GÁSPÁR VILMOS

Játsszunk káoszt!

Káosz: determinisztikus rendszerek véletlenszerű viselkedése

Még néhány évtizeddel ezelőtt is bátran hihettük azt, hogy a világ óraműszerű működésének törvényei megismerhetők, s minthogy a determinisztikus mozgásegyenletek – gondoltuk – mindig megjósolható viselkedésre vezetnek, a rendteremtésben, a természet erőinek megszelídítésében „csak" ismereteink korlátai szabnak határt. Generációk világszemléletét fogalmazta meg *József Attila* Eszmélet című versében (1934):

„Akár egy halom hasított fa,
hever egymáson a világ,
szorítja, nyomja, összefogja
egyik dolog a másikát
s így mindenik determinált."

Nem tudni, hogy a költő párizsi tartózkodása során mennyit hallott *Henri Poincaré* (1854–1912) francia matematikus és elméleti csillagász munkásságáról, aki három égitest kölcsönös mozgását próbálta megjósolni az egyszerű newtoni mozgásegyenletekkel, de az idézett versben szereplő alábbi sorok alapján –

„Én fölnéztem az est alól
az egek fogaskerekére –
csilló véletlen szálaiból
törvényt szőtt a múlt szövőszéke
és megint fölnéztem az égre
álmaim gőzei alól
s láttam, a törvény szövedéke
mindig fölfeslik valahol" –

talán nem túl merész gondolattársítás annak feltételezése, hogy tudomást szerezhetett azokról a megdöbbentő eredményekről, amelyek szerint három égitest kölcsönös mozgása – az égi mechanika törvényeinek ismerete ellenére – hosszabb távon egyáltalán nem jósolható meg.

Képzeljük el a következőt: egy bolygó két csillag kölcsönös vonzásában mozog úgy, hogy – váltakozva – hol az egyik, hol a másik csillagot kerüli meg! Poincaré óta tudjuk, hogy sem ennek a feladatnak (az ún. háromtest-problémának), sem az általánosabb esetnek (amikor háromnál több égitest kölcsönhatását vizsgáljuk) nincs analitikus megoldása. A modern számítógépek azonban lehetőséget adnak az égitestek mozgását leíró differenciálegyenletrendszer numerikus integrálására, és a modellszámítások eredményei megerősítik Poincaré megfigyelését: minél távolabbi jövőbe nézünk, annál bizonytalanabbul tudjuk megjósolni a bolygó későbbi helyzetét (azaz, nem tudjuk megmondani, hogy éppen melyik csillag körül kering). Tudatlanságunk azonban nem valamilyen misztikus számítási hiba eredménye. Bizonyítható, hogy ez a jelenség, amit a modern tudomány szóhasználata szerint *káosznak* nevezünk, természetes következménye az égitestek mozgását leíró determinisztikus törvényeknek.

A káosz szó használata arra, amit a tudományban kaotikusnak nevezünk, valójában nem szerencsés. A szó köznapi értelme – „zűrzavar" – ugyanis számos félreértésre ad okot. Fokozottan igaz ez, ha felidézzük a szó eredeti görög jelentését is: üresség, semmi. A káoszelmélettel foglalkozók – érzékelve a fogalom használata körüli zűrzavart – az angliai Royal Society szervezésében rendezett nemzetközi káoszkonferencián (London, 1986) a következő definíciót javasolták a szótárkészítőknek:

chaos *Math* Stochastic behaviour occurring in a deterministic system.

káosz *Mat* A determinisztikus rendszerekben előforduló sztochasztikus viselkedés.

