1, 2. \quad (2.3.67.)$$

Tudjuk továbbá, hogy a k^a érintővektorú null-geodetikus mentén az érintő-vektormezőnek és a Killing-vektormezőnek a kontrakciója állandó, így

$$k_a \xi^a|_{P_1} = k_a \xi^a|_{P_2}. \quad (2.3.68.)$$

A fentiekből következik, hogy

$$\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{-k_a (u_1)^a|_{P_1}}{-k_a (u_2)^a|_{P_2}} = \frac{\sqrt{-\xi_b \xi^b}|_{P_2}}{\sqrt{-\xi_b \xi^b}|_{P_1}}. \quad (2.3.69.)$$

Másrészt viszont a Schwarzschild-metrikából kiolvashatjuk, hogy

$$\xi_b \xi^b = g_{tt} = -\left(1 - \frac{2M}{r}\right). \quad (2.3.70.)$$

Ezt behelyettesítve a frekvenciák hányadosának kifejezésébe, megkapjuk a vöröseltolódás igazolni kívánt összefüggését.

Megjegyzés: Aszimptotikusan távoli emitter és vevő esetén a vöröseltolódást úgy interpretálhatjuk, mintha a foton $\hbar\omega$ energiája csökkenne, ahogy kijut a csillag által okozott vonzó, gravitációs potenciálgödörből, azaz mintha a foton $\hbar\omega + U_p$ teljes energiája állandó lenne, ahol U_p a newtoni gravitáció értelmében vett negatív potenciális energia.

Írjuk át a vöröseltolódás képletét $\omega_1 = \omega$, $\omega_2 = \omega - \Delta\omega$ jelölések bevezetésével $M \ll r_1 < r_2$ esetén

$$\frac{\omega}{\omega - \Delta\omega} \approx \left(1 - \frac{M}{r_2}\right) \left(1 - \frac{M}{r_1}\right) \approx 1 + \frac{M}{r_1} - \frac{M}{r_2} \quad (2.3.71.)$$

alakba, ahonnan

$$\frac{\omega - \Delta\omega}{\omega} \approx 1 - \frac{\Delta\omega}{\omega} \approx 1 - \frac{M}{r_1} + \frac{M}{r_2} \quad (2.3.72.)$$

adódik. Innen a relatív frekvenciaeltolódásra azt kapjuk, hogy

$$\frac{\Delta\omega}{\omega} = \frac{GM}{c^2 r_1} - \frac{GM}{c^2 r_2}, \quad (2.3.73.)$$

ahol visszaírtuk a G és c állandókat. Szorozzuk az egyenlet mindkét oldalát $\hbar\omega$ -val,

$$-\hbar\Delta\omega \approx (\hbar\omega_2) - (\hbar\omega_1) \frac{\hbar\omega}{c^2} \left(-\frac{GM}{r_1} + \frac{GM}{r_2}\right), \quad (2.3.74.)$$

azaz

$$\hbar\omega_1 - \frac{\hbar\omega}{c^2} \frac{GM}{r_1} \approx \hbar\omega_2 - \frac{\hbar\omega}{c^2} \frac{GM}{r_2}, \quad (2.3.75.)$$

ahol $\hbar\omega/c^2 \equiv m_f$ a foton tömege, $U_p = -\frac{Gm_f M}{r}$ pedig a newtoni értelemben vett potenciális energiája.

A vöröseltolódást először a Föld felszínén igazolták a Mössbauer²⁷-effektus felhasználásával a Pound²⁸-Rebka²⁹-féle kísérletben 1960-ban kb. 1% pontossággal. Később, 1979-1980-ban a gravitációs vöröseltolódást kb. 0,01% pontossággal igazolták úgy, hogy rakétával lőttek fel egy hidrogén-mézert 10000 km magasra és a mézer-sugárzás frekvenciáját mérték nagy pontossággal a Földön (Vessot³⁰ és Levine³¹).

²⁷Rudolf Ludwig Mössbauer, német fizikus, 1929-2011

²⁸Robert Vivian Pound, amerikai fizikus, 1919-2010

²⁹Glen Anderson Rebka Jr., amerikai fizikus, 1931-

³⁰Robert Frederick Charles Vessot, amerikai fizikus, 1930-

³¹M. W. Levine

Megjegyzés: Megbecsülhetjük, hogy mekkora a csillag felszínéről érkező fénynek a csillag saját gravitációs mezeje miatti maximális vöröseltolódása. Ha a csillag sztatikus, gömbszimmetrikus, sűrűsége nem negatív és szigorúan monoton csökken a radiális koordinátával, akkor létezik a felső tömegkorlát, $(M/R)_{\max} = 4/9$, ezért a csillag felszínén emittált fény legnagyobb lehetséges vöröseltolódási tényezője

$$z_{\max} = \frac{\omega_1}{\omega_2} \Big|_{\max} - 1 = \frac{\omega_1|_{r=9M/4}}{\omega_2|_{r \rightarrow \infty}} - 1 = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{2M}{9M/4}}} - 1 = 2. \quad (2.3.76.)$$

Ennek a becslésnek az alapján mondhatjuk, hogy ha $z > 2$ vöröseltolódási tényezővel észlelünk valamely csillagból származó fényt, akkor annak a vöröseltolódása nem írható kizárólag csak a csillag felszínén és a közelében uralkodó gravitáció rovására.

2.3.2. Az időszerű és a null-geodetikusok egyenlete

Először is vegyük észre, hogy ha egy geodetikus kezdőpontja és kezdeti érintője a $\theta = \pi/2$ ekvatoriális (azaz egyenlítői) síkban vannak, akkor az egész geodetikus ebben a síkban fekszik a Schwarzschild-metrika $\theta \rightarrow \pi - \theta$ tértükrözési szimmetriája miatt. Ekkor viszont bármely más geodetikust be tudunk forgatni forgási izometria-transzformációval az ekvatoriális síkba. Ez annak a newtoni mechanikában is érvényes állításnak az általánosítása, hogy centrális gravitációs mezőben mozgó próbatest pályája síkmozgás, amelynek síkját a kezdeti helyzetvektor és sebességvektor feszíti ki. Elegendő tehát csak az ekvatoriális geodetikusokat vizsgálnunk.