A káosz tehát olyan szabálytalan (véletlenszerű) viselkedés, amelyet teljes egészében szabályok (törvények) irányítanak. A véletlenszerűség abban nyilvánul meg, hogy az ismert determinisztikus törvények ellenére sem tudjuk egy kaotikus rendszer viselkedését hosszú távon előre jelezni, mert a kaotikus mozgás önmagát sohasem ismétlő, aperiodikus mozgás. A kérdésre, hogy mi a káosz (és mi nem az), részletes választ kaphat az olvasó Tél Tamás és Gruiz Márton ilyen címmel megjelenő dolgozatában [1], melyben a szerzők összefoglalják a káoszelmélet legfontosabb alapfogalmait és megállapításait, de áttekintenek néhány olyan, elsősorban az ismeretterjesztő irodalomban gyakran megjelenő kijelentést is, amely az ezredfordulóra letisztult értelmezés szerint túlzónak tekinthető.

A káoszelmélet egyik legfontosabb felismerése, hogy a determinisztikus rendszerek egyszerű törvényei is vezethetnek bonyolult viselkedésre, *azaz egyszerű egyenleteknek is lehet bonyolult a megoldása.* Ezek az egyenletek a matematika nyelvén ún. közönséges differenciál- vagy differenciaegyenletek. Amikor számítógépet használunk a differenciálegyenletek (egyenletrendszerek) numerikus integrálására, akkor a következőképpen járunk el: 1. Betápláljuk a számítógépbe a kezdeti feltételekre (például az égitestek helyzetére és sebességére) vonatkozó adatokat. 2. A mozgásegyenletekből levezetett közelítő formulák segítségével kiszámítjuk az új értékeket egy nagyon kicsivel későbbi időpontra. 3. Az így kapott adatokat betáplálva a gépbe ismét elvégezzük a számítást stb. Ez a módszer – amit *iterációnak* nevezünk – azért működik, mert nagyon kicsi lépésközt használunk, s így jól közelítjük az „elméletileg várható" értéket, amit folytonos időskála alkalmazásával kapnánk. Ilyen feladatok elvégzésére a mai személyi számítógépek technikailag alkalmasak, ám a megfelelő programok elkészítése és működtetése komoly szakértelmet és jártasságot kíván. A káosszal kapcsolatos fogalmak lényege azonban sokkal egyszerűbb számítások alapján is megismerhető és megérthető [2].

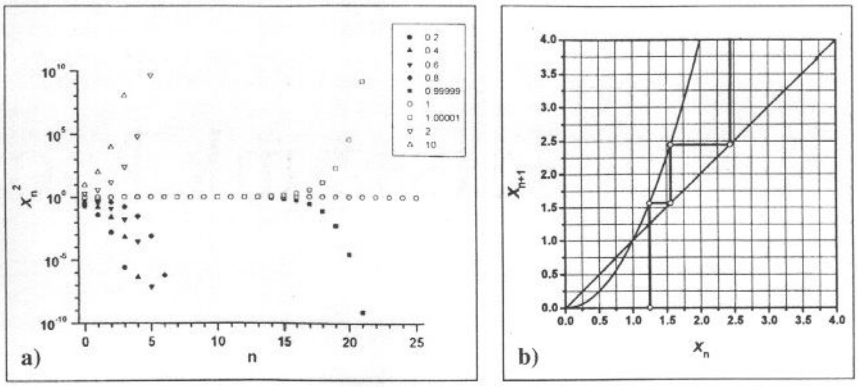
Játsszunk káoszt!

Azt javaslom, hogy az olvasó vegyen kézbe egy olyan zsebszámológépet, amellyel az alapműveleteken kívül egyszerű függvények értékeit is ki lehet számolni. Nézzük meg, mi történik, ha például az égitestek mozgását leíró differenciálegyenletekből levezethető, bonyolult formulák helyett egyszerű függvényeket alkalmazunk a fent leírt iterációs algoritmus szerint. Természetesen az időszakasz hosszát ebben az esetben nem tudjuk mihez kötni, ezért tekinthetjük – önkényesen – bármilyen kicsinek.

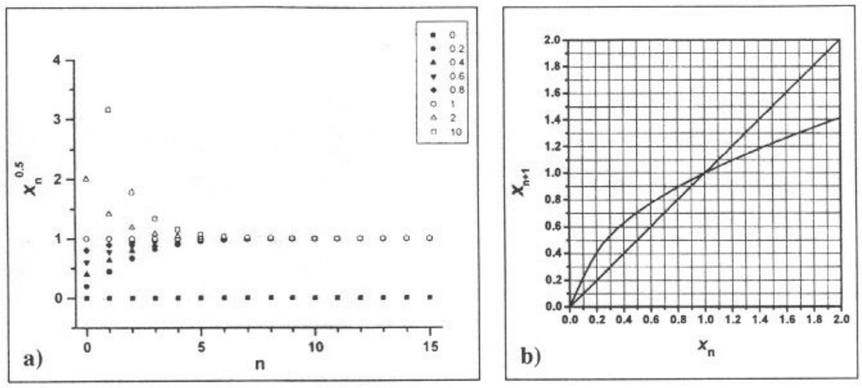
Első példánkban a számítógép x^2 gombját fogjuk használni. Kiindulási értéknek válasszunk egy számot 0 és 1 között! Az egyszerűség kedvéért üssük be ezt a számot: 0,54321! Nyomjuk meg az x^2 gombot! Mi történik? A kijelzőn megjelenő szám kisebb lesz. Nyomjuk meg ismét, majd ismét az x^2 gombot! Azt tapasztaljuk, hogy a számok egyre kisebbek, és néhány (az én kalkulátorom kilenc) gombnyomás után 0 jelenik meg a kijelzőn. Ez további gombnyomásra már nem változik, hisz $0^2=0$. Az eljárást megismételve bármely 0 és 1 közötti számmal, hasonló megfigyelést tehetünk. Ha az iterációt 1-gyel kezdjük, akkor semmilyen változást nem tapasztalunk, hisz $1^2=1$. Azonban, ha az eljárást 1-nél nagyobb számmal kezdjük, akkor a kijelzőn megjelenő számok egyre nagyobbak lesznek, s végül a túlcsordulást jelző hibaüzenet (E) jelenik meg. Érdekes megfigyelést tehetünk, ha egy-egy iterációs sorozatban feljegyezzük és ábrázoljuk a részeredményeket (x_n^2) az iterációs szám (n) függvényében (**1.a ábra**). Azt tapasztaljuk, hogy minél közelebb van a kezdeti érték az 1-hez, annál később következik be az értékek eltávolodása az 1-től. Megfigyeléseinket a dinamikai rendszerek elméletében alkalmazott fogalmakkal a következőképpen foglalhatjuk össze. Az $x=1$ pont az $x_{n+1}=x_n^2$ leképezés (iterációs eljárás) egyensúlyi pontja (idegen szóval *fixpontja*), ahol x_n és x_{n+1} az n-edik, illetve az $n+1$-edik iterációban kiszámolt értéket jelöl. Ez az egyensúlyi pont azonban *instabilis*, hisz ha 1-től bármilyen kicsivel is eltérő kezdeti értéket választunk, akkor az iteráció végeredménye 0, ha $x_0<1$, és $+\infty$, ha $x_0>1$.

A fárasztó és időrabló gombnyomogatás után sietek megnyugtatni az olvasót, hogy a matematikában jól ismert egy egyszerű grafikus eljárás, amellyel sokkal kevesebb munkával és sokkal hamarabb hasonló következtetésekre juthatunk. A grafikus eljáráshoz, amelyet *pókhálómódszernek* is neveznek, a laboratóriumokban mindennaposan használt négyzethálós papír (milliméterpapír) lenne a legalkalmasabb, de végső esetben megteszi egy „kockás lap" is egy kallódó füzetből. Készítsünk egyenlő beosztású tengelyeket ahhoz hasonlóan, ahogyan az az **1.b ábrán** látható! A vízszintes tengelyen az x_n, a függőleges tengelyen pedig a megfelelő x_{n+1} értékeket fogjuk ábrázolni, illetve leolvasni. Néhány számított érték alapján rajzoljuk meg azt a parabolát, amely $x_{n+1}=x_n^2$ leképezésnek felel meg! Végül pedig rajzoljuk be a $x_{n+1}=x_n$ leképezésnek megfelelő 45°-os egyenest, amely tulajdonképpen a négyzetháló átlója (diagonálisa)! Ha valaki ezt a munkát is szeretné megspórolni, akkor egy nagyon egyszerű megoldást javaslok: készítsen nagyított fénymásolatot a cikkbeli ábráról!