Paraméterezzük az időszerű geodetikusokat a τ sajátidővel, a null-geodetikusok esetében jelentse τ az affin paramétert. A geodetikus paraméteres egyenletrendszer gömbi koordinátákban $x^\mu(\tau) = (t(\tau), r(\tau), \theta = \pi/2, \phi(\tau))$, az érintő-vektormező pedig $u^\mu = dx^\mu/d\tau = \dot{x}^\mu$. Az ekvatoriális síkban futó időszerű geodetikusok és null-geodetikusok esetén

$$g_{ab}u^a u^b \equiv -\kappa = -\left(1 - \frac{2M}{r}\right)\dot{t}^2 + \frac{1}{1 - \frac{2M}{r}}\dot{r}^2 + r^2\dot{\phi}^2, \quad (2.3.77.)$$

ahol

$$\kappa = \begin{cases} +1 & \text{időszerű geodetikus,} \\ 0 & \text{null-geodetikus} \end{cases} \quad (2.3.78.)$$

esetén. Felhasználjuk továbbá, hogy a geodetikus mentén az érintővektor és a Killing-vektor kontrakciója állandó, jelöljük ezt E -vel,

$$E \equiv -\xi^a u_a = -g_{ab}\xi^a u^b = -g_{tt}u^0 = \left(1 - \frac{2M}{r}\right)\dot{t}. \quad (2.3.79.)$$

Megjegyzés: Az E állandó fizikai jelentését a geodetikus aszimptotikus viselkedéséből olvashatjuk ki. Az infinitezimális sajátidő-tartam $d\tau = \sqrt{1 - \frac{2M}{r}}dt$,

úgyhogy az $r \gg M$ aszimptotikus tartományban $E = \sqrt{1 - \frac{2M}{r}} \sim 1 - (M/r)$. Írjuk vissza a G és c állandókat a természetes egységeikben, akkor $E \sim 1 - (GM/c^2 r)$ adódik. Időszerű geodetikus esetén szorozzuk az egyenlőség mindkét oldalát mc^2 -tel, ahol m a szabadon eső próbarészecske tömege. Ekkor az

$$E \sim \frac{mc^2 - \frac{GMm}{r}}{mc^2}, \quad r \rightarrow \infty \quad (2.3.80.)$$

aszimptotikus összefüggést kapjuk, azaz **E a részecske egységnyi tömegre vonatkoztatott teljes energiája a gömbszimmetrikus, sztatikus égitest gravitációs terében**, a centrumtól nagy távolságban. Úgy is interpretálhatjuk ezt, hogy a végtelen távoli megfigyelőnek ekkora energiát kell adnia az m tömegű részecskének ahhoz, hogy az geodetikus pályára álljon. Null-geodetikus esetén az $E \sim 1 - (GM/c^2 r)$ egyenlőség mindkét oldalát a foton $\hbar\omega$ energiájával szorozzuk, és akkor $E \sim [\hbar\omega - (GM\hbar\omega/c^2 r)]/\hbar\omega$ a fotonnak a gravitációs mezőben az egységnyi $\hbar\omega$ -ra vonatkoztatott teljes energiáját jelenti. Ennyi lesz a „szabadon eső” foton energiája, amelynek világvonala a geometriai optikai fénysugár pályája a téridőben.

Az ekvatoriális síkban metrika a térbeli $SO(3)$ izometria miatt rendelkezik az ekvatoriális síkra merőleges tengely körüli elforgatási szimmetriával. Ahogy a téridő időbeli eltolási szimmetriája eredményezi az E mozgásállandót, úgy a térbeli forgatással szembeni szimmetria is eredményez egy L mozgásállandót. Legyen $\psi^a = (\partial/\partial\phi)^a$ az elforgatással szembeni szimmetriához tartozó Killing-vektor. Ekkor a megfelelő mozgásállandó a geodetikusok mentén

$$L = g_{ab}\psi^a u^b = g_{\phi\phi}\dot{\phi} = r^2\dot{\phi}, \quad (2.3.81.)$$

ami időszerű geodetikus esetén **az egységnyi tömegre jutó pályaimpulzusmomentumként**, null-geodetikus esetén a foton $\hbar L$ pályaimpulzusmomentumaként interpretálható. A (2.3.81.) egyenlet lényegében **Kepler³² I. törvényének általánosítása**, csak most nem köthető hozzá a felületsebesség fogalma, mert a térgeometria nem euklideszi.

Fejezzük ki $\dot{t}$ -ot és $\dot{\phi}$ -ot rendre E -vel a (2.3.79.) és L -l a (2.3.81.) egyenlőségek-ből, és helyettesítsük be a kifejezésüket a (2.3.77.) egyenletbe. Ekkor **a geodetikusok radiális mozgására** az alábbi egyenletet kapjuk:

$$-\frac{E^2}{1 - \frac{2M}{r}} + \frac{\dot{r}^2}{1 - \frac{2M}{r}} + \frac{L^2}{r^2} = -\kappa, \quad (2.3.82.)$$

amit átrendezünk az

$$\frac{1}{2}\dot{r}^2 + \frac{1}{2}\left(1 - \frac{2M}{r}\right)\left(\frac{L^2}{r^2} + \kappa\right) = \frac{1}{2}E^2 \quad (2.3.83.)$$

³²Johannes Kepler, német matematikus, csillagász és asztrológus, 1571-1630.

alakba.

A kapott (2.3.83.) egyenlet megoldásában a következő klasszikus mechanikai analógia van segítségünkre. A (2.3.83.) egyenletet átírhatjuk

$$\frac{1}{2}\dot{r}^2 + V(r) = \epsilon \quad (2.3.84.)$$

alakba, ahol $\epsilon = E^2/2$ és bevezettük a

$$V(r) = -\frac{\kappa M}{r} + \frac{L^2}{2r^2} + \frac{\kappa}{2} - \frac{ML^2}{r^3} \quad (2.3.85.)$$

„potenciált”. A $\kappa = 1$ esetben a (2.3.83.) egyenlet a (2.3.84.) alakban olyan, mint egy egységnyi tömegű részecske $\epsilon = E^2/2$ energiájának kifejezése a klasszikus mechanikában, ha a részecske $V(r)$ potenciálmezőben mozog. A Kepler-probléma newtoni gravitáció alapján történő tárgyalása során ugyanilyen alakú egyenletre jutotunk. Akkor is be tudtunk hasonlóan vezetni egy „effektív” potenciált, amelyben a (2.3.85.) egyenlőség jobb oldalán álló első és második tag szerepelt csak. Ezek jelentése rendre a gravitációs mező newtoni értelemben vett potenciálja a centrumtól r távolságban és az úgynevezett centrifugális energia (potenciálját). Az általános relativitáselméletben további két tag jelenik meg a „potenciálban”: a (2.3.85.) kifejezés harmadik tagja, ami egy additív állandó, és a negyedik tagja, ami kis radiális távolságok esetén vonzó jelleggel „felülírja” a taszító jellegű centrifugális gátat.

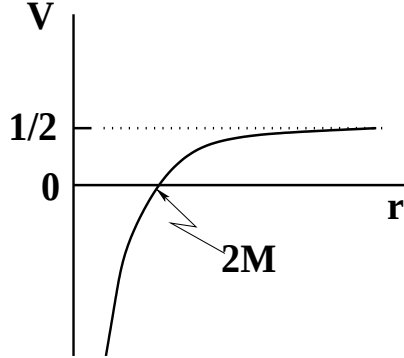
2.3.3. A Kepler-törvények általánosítása

Vizsgáljuk először az időszerű geodetikusok ($\kappa = +1$) esetét. Láttuk, hogy a Schwarzschild-téridőben az időszerű geodetikusok beforgathatók az ekvatoriális síkba, azaz síkgörbék. Ezeken a szabadon eső próbarészecske mozgását az $L = \text{áll.}$ egységnyi részecske-tömegre vonatkoztatott pályaimpulzusmomentum jellemzi. Ez Kepler I., a felületsebesség állandóságát kimondó törvényének általánosítása.

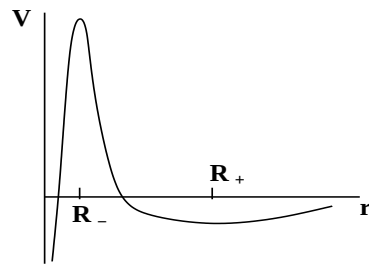
Nézzük most, hogy mit mondhatunk el a szabadon eső részecske pályájáról, azaz mi lesz Kepler II. törvényének általánosítása. A (2.3.85.) potenciál szélsőértékének helyeit a $dV/dr = 0$ egyenletből olvashatjuk ki, amelynek gyökei

$$R_{\pm} = \frac{L^2}{2M}(1 \pm \sqrt{1 - 12(M^2/L^2)}). \quad (2.3.86.)$$

Amennyiben a pályaimpulzusmomentum kicsi, azaz $L^2 < 12M^2$, akkor nincsen valós gyök. A potenciál $r \rightarrow \infty$ esetén tart $V \rightarrow 1/2$ -hez; csökkenő r radiális koordinátával szigorúan monoton csökken, $r \rightarrow 0$ esetén tart $-\infty$ -hez (ld. a 6. ábrát). Ekkor a végtelenből $E^2 \geq 1$ relatív energiával indított, szabadon eső részecske beesik az $r = 2M$ felületre, majd onnan tovább az $r = 0$ szingularitásba. Ez a



6. ábra. A Schwarzschild-téridőben szabadon eső próbarészecske radiális mozgását meghatározó effektív $V(r)$ potenciál az r radiális koordináta függvényében kis L pályaimpulzusmomentum, azaz $L^2 < 12M^2$ esetén, ahol M a sztatikus, gömbszimmetrikus égitest teljes tömege.



7. ábra. A Schwarzschild-téridőben szabadon eső próba-részecske radiális mozgását meghatározó effektív $V(r)$ potenciál az r radiális koordináta függvényében nagy L pályaimpulzusmomentum, azaz $L^2 > 12M^2$ esetén, ahol M a sztatikus, gömbszimmetrikus égitest teljes tömege.

következménye, hogy kis radiális távolságokon a (2.3.85.) potenciál negyedik tagja felülírja a centrifugális gátat.

Ha $L^2 > 12M^2$, akkor R_- és R_+ is valós. A $V(r)$ potenciálnak $r = R_-$ helyen maximuma, az $r = R_+$ helyen minimuma van. A $r \rightarrow 0$ határesetben a potenciál most is $-\infty$ -hez, az $r \rightarrow +\infty$ esetben $1/2$ -hez tart. Létezik egy geodetikus, amelynek vetülete a Σ térszerű hiperfelületre $r = R_+$ sugarú stabil körpálya, továbbá egy olyan időszerű geodetikus, amelynek vetülete az $r = R_-$ sugarú instabil körpálya. Ha $L \gg M$, akkor $R_+ = L^2/M^2$ megfelel a newtoni elmélet szerinti köralakú Kepler-pályának. Általánosságban a következőket mondhatjuk el:

1. Könnyen beláthatjuk, hogy $R_+ > 6M$, mivel fennállnak az

$$\frac{R_+}{6M} = \frac{L^2}{12M^2} \left(1 + \sqrt{1 - \frac{12M^2}{L^2}} \right) > 1 + \sqrt{1 - \frac{12M^2}{L^2}} > 1 \quad (2.3.87.)$$

egyenlőtlenségek. Ez azt jelenti, hogy nincsen $r = 6M$ -nél kisebb sugarú stabil körpálya.

2. Az instabil körpálya sugarára fennáll a $3M < R_- < 6M$ egyenlőtlenség, vagyis nem létezik semmilyen $r = 3M$ -nél kisebb sugarú körpálya.
3. Kiszámolhatjuk a részecske egységnyi tömegre vonatkoztatott teljes energiáját valamely R sugarú (stabil vagy instabil) körpályán. Ekkor $\dot{r} = 0$ miatt

$$\frac{1}{2}E^2(R) = V(R) = \frac{1}{2} \frac{(R - 2M)^2}{R(R - 3M)}, \quad (2.3.88.)$$

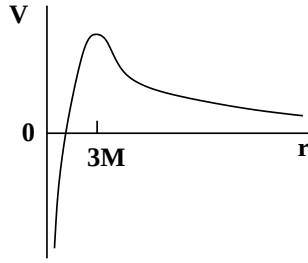
ahol felhasználtuk, hogy a $dV/dr|_{r=R} = 0$ egyenletből L^2 kifejezhető R és M segítségével. Innen az R sugarú körpályán mozgó részecske egységnyi tömegre vonatkoztatott teljes energiájára

$$E(R) = \frac{R - 2M}{\sqrt{R(R - 3M)}} \quad (2.3.89.)$$

adódik. A legbelsőbb $R_+ = 6M$ sugarú, azaz legkisebb energiájú stabil körpályán a részecske egységnyi tömegre vonatkoztatott kötési energiája

$$E_B(R = 6M) = 1 - E(R = 6M) = 1 - \sqrt{8/9} \approx 0,06. \quad (2.3.90.)$$

Általában az $R \gg M$ pályán mozgó részecske gravitációsan sugároz, energiát veszít és a sugárzás visszahatása következtében letér a geodetikusról. Spirális pályán fokozatosan megközelíti az $R = 6M$ sugarú legbelső stabil pályát, ott instabillá válik a mozgása és bezuhan a szingularitási centrumba. Közben, amíg $R = 6M$ radiális „távolságra” kerül a centrumtól, energiája kb. 6%-át veszíti el gravitációs sugárzással. Alább látni fogjuk, hogy az $r < 2M$,



8. ábra. A Schwarzschild-téridőben haladó fénysugár radiális mozgását meghatározó effektív $V(r)$ potenciál az r radiális koordináta függvényében.

azaz a Schwarzschild-sugáron belüli tartományból már semmilyen sugárzás, a szabadon eső részecske mozgására vonatkozó semmilyen információ nem juthat el a végtelen távoli megfigyelőhöz.