Ha mindezzel elkészültünk, akkor azonnal szemünkbe ötlik, hogy a két „görbe" az $x=1$ pontban metszi egymást. Ez a pont tehát a leképezés *fixpontja*. A rendszer viselkedése a fixpont környékén a következő módszerrel állapítható meg. Válasszunk egy 1-nél nagyobb kezdőértéket a vízszintes tengelyen. Legyen ez mondjuk 1,25. Ebből a pontból kiindulva húzzunk egy



1. ábra. a) **Az x^2 gomb iteratív alkalmazásával különböző kezdőértékekkel előállított számsorozatok (logarimikus skálán ábrázolva), ahol x_n^2 az n-edik iterációs lépésben kiszámított érték. b) Az $x_{n+1}=x_n^2$ differenciaegyenlet (leképezés) dinamikájának elemzésére használható pókhálóábra és az iterációs lépcsők $x_0=1{,}25$ kezdőérték esetén**

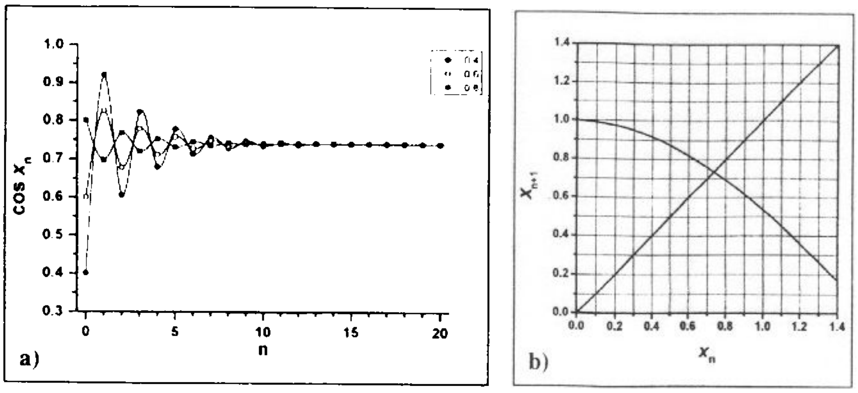


2. ábra. a) A $\sqrt{\ }$ gomb iteratív alkalmazásával különböző kezdőértékekkel előállított számsorozatok, ahol $x_n^{0,5}$ az n-edik iterációs lépésben kiszámított érték. b) Az $x_{n+1}=x_n^{1/2}$ differenciaegyenlet (leképezés) dinamikájának elemzésére használható pókhálóábra

függőleges vonalat egészen addig, amíg el nem érjük a parabolát (**1.b ábra**). Tegyünk egy jelet a parabolára. Ebből a pontból kiindulva most húzzunk egy vízszintes vonalat a diagonális irányába egészen addig, amíg el nem érjük az átlót. Tegyünk egy jelet a diagonálisra. Ebből a pontból most húzzunk egy függőleges vonalat egészen a paraboláig. Az eljárást folytatva azt tapasztaljuk, hogy az iteráció eredményeként egyre távolabb és távolabb kerülünk a fixponttól. Ha a kezdőértéket 0 és 1 között választjuk, akkor is távolodunk a fixponttól, de a lépcsőfokok megrajzolásával mindig a koordinátarendszer kezdőpontjába jutunk. Következtetésünk azonos a korábbival: a leképezés fixpontja instabilis.

Lássuk, mire megyünk frissen szerzett tudásunkkal, ha most egy másik, például a $\sqrt{\ }$ gombot választjuk! Készítsük el a négyzethálót az előzőhöz hasonlóan úgy, hogy most a parabola helyett az $x_{n+1}=x_n^{1/2}$ leképezésnek megfelelő függvény görbéjét szerkesztjük meg néhány számított érték alapján! A **2.b ábráról** könnyen leolvasható, hogy az $x=1$ pont (ahol a görbe metszi a diagonálist) ebben az esetben is fixpont. A pókhálóbeli lépcsők – előbb ismertetett módszer szerinti – megrajzolásával azonban most arra a megállapításra juthatunk, hogy ez a fixpont *stabilis*. Azaz, 1-nél kisebb (de nem 0!) vagy nagyobb kezdőértéket választva, az iterációs sorozat eredményeként mindig a görbék metszéspontjába jutunk. Természetesen e megállapítás érvényességét ellenőrizhetjük a gombok nyomogatásával is (az eredményeket lásd a **2.a ábrán**).

Stabilis fixpontot kapunk akkor is, ha például a *cos* gombot használjuk az iterációhoz. (Fontos, hogy a kezdőérték beütése előtt a számológépet Rad – radián – üzemmódba kell állítani!) Ezt könnyen megjósolhatja az olvasó is, ha a **3.b ábrához** hasonlóan megrajzolja a pókhálót, és megszerkeszt benne néhány lépcsőt. A leképezés fixpontja ebben az esetben is a két görbe metszéspontja (0,739085133), de egy új, érdekes jelenséget is megfigyelhetünk: a számok egyre kisebb amplitúdóval ingadoznak (oszcillálnak) a stabilis fixpont körül (**3.a ábra**). (Az iteráció, természete-



3. ábra. a) A *cos* gomb iteratív alkalmazásával különböző (radiánban megadott) kezdőértékekkel előállított, csökkenő amplitúdóval oszcilláló számsorozatok, ahol *cos* x_n az *n*-edik iterációs lépésben kiszámított érték. b) Az $x_{n+1}=cos\ x_n$ differenciaegyenlet (leképezés) dinamikájának elemzésére használható pókhálóábra

sen, mindig csak diszkrét pontokat eredményez. Az ábrában csak azért kötöttem össze őket egy folytonos vonallal, hogy az oszcilláció könnyebben megfigyelhető legyen.)

Most próbáljunk ki egy olyan függvényt, amelynek megfelelő gomb ugyan nincs a kalkulátoron, de a számítás még mindig könnyen elvégezhető. Legyen például ez az (x^2-1) függvény. (Az iteráció egyetlen lépését ebben az esetben az x^2 gomb, majd $-1=$ művelet elvégzésével hajtjuk végre.) Az iterációt bármely 0 és 1 közötti számmal kezdve egy eddig nem tapasztalt, meglepő dinamikai jelenséggel szembesülünk: néhány (10-20) ciklus után ugyanis mindig ugyanahhoz a stabilis, ún. „kétperiódusú" oszcillációhoz: … 0, −1, 0, −1, stb. jutunk. Ez persze triviális, hisz $0^2-1=-1$ és $(-1)^2-1=0$. Míg az előző példában (*cos*) csillapodó oszcillációval közelítettük meg a stabilis fixpontot, addig ebben az esetben éppen az ellenkezőjét figyelhetjük meg: egyre növekvő amplitúdójú oszcillációval közelítjük meg a stabilis, ám oszcilláló (0, −1) megoldást. A fixpont értékének és stabilitásának vizsgálatához arra kérem az olvasót, hogy készítse el a pókhálóábrát!