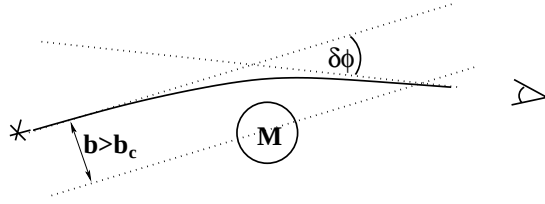
4. Ha a részecske csak kicsit odább helyezkedik el az $r = R_+$ stabil körpályát jelentő radiális koordinátájú helytől, akkor radiális irányban oszcillációk lépnek fel, amelyek harmonikusak és frekvenciájuk

$$\omega_r^2 = \left. \frac{d^2 V}{dr^2} \right|_{r=R_+}. \quad (2.3.91.)$$

Ugyanakkor a körpályán történő mozgás keringési frekvenciája $\omega_\phi = \dot{\phi}$, amelyre $\omega_\phi^2 = L^2/R_+^4$. Meg lehet mutatni, hogy a newtoni határesetben $\omega_r \approx \omega_\phi$. Ha $\omega_r = \omega_\phi$ lenne, akkor zárt pályák alakulnának ki, a bolygómozgás Kepler-pályái. A newtoni gravitáció alapján meghatározott kötött Kepler-pályák valóban zártak, ellipszis-pályák. Az általános relativitáselméletben a radiális oszcillációk és a keringési frekvencia eltérése miatt a pályák nem zártak. A közel köralakú pályák esetén a pályának a centrumhoz legközelebb eső pontja (a perihélium) precesszál $\omega_p = \omega_\phi - \omega_r$ szögsebességgel. Ezen az elven lehet meghatározni a Merkúr megfigyelt, 43 ívmásodperc/100 év anomális precesszióját, ami sokáig rejtély maradt, miután a newtoni gravitáció alapján a többi bolygó perturbáló hatását figyelembe véve sem sikerült a perihélium-elfordulást kielégítően megmagyarázni. (A Merkúr teljes perihélium-elfordulása $574,10 \pm 0,65$ ívmásodperc/100 év. Az általános relativitáselmélet szerinti anomáliát is figyelembe vevő számítások ezzel hibahatáron belül egyező eredményt adnak.)

2.3.4. A fénygörbülés

Vizsgáljuk most meg a null-geodetikusokat ($\kappa = 0$). Az effektív potenciál alakja független L -től, $r \rightarrow \infty$ esetén zérushoz, $r \rightarrow 0$ esetén $-\infty$ -hez tart az értéke, és



9. ábra. A Schwarzschild-téridőben haladó fénysugár $\delta\phi$ szögű eltérése a kritikusnál nagyobb $b > b_c$ látszólagos impakt-paraméter esetén; M az eltérést okozó sztatikus, gömbszimmetrikus égitest teljes tömege.

$r = 3M$ helyen maximuma van,

$$V(r) = \frac{L^2}{2r^3}(r - 2M) \quad (2.3.92.)$$

(ld. a 8. ábrát). Ezek szerint fotonokra létezik $r = 3M$ sugárral körpálya, azaz olyan fénysugár, ami kört ír le a sztatikus, gömbszimmetrikus égitest körül. Ez a körpálya azonban instabil. Ahhoz, hogy a fénysugár ezt a körpályát írja le, legalább akkora E relatív energia szükséges, amelyre fennáll, hogy

$$\frac{1}{2}E^2 = V(R = 3M) = \frac{L^2 M}{2(3M)^3}, \text{ azaz } \frac{L^2}{E^2} = 27M^2. \quad (2.3.93.)$$

Lapos téridőben a $b = L/E$ hányados éppen az impakt paraméter, azaz az a legkisebb távolság, amelyre a fénysugár megközelíti az origót (az $r = 0$ radiális koordináta-értéket). Mivel a Schwarzschild-metrika aszimptotikusan lapos, ezért a $b = L/E$ paraméter a **látszólagos impakt paraméter** szerepét játssza az aszimptotikusan távoli megfigyelő számára az olyan fénysugarak esetén, amelyek az aszimptotikusan távoli ($r \gg M$) tartományból indulnak. A b paraméter azonban a görbült Schwarzschild-téridőben nem hordozza többé a „centrum megközelítésének legkisebb távolsága” jelentést. A fentiek alapján a gravitáló test mindazokat az aszimptotikusan távolról induló fénysugarakat be fogja fogni, amelyek energiája nagyobb, mint az effektív potenciál maximumához tartozó E érték, azaz amelyeknek a látszólagos impakt paramétere $b < b_c$, ahol a kritikus érték $b_c = \sqrt{27}M$.

Azok a fénysugarak, amelyeknek a látszólagos impakt paramétere nagyobb, mint a b_c kritikus érték, nem fogódnak be, hanem újra eltávolodnak a végtelenbe (ld. a 9. ábrát). Eközben az eredetileg $\phi_{-\infty}$ irányban (az ekvatoriális síkban) induló fénysugár a centrumon történő szóródás után a $\phi_{+\infty}$ irányban fog a végtelenbe távozni. Ez azt jelenti, hogy ha egy távoli csillag a megfigyelőhöz képest a $\phi_{-\infty}$ irányban helyezkedik el, akkor a megfigyelő a csillagot az eredeti helyzetéhez képest $\delta\phi = \Delta\phi - \pi$ irányban fogja észlelni, ahol $\Delta\phi = \phi_{\infty} - \phi_{-\infty}$, ha a csillagból induló fénysugárnak „menetközben” el kellett haladnia pl. a Nap felszíne mellett. Ezt a jelenséget nevezik **fénygörbülésnek**. Az aszimptotikusan egyenes pályán haladó fénysugár a gravitáló centrum közelében elhaladva eredeti irányától eltérül $\delta\phi$

szöggel. Ha a fénysugár nem „érezné” a gravitáció hatását, akkor $\Delta\phi = \pi$ lenne (pl. Minkowski-téridőben, amikor elhanyagoljuk a gravitáló centrum téridőt görbítő hatását). A Schwarzschild-metrikájú téridőben azonban az eltérés $\Delta\phi > \pi$ lesz. A fénysugár végtelen távoli megfigyelő által észlelt szögeltérése az $M/b \ll 1$ esetén elsőrendű pontossággal

$$\delta\phi = \frac{4GM}{c^2 b}, \quad (2.3.94.)$$

ahol visszaírtuk G -t és c -t természetes egységeikben. A Nap mellett elhaladó távoli csillag fényének eltérése $\delta\phi \approx 1,75$ ívmásodperc. Ezt először 1919-ben az Eddington³³-expedíció mérte meg kb. 10%-os hibával teljes napfogyatkozás idején. Kvazárokból érkező rádióhullámok eltérését figyelték meg később teljes napfogyatkozás idején, amint a Nap mellett elhaladnak, így Fomalont³⁴ és Sramek³⁵ 1976-ban 1% pontossággal igazolták a (2.3.94.) összefüggést.

A fénysugár eltéréseinek mértékét az alábbiak szerint határozhatjuk meg. Induljunk ki a (2.3.84.) egyenletből, amely $\kappa = 0$ esetben az

$$\frac{1}{2}\dot{r}^2 + \frac{1}{2}\left(1 - \frac{2M}{r}\right)\frac{L^2}{r^2} = \frac{1}{2}E^2 \quad (2.3.95.)$$

alakot ölti, ahonnan

$$\dot{r} = \sqrt{E^2 - \left(1 - \frac{2M}{r}\right)\frac{L^2}{r^2}}. \quad (2.3.96.)$$

Másrészt, mivel $\dot{\phi} = L/r^2$, azt kapjuk, hogy

$$\frac{d\phi}{dr} = \frac{L}{r^2} \left(E^2 - \frac{L^2}{r^3}(r - 2M)\right)^{-1/2}. \quad (2.3.97.)$$

A fénysugár fordulópontja azon $r = R_0$ radiális koordinátaértéknél van, amelyre $V(R_0) = E^2/2$, ahonnan $(R_0 - 2M)/R_0^3 = 1/b^2$, azaz $R_0^3 - b^2(R_0 - 2M) = 0$ adódik. Az utóbbi egyenletnek a legnagyobb gyöke a keresett R_0 ,

$$R_0 = \frac{2b}{\sqrt{3}} \cos\left[\frac{1}{3}\arccos\left(-\frac{\sqrt{27}M}{b}\right)\right]. \quad (2.3.98.)$$

Szimmetriaokok miatt a fordulópontig elszenvedett eltérés megegyezik a fordulópont utáni eltéréssel, úgyhogy a teljes $\Delta\phi$ szögváltozás

$$\Delta\phi = 2 \int_{R_0}^{\infty} \frac{dr}{[(r^4/b^2) - r(r - 2M)]^{1/2}} = 2 \int_0^{1/R_0} \frac{du}{[(1/b^2) - u^2 + 2Mu^3]^{1/2}}. \quad (2.3.99.)$$

Először is ellenőrzésképpen meghatározhatjuk az eltérést lapos téridőben, ami az $M = 0$ esetnek felel meg. Ekkor $R_0 = b$, és azt kapjuk, hogy $\Delta\phi = 2\arcsin(b/R_0) = \pi$, ahogy azt várjuk,

³³Sir Arthur Stanley Eddington, angol csillagász, fizikus és matematikus, 1882–1944)

³⁴Edward Fomalont, amerikai csillagász és fizikus, 1940-

³⁵Richard Sramek

amikor a fénysugár nem térül el eredeti irányától. Ha $M \neq 0$, akkor az $M/b \ll 1$ paraméterben első rendben megkapjuk a keresett képletet a fénysugár $\delta\phi = \Delta\phi - \pi$ szögeltérülésére.

Meg kell említeni, hogy a fénygörbülésnek tulajdonítható a **gravitációs lencse-effektus**. Ilyenkor valamilyen kiterjedt égitest, galaxisfürt (galaxy cluster) vagy galaxis szolgál gravitációs lencseként, amelyen áthaladva a távoli objektumból érkező fénysugarak a gravitáció hatására hasonlóan görbülnek, mint az optikai lencsékben. Bár a jelenség elvi lehetősége már az 1920-as években felvetődött, első megfigyelése 1979-ben történt Walsh³⁶ és csoportja által: a „Twin Quasar” (Iker-kvazár) volt az első olyan objektum, amelynek kapcsán a gravitációs lencse-effektust sikerült igazolni. A jelenség abban áll ebben az esetben, hogy a gravitációs lencse egyetlen objektumról kettős képet állít elő. A képek szögtávolsága szokatlanul kicsi, kicsi a különbség a vöröseltolódásukban és hasonló a spektrumuk. A lencseként szolgáló galaxist is sikerült azonosítani. Az utóbbi évtizedekben a gravitációs lencse-effektus vizsgálata kiterjedt, és felhasználást nyer távoli galaxisok, galaxisfürtök felkutatásában.

2.4. A Kruskal-Szekeres-féle kiterjesztés. Gravitációs összeomlás

2.4.1. A szingularitásokról általában

Általában a sztatikus, gömbszimmetrikus égitestek anyaga kitölti az $r \leq 2M$ tartományt vagy túl is terjed rajta, úgyhogy a vákuumban érvényes Schwarzschild-megoldás szingularitásai érdektelenek. Abban az esetben azonban, ha a gömbszimmetrikus égitest elég nagy tömegű ahhoz, hogy teljes gravitációs összeomlást szenvedjen, akkor a vákuumra vonatkozó Schwarzschild-megoldás az $r \leq 2M$ tartományon is érdekessé válik. A szingularitás általában, – mint már említettük – kétféle lehet:

1. *valódi fizikai szingularitás*, amikor a Riemann-tenzorból képezett valamely skalár, pl. $R_{abcd}R^{abcd}$ vagy R végtelenné válik;
2. *koordináta-szingularitás*, amikor a választott koordinátarendszer nem alkalmas a téridő-sokaság valamely tartományának lefedésére.

A 2. esetben az „eredeti” koordinátarendszer szerint nem szinguláris (M, g_{ab}) téridő-tartományt alkalmas új koordinátarendszert választva kiterjesztjük egy nagyobb $(\tilde{M}, \tilde{g}_{ab})$ téridő-tartományra, ahol $M \subset \tilde{M}$. A Schwarzschild-téridőnek $r = 0$ -ban valódi fizikai szingularitása van, ahol $R_{abcd}R^{abcd} \rightarrow \infty$; $r = 2M$ -nél viszont koordináta-szingularitása van, ahol ξ^a párhuzamos a $\nabla^a r$ vektorral.

³⁶Dennis Walsh, angol csillagász, 1933–2005

2.4.2. Példa a kiterjesztésre: a 2-dimenziós Rindler-téridő

A 2-dimenziós Rindler-téridő metrikája

$$ds^2 = -x^2 dt^2 + dx^2, \quad (2.4.100.)$$

ahol a koordináták a $-\infty < t < \infty$ és $0 < x < \infty$ intervallumokat futják be. A metrikának az $x = 0$ -ban szingularitása van, hiszen $-g = x^2 \cdot 1$, és ezért a $g^{\mu\nu}$ inverz metrika az $x = 0$ -ban szinguláris. Ez koordináta-szingularitás, mivel találunk olyan új, alkalmasabb koordinátarendszert, amelyben az $x = 0$ -nak megfelelő helyen nincsen szingularitás. Az új koordinátarendszert a következő módon keressük. 2-dimenzióban a null-geodetikusoknak pontosan 2 különböző serege létezik, az úgynevezett befutó és kifutó null-geodetikusok. Sem a befutó, sem a kifutó geodetikus-sereghez tartozó geodetikusok nem metszik páronként egymást, ugyanakkor a két geodetikus-sereg teljesen behálózza a téridőt (azaz a téridő minden pontján pontosan egy befutó és egy kifutó null-geodetikus halad át). Ezeknek a geodetikusoknak az affin paramétereit keressük meg az eredeti téridő-tartományban, és terjesztjük ki egy nagyobb téridő-tartományra.

A k^a érintővektor-mezővel rendelkező null-geodetikusok egyenlete:

$$0 = g_{ab} k^a k^b = -x^2 \dot{t}^2 + \dot{x}^2, \quad (2.4.101.)$$

ahol $\dot{} = d/d\lambda$ a λ affin paraméter szerinti deriválást jelöli, a null-geodetikusok érintőjének komponensei ($k^t = \dot{t}, k^x = \dot{x}$). Átrendezés után a null-geodetikusok egyenlete

$$\left(\frac{dt}{dx}\right)^2 = \frac{1}{x^2} \quad (2.4.102.)$$

alakot ölt, s ennek megoldásai

$$t = \pm \ln x + C, \quad (2.4.103.)$$

ahol C = állandó és konvenció szerint a $+$ és a $-$ előjel rendre a kifutó és a befutó null-geodetikusoknak felel meg.