Az ábra újabb meglepetéssel szolgál: a görbéknek nem egy, hanem két metszéspontja van, vagyis az $x_{n+1}=x_n^2-1$ leképezésnek nem egy, hanem két fixpontja létezik. Ez belátható, ha meggondoljuk, hogy a fixpont értékének kiszámításához tulajdonképpen az $x^2-x-1=0$ másodfokú egyenletet kell megoldanunk. Iterációs lépcsők szerkesztésével arról is meggyőződhetünk, hogy a pozitív $(x_+=1{,}618033989\ldots)$ és a negatív $(x_-=-0{,}618033989\ldots)$ fixpont egyaránt instabilis, de (0, −1) oszcillációhoz csak a negatív fixpont körüli $(-x_+, x_+)$ intervallumból választott kezdőértékkel jutunk. A kétperiódusú megoldás ún. „vonzási tartományán" kívüli kezdőértékkel végzett iterálás viszont mindig növekvő számsorhoz vezet $(x_n\rightarrow+\infty)$, kivéve az $x_0=-x_+$ esetet, hisz ekkor az első iteráció eredménye éppen a pozitív fixpont. (Azt már csak az érdekesség kedvéért jegyzem meg, hogy x_+ értéke pontosan az „aranymetszés", aminek persze semmi köze nincs az oszcilláció megjelenéséhez, ahogyan ezt hamarosan be is fogjuk bizonyítani.)

Az eddigi példák alapján megfogalmazhatunk egy általános szabályt. Vizsgáljuk meg a pókhálóábrákban a leképezésekhez használt görbék meredekségét (*m*) a fixpontok kicsiny környezetében, és hasonlítsuk össze a diagonális meredekségével (+1). Megállapíthatjuk, hogy a fixpont instabilis, ha $|m|>1$, különben stabilis, és körülötte oszcilláló lesz a lecsengés, ha $-1<m<0$.

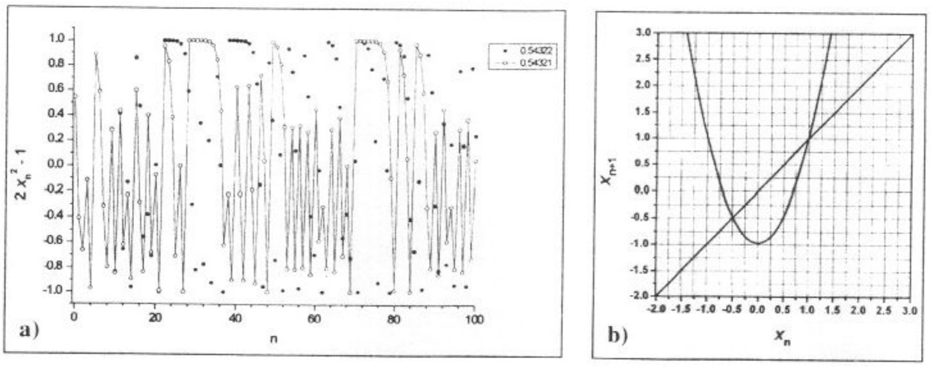
Játsszunk tovább!

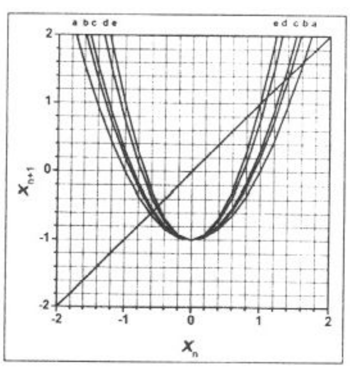
Mi történik vajon akkor, ha csak egy kicsit bonyolultabb, például a $(2x^2-1)$ függvényt alkalmazzuk az iterációs eljárásunkban? Válasszuk kezdőértéknek kedvenc számunkat: 0,54321! Az eredmény meghökkentő: a kijelzőn −1 és +1 közötti számok „ugrálnak" – látszólag véletlenszerűen –, és sok-sok iteráció után sem tűnik úgy, hogy az értékek egy fixponthoz, vagy akár csak az előbb megfigyelt kétperiódusú oszcillációhoz közeledének. A **4.a ábrán** az első száz iterációs lépés eredményét üres körökkel ábrázoltam (a folytonos vonal ebben az esetben is csak a jelenség könnyebb megfigyelését segíti). Amit tapasztaltunk, az maga a káosz: egy egyszerű (determinisztikus) egyenlet véletlenszerűnek tűnő viselkedést eredményezett!