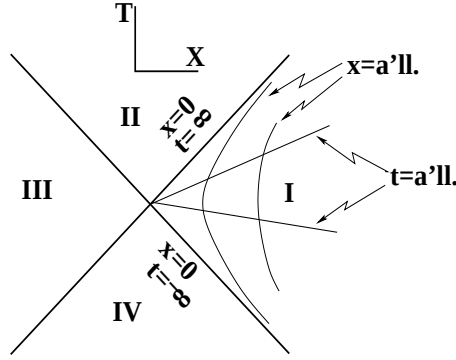
Vezessük be az

$$u = t - \ln x, \quad v = t + \ln x \quad (2.4.104.)$$

fénykúp- vagy más szóval null-koordinátákat, ahol $-\infty < u, v < +\infty$ megfelel az $x > 0$ tartománynak. A null-koordinátákkal kifejezett metrika:

$$ds^2 = -e^{v-u} du dv. \quad (2.4.105.)$$

Az $u = \text{áll.}$ és a $v = \text{áll.}$ egyenletek rendre a kifutó és a befutó null-geodetikusok egyenletei. A null-koordináták olyan koordináta-rendszerre történt áttérést jelentenek, amelynek u - és v -tengelye rendre a $v = 0$ befutó és az $u = 0$ kifutó null-geodetikus.



10. ábra. A 2-dimenziós Rindler-téridő kiterjesztése, az I. szektor felel meg az eredeti Rindler-téridőnek.

Ezután bevezetünk olyan $U(u)$ és $V(v)$ új koordinátákat, amelyek rendre a befutó és a kifutó null-geodetikusoknak az affin paraméterei. Használjuk ki ehhez, hogy a Rindler-téridőben létezik „időbeli” eltolási szimmetria. Ehhez a $(\partial/\partial t)^a$ Killing-vektormező tartozik. A null-geodetikusok mentén létezik az E állandó:

$$E = -g_{ab}k^a \left(\frac{\partial}{\partial t} \right)^b = -g_{tt}k^t = x^2 \dot{t} = x^2 \frac{dt}{d\lambda}. \quad (2.4.106.)$$

Másrészt $t = \frac{1}{2}(u + v)$ és $v - u = 2 \ln x$, amiből $x^2 = e^{v-u}$, vagyis a null-geodetikusokat jellemző állandó

$$E = \frac{1}{2}e^{v-u} \left(\frac{du}{d\lambda} + \frac{dv}{d\lambda} \right). \quad (2.4.107.)$$

Kifutó null-geodetikusokon $u = \text{áll.}$, azaz $E = \frac{1}{2}e^{v-u} \frac{dv}{d\lambda}$, ahonnan $\frac{d\lambda}{dv} = \frac{1}{2E}e^{v-u}$, amiből integrálással az affin paraméterre $\lambda = \frac{1}{2E}e^{-u} \int e^v dv = \frac{1}{2E}e^{v-u} + \text{const.}$ adódik. A kifutó null-geodetikusokon használhatjuk tehát a

$$V(v) = e^v \quad (2.4.108.)$$

affin paramétert, $0 < V(v)$. Befutó null-geodetikusokon $v = \text{áll.}$, azaz $E = \frac{1}{2}e^{v-u} \frac{du}{d\lambda}$, ahonnan $\frac{d\lambda}{du} = \frac{1}{2E}e^{v-u}$, amiből integrálással az affin paraméterre $\lambda = \frac{1}{2E}e^v \int e^{-u} du = -\frac{1}{2E}e^{v-u} + \text{const.}$ adódik. A befutó null-geodetikusokon használhatjuk tehát az

$$U(u) = -e^{-u} \quad (2.4.109.)$$

affin paramétert, $U(u) < 0$. Az affin paraméterek egyik oldalról korlátos tartománya mutatja, hogy az eredeti 2-dimenziós Rindler-téridő aszimptotikusan nem teljes, metrikája

$$ds^2 = -dU dV. \quad (2.4.110.)$$

A téridő-tartomány kiterjesztése azáltal történik, hogy az új (U, V) koordinátákat az egész valós számegyenesen hagyjuk futni, $-\infty < U, V < +\infty$. Ezután bevezetjük a

$$T = \frac{1}{2}(U + V), \quad X = \frac{1}{2}(V - U) \quad (2.4.111.)$$

Minkowski-koordinátákat, amelyek szintén bármely értéket felvehetnek a valós számegyenesen, és segítségükkel a kiterjesztett téridő-tartományon a metrika

$$ds^2 = -dT^2 + dX^2 \quad (2.4.112.)$$

alakot ölt, ami azonos a Minkowski-metrikával. Az eredeti (t, x) Rindler-koordinátákat kifejezzük a Minkowski-koordinátákkal:

$$x = \sqrt{X^2 - T^2}, \quad t = \operatorname{ar\,th}(T/X). \quad (2.4.113.)$$

Ebből látjuk, hogy a Rindler-téridő a Minkowski-téridőnek az $X > |T|$ szektora, az I szektor, a kiterjesztés után kapott Minkowski-téridőnek azonban még 3 másik szektora is van: $II : T > |X|$, $III : -T > |X|$, $IV : -X > |T|$.

2.4.3. A Schwarzschild-metrika kiterjesztése

A Schwarzschild-téridő a 2-dimenziós Rindler-téridőhöz hasonlóan terjeszthető ki. Ez annak köszönhető, hogy a gömbszimmetria miatt elegendő a kiterjesztést a (t, r) síkon vizsgálni. Ezen a síkon a metrika

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2M}{r}\right)dt^2 + \frac{1}{1 - \frac{2M}{r}}dr^2. \quad (2.4.114.)$$

A koordinátarendszer a $-\infty < t < +\infty$ és $2M < r$ tartományon értelmes. A 2-dimenziós (t, r) síkon a null-geodetikusoknak megint 2 serege van: a kifelé és a befelé futó radiális $(\phi, \theta = \text{áll.})$ null-geodetikusok, amelyek egyenletei

$$0 = g_{ab}k^a k^b = \left(1 - \frac{2M}{r}\right)\dot{t}^2 + \frac{1}{1 - \frac{2M}{r}}\dot{r}^2, \quad (2.4.115.)$$

ahonnan azt kapjuk, hogy

$$\frac{dt}{dr} = \pm \frac{1}{1 - \frac{2M}{r}}. \quad (2.4.116.)$$

Vezessük be az

$$r_* = r + 2M \ln\left(\frac{r}{2M} - 1\right) \quad (2.4.117.)$$

Regge³⁷-Wheeler³⁸-féle teknősbéka-koordinátákat. Ezeknek a segítségével a radiális null-geodetikusok egyenlete

$$\frac{dt}{dr} = \pm \frac{dr_*}{dr} \quad (2.4.118.)$$

³⁷Tullio Eugenio Regge, olasz fizikus, 1931–2014

³⁸John Archibald Wheeler, amerikai fizikus, 1911–2008

alakot ölt, és könnyen integrálható:

$$t = \pm r_* + C, \quad (2.4.119.)$$

ahol C tetszőleges állandó. Most is bevezetjük az

$$u = t - r_*, \quad v = t + r_* \quad (2.4.120.)$$

null-koordinátákat. Segítségükkel $r_* = \frac{1}{2}(v - u)$, ami azt jelenti, hogy ezáltal r is adott implicit módon, mint u és v kifejezése; továbbá

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2M}{r}\right)dudv. \quad (2.4.121.)$$

Használjuk fel, hogy

$$\begin{aligned} \frac{r}{2M} - 1 &= \frac{r}{2M} \left(1 - \frac{2M}{r}\right) = e^{(r_* - r)/2M}, \\ -\left(1 - \frac{2M}{r}\right) &= -\frac{2M}{r} e^{-r/2M} e^{(v-u)/4M}, \end{aligned} \quad (2.4.122.)$$

és írjuk át a metrikát

$$ds^2 = -\frac{2M}{r} e^{-r/2M} e^{(v-u)/4M} dudv \quad (2.4.123.)$$

alakba. Ezzel elértük, hogy a metrikát a $-\frac{2M}{r} e^{-r/2M}$ csak r -től függő, $r = 2M$ helyen nem szinguláris tényező és a csak u -tól és v -től függő tényező szorzatára bontottuk.

A Rindler-téridő kiterjesztése során a null-geodetikusok menti affin paramétereket vezettük be új U és V koordinátákként. Az analógia alapján most az új koordinátákra az

$$U(u) = -e^{-u/4M} < 0, \quad V(v) = e^{v/4M} > 0 \quad (2.4.124.)$$

munkahipotézissel élünk. Ekkor $dU = \frac{-1}{4M} U du$, $dV = \frac{1}{4M} V dv$ miatt

$$ds^2 = -\frac{32M^3}{r} e^{-r/2M} dU dV \quad (2.4.125.)$$

adódik. Itt ha $r \rightarrow 2M$ felülről, akkor $r_* \rightarrow -\infty$ miatt $u \rightarrow \infty$ és $v \rightarrow -\infty$, valamint $U \rightarrow 0$ alulról és $V \rightarrow 0$ felülről. Az (U, V) koordinátákban tehát a metrika az $r = 2M$ helyen véges.

A következő lépésként kiterjesztjük az U és V koordináták intervallumát minden olyan valós értékre, ami $r > 0$ -val kompatibilis. A szingularitás $r = 0$ -ban

fizikai, azt már nem tudjuk további koordináta-transzformációval eltüntetni. Ezután, a kiterjesztés utolsó lépéseként, bevezetjük a Kruskal³⁹-Szekeres⁴⁰-féle

$$T = \frac{1}{2}(U + V), \quad X = \frac{1}{2}(V - U) \quad (2.4.126.)$$

koordinátákat. Ezekben a koordinátákban bármely (T_0, X_0) téridő-ponthoz tartozó fénykúp egyenlete $T - T_0 = \pm(X - X_0)$ (a (T, X) „síkon” szemléltetve 45° -os egyenesek). A Kruskal-Szekeres-koordináták segítségével a **Schwarzschild-téridő Kruskal-Szekeres-féle kiterjesztésének metrikája**

$$ds^2 = \frac{32M^3}{r} e^{-r/2M} (-dT^2 + dX^2) + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2), \quad (2.4.127.)$$

ahol visszaírtuk a metrika gömbi szögektől függő részét. A metrika kifejezésében szereplő r koordináta implicit módon függ a (T, X) koordinátáktól. Az implicit függést az eredeti (t, r) koordináták és a Kruskal-Szekeres-koordináták közti kapcsolat,

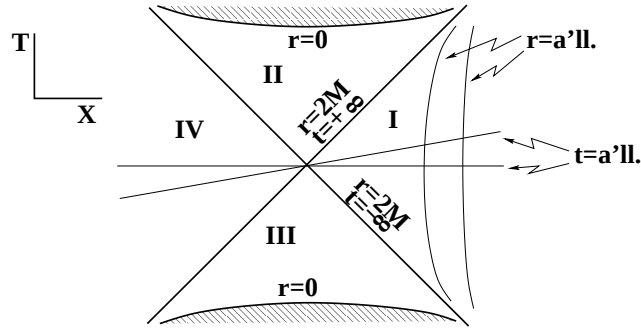
$$\left(\frac{r}{2M} - 1\right)e^{r/2M} = X^2 - T^2, \quad \frac{t}{2M} = \ln \frac{X + T}{X - T} = 2 \operatorname{ar} \operatorname{th} \frac{T}{X}, \quad (2.4.128.)$$

határozza meg. Innen látjuk, hogy az $r > 0$ feltétellel a (T, X) koordináta-sík azon tartományai vannak összhangban, amelyek az $X^2 - T^2 > -1$ feltételnek eleget tesznek. Ezért a pozitív, ill. negatív irányba nyíló, megfelelő 2 forgási hiperboloid és annak annak belseje ki van zárva a kiterjesztett téridőből. Az $X^2 - T^2 = -1$ hiperboloidok felszíne felel meg az $r = 0$ szingularitásnak, ezek ezért nem tartoznak a kiterjesztett téridő-sokasághoz. A téridő-sokaságnak a 2 hiperboloidon kívüli részét a $T = \pm X$ 2-dimenziós hiperfelületek négy tartományra osztják (ld. a 11. ábrát):

- *I. tartomány:* $X > |T|$ megfelel az $r > 2M$ radiális koordináta-értékeknek, ez az eredeti Schwarzschild-téridőnek a Schwarzschild-sugáron kívüli tartománya. Az $X = T$ és az $X = -T$ hiperfelület rendre az $r = 2M$, $t = +\infty$ és az $r = 2M$, $t = -\infty$ hiperfelület. Ez a tartomány $r \rightarrow \infty$ esetén aszimptotikusan lapos. Az $r = \text{áll.}$ és a $t = \text{áll.}$ hiperfelületeket a (T, X) síkon rendre $X > 0$ irányba nyíló hiperbolák és csökkenő r esetén az origóba befutó egyenesek ábrázolják. Az I. tartományból indított bármely időszerű görbe áthalad az $r = 2M$, $t \rightarrow +\infty$ hiperfelületen. Amikor ezt a felületet pl. egy szabadon eső részecske megközelíti (időszerű geodetikusan mozog), akkor a részecske által mért véges, kicsiny $\Delta\tau$ sajátidő-tartamnak végtelenhez tartó $\Delta t = \Delta\tau / \sqrt{1 - (2M/r)}$ időtartam felel meg az aszimptotikusan távoli, nyugvó megfigyelő óráján. A részecske a saját órája szerint tehát véges idő alatt belesik a II. tartományba, amit a végtelen távoli megfigyelő végtelen ideig tartó

³⁹Martin David Kruskal, amerikai matematikus és fizikus, 1925–2006)

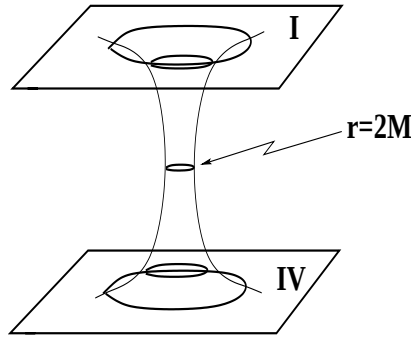
⁴⁰Szekeres György (George Szekeres), magyar-ausztrál matematikus, 1911–2005