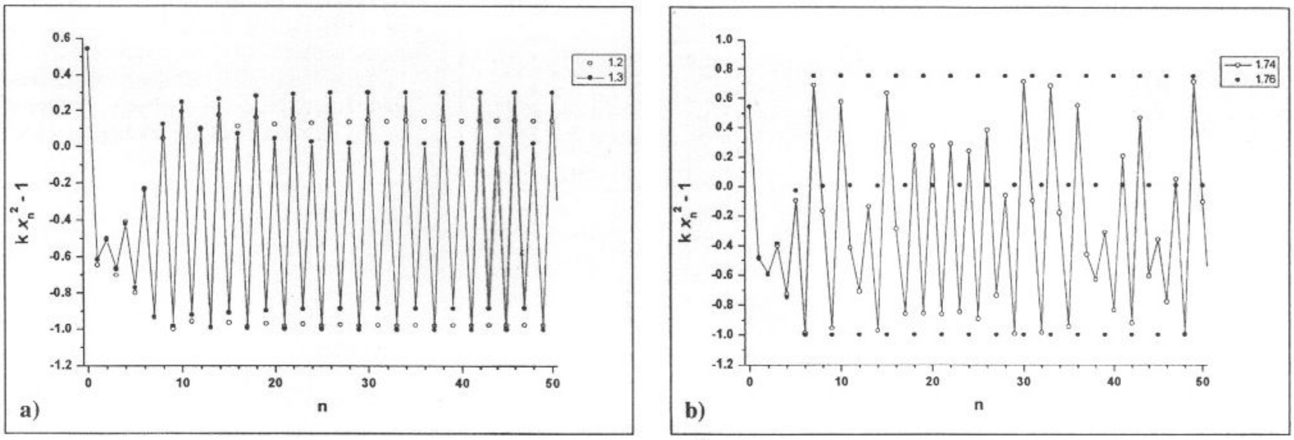
A kaotikus rendszerek egyik jellemző tulajdonsága, hogy viselkedésük hosszú távon nem megjósolható. Az előrejelzés pontatlanságával kapcsolatban azt kell figyelembe venni, hogy *a kezdeti állapot leírására használt adatokat mindig csak véges pontossággal ismerjük*. Végezzük most el az iterációs eljárást 0,54322 kezdőértékkel, mintegy azt szimulálva, hogy egy fizikai mennyiséget, amellyel egy valós rendszer kezdeti állapotát jellemezzük, csak egyszázezred pontossággal tudjuk meghatározni! A számítás eredménye a **4.a ábrán** teli körökkel van feltüntetve. Jól látható,

5. ábra. Az $x_{n+1}=kx_n^2-1$ differenciaegyenlet (leképezés) dinamikájának elemzésére használható pókhálóábrák különböző *k* értékeknél (a: 1; b: 1,2; c: 1,3; d: 1,74; e: 2)

4. ábra. a) A $(2x^2-1)$ „gomb" iteratív alkalmazásával 0,54321, ill. 0,54322 kezdőértékekkel előállított kaotikus számsorozatok, ahol $2x_n^2-1$ az *n*-edik iterációs lépésben kiszámított érték. b) Az $x_{n+1}=2x_n^2-1$ differenciaegyenlet (leképezés) dinamikájának elemzésére használható pókhálóábra







6. ábra. **a) A (kx^2–1) „gomb" iteratív alkalmazásával 0,54321 kezdőértékkel előállított kétperiódusú (k=1,2) és négyperiódusú (k=1,3) számsorozatok, ahol $kx_n^{\,2}$–1 az n-edik iterációs lépésben kiszámított érték. b) A (kx^2–1) „gomb" iteratív alkalmazásával 0,54321 kezdőértékekkel előállított kaotikus (k=1,74) és háromperiódusú (k=1,76) számsorozatok**

hogy bár kezdetben az üres és teli körök igen közel vannak egymáshoz, körülbelül a huszadik iterációs lépéstől kezdve a két „modellrendszer" viselkedése teljesen eltérő. Ezért nem lehet tehát megjósolni a jövőbeli állapotot.