11. ábra. A Schwarzschild-téridő Kruskal-Szekeres-féle kiterjesztésének 2-dimenziós ábrája. Az ábra minden pontja a (θ, ϕ) gömbi szögek tekintetében egy 2-dimenziós gömbfelületnek felel meg. Az I. tartomány az eredeti Schwarzschild-téridőnek a Schwarzschild-sugáron kívüli tartománya, a II. tartomány a feketelyuk tartománya (az eredeti Schwarzschild-téridőnek a Schwarzschild-sugáron belüli tartománya). A kiterjesztés eredményeként jelent meg az aszimptotikusan lapos IV. tartomány és a III. tartomány, a fehérlyuk tartománya. A satírozott részek nem tartoznak hozzá a kiterjesztett téridő-tartományhoz.

közeledésnek észlel. Hasonlóan egy a centrum felé az I. tartományból elindított fénysugár sem „észlel” szingularitást, és belép a II. tartományba. Eközben – az előző megfontolást alkalmazva – az aszimptotikusan távoli megfigyelő számára frekvenciája zérussá válik a belépés pillanatában.

- *II. tartomány:* az $|X| < T$, $T < \sqrt{X^2 + 1}$ tartomány, ami az eredeti koordinátákban a $0 < r < 2M$ tartomány. Ez a **feketelyuk** tartománya. Ebben a tartományban az $r = \text{áll.}$ és a $t = \text{áll.}$ hiperfelületeket a (T, X) -síkon rendre pozitív T irányba nyíló hiperbolák és az origóból csökkenő r -rel kifutó egyenes szakaszok szemléltetik, utóbbiak az $r = 0$ szingularitásban végződnek. A tartomány bármely pontjában a fénykúp lokálisan úgy helyezkedik el, hogy sem fényjel, sem részecske a tartományból kilépni nem tud, hanem „életét” az $r = 0$ szingularitásba befutva végzi véges sajátidő elteltével. A feketelyuk tehát olyan téridő-tartomány, amelyből sem részecske, sem fény nem lép ki, ugyanakkor a feketelyuk felé radiálisan tartó részecskék és fénysugarak akadálytalanul lépik át az I. és a II. tartomány közti határt.
- *III. tartomány:* a $|X| < -T$, $T > -\sqrt{X^2 + 1}$ tartomány, ami a feketelyuk-tartománynak egyfajta „időtükörzöttje”, az úgynevezett **fehérlyuk** tartománya. Bármely részecskének, vagy fényjelnek, amely a III. tartományban jelen van, véges sajátidő alatt kellett „kilépnie” a $T = -\sqrt{X^2 + 1}$ ($r = 0$) szingularitásból, és akadálytalanul elhagyhatja a III. tartományt a IV. tartomány irányában.
- *IV. tartomány:* a $-X > |T|$ tartomány, amely az I. tartományhoz hasonlóan

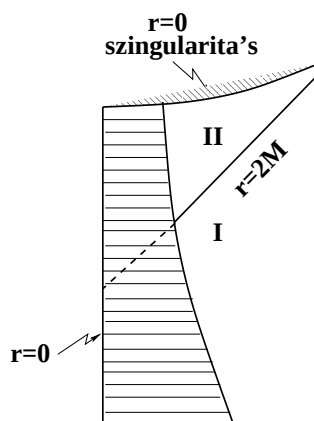


12. ábra. A Schwarzschild-féle féregjárat (azaz az Einstein-Rosen-híd) szemléltetése a Schwarzschild-téridő Kruskal-Szekeres-féle kiterjesztésében a $t = 0$ hiperfelület topológiája révén. Az ábrán az egyik dimenzió el van nyomva, azaz az $\mathbb{R} \times S^2$ topológiát $\mathbb{R} \times S^1$ topológiával szemléltetjük, úgyhogy az ábrán az $r = \text{áll.}$ körök valójában 2-dimenziós gömbfelületeknek felelnek meg. Az $r = 2M$ -nél látható „nyak” fölötti és alatti rész rendre az aszimptotikusan lapos I. és IV. tartományhoz tartozik.

aszimptotikusan lapos tartomány. Érdekes azonban tudatosítanunk, hogy nincsen sem olyan időszerű geodetikus, sem olyan null-geodetikus, amelynek mentén összeköttetés lenne az I. és a IV. aszimptotikusan lapos tartomány között. Ez abból látszik, hogy a jövőbeli fénykúpoknak a 11. ábra bármely pontjában olyan „felfelé nyíló ékek” felelnek meg, amelyeket a jövőirányú null-geodetikusoknak megfelelő $\pm 45^\circ$ -os egyenesek rajzolnak ki. Következésképpen az I. tartományból radiálisan befelé indított időszerű vagy fényszerű görbe, azaz minden befelé indított részecske vagy fénysugár a II. tartományba lép be és életét az $r = 0$ szingularitásban végzi, ahelyett, hogy átléphetne a IV. tartományba. A $t = 0$ hiperfelület térbeli topológiai viszonyait, az úgynevezett **Schwarzschild-féle féregjáratot**, (wormhole) vagy más néven az **Einstein-Rosen⁴¹-hidat** (bridge) a 12. ábra szemlélteti 3 helyett 2 dimenzióban.

Az valószínűsíthető, hogy a kiterjesztett Schwarzschild-téridő III. és IV. tartománya nem fizikai. Az I. tartomány bármely sztatikus, gömbszimmetrikus égitesten kívül (ami általában a Schwarzschild-sugarán kívül helyezkedik le) megvalósul. A II. tartomány pedig abban az esetben válik legalább részben fizikaivá, ha az égitest tömege meghaladja azt a kritikus értéket, amelynél nagyobb tömeg esetén bekövetkezik a teljes gravitációs összeomlás (kollapszus). Az utóbbi esetet szemlélteti a 13. ábra.

⁴¹Nathan Rosen, amerikai-izraeli fizikus, 1909–1995.



13. ábra. Gömbszimmetrikus égitest teljes gravitációs összeomlása esetén megjelenik a Schwarzschild-féle feketelyuk tartományának egy része. A vízszintesen sátozott tartományt az összeomló anyag foglalja el.

Hivatkozások

- [1] Robert M. Wald, *General relativity* (The Univ. of Chicago Press, Chicago, 1984).
- [2] S. W. Hawking, G. F. R. Ellis, *The large-scale structure of space-time* (Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1973).
- [3] R. Arnowitt, S. Deser, C.W. Misner, „*The Dynamics of General Relativity*”, *Gravitation: An Introduction to Current Research* ed. by L. Witten (Wiley, New York, 1962).
- [4] A.E. Fischer, J.E. Marsden, „*The Initial Value Problem and the Dynamical Formulation of General Relativity*”, *General Relativity, an Einstein Centenary Survey* ed. by S.W. Hawking, W. Israel (Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1979).