Az $x_{n+1}=2x_n^{\,2}-1$ leképezés dinamikáját a **4.b ábra** segítségével vizsgálhatjuk meg. Most is két instabilis fixpontot találunk: –0,5 és 1. Az iterációs lépcsők megszerkesztésével pedig könnyen megállapíthatjuk, hogy a (–1, 1) tartományból indított iterálás mindig káoszt eredményez.

Az otthon készített ábrát összehasonlítva a **4.b ábrával** megfigyelhető, hogy akkor, amikor az (x^2–1) függvény helyett a ($2x^2$–1) függvényt választottuk, tulajdonképpen nem csináltunk mást, mint egy kicsit összenyomtuk a parabolát. S lám, ennek az lett a drámai következménye, hogy a szabályosan oszcilláló rendszerből kaotikus rendszer lett. Mi történik vajon akkor, ha a parabolát nem ennyire, hanem csak valamelyik köztes állapotnak megfelelően nyomjuk össze (**5. ábra**)?

Általánosítsuk tehát a problémát, és vizsgáljuk meg, milyen dinamikát eredményez a (kx^2–1) függvény alkalmazása $0<k\leq2$ esetén. Az iterációt minden esetben kedvenc számunkkal (0,54321) kezdjük! A **6.a ábrán** az üres és teli körökkel jelzett értékek azt mutatják, hogy az eljárás eredménye k=1,2 esetén kétperiódusú, k=1,3 esetén pedig négyperiódusú oszcilláció. A k paraméter értékének további növelése nyolcperiódusú, tizenhat periódusú stb. oszcillációkat eredményez, s eközben azt tapasztaljuk, hogy a perióduskettőződéssel képződő oszcillációkhoz rendelhető paramétertartomány egyre kisebb és kisebb. Léteznie kell tehát egy torlódási pontnak, ahol a periódusok száma végtelen naggyá válik, s e torlódási ponton túl a káosz tartományába érünk.

A kaotikus tartományt gyakran szakítják meg olyan „ablakok", amelyekben az oszcilláció nem páros, hanem páratlan periódusú. Például k=1,74 értéknél az oszcilláció kaotikus (**6.b ábra**, üres körök), míg k=1,76 értéket választva a 0,54321 kezdőértékkel végzett iterálás ún. háromperiódusú oszcillációt eredményez (**6.b ábra**, teli körök). A kaotikus rendszerekkel kísérletező kutatók számára a háromperiódusú oszcilláció megjelenése az egyik legbiztatóbb jele annak, hogy sikerült a kaotikus tartomány közelébe kerülniük.

Az $x_{n+1}=kx_n^{\,2}-1$ leképezés dinamikájának változása k értékének növelésével sokkal könnyebben nyomon követhető egy Excel-munkalapba épített makró segítségével. A fájl a következő internetcímről tölthető le: www.kfki.hu/chemonet.hu/hun/eloado/gaspar/map_movie.xls (a program a [CTRL+Z] paranccsal indítható). A képernyőn két ábra látható egymás mellett: a bal oldali a pókhálót mutatja, a jobb oldali pedig egy-egy k értéknél végzett 100 iteráció eredményét. A program abból a szempontból is igen tanulságos, hogy igazolja: a kaotikus számsorozat (piros pontok) nem akármilyen (véletlenszerű) számok sorozata, hanem csakis olyanoké, amelyek a bal oldali ábrán kék színnel jelzett görbéhez rendelhetők. A makró futtatásával azt is megállapíthatjuk, hogy az oszcilláció kb. k=0,75 értéknél jelenik meg. Az aranymetszésnek tehát semmi köze ahhoz, hogy az (x^2–1) függvény iteratív alkalmazása a stabilis (0, –1) oszcillációhoz vezet.

Logisztikus leképezés

Az ökológusok gyakran vizsgálnak olyan – időszakosan szaporodó – populációkat (pl. gyümölcsöskerti kártevők), amelyekben nincs átfedés az egyes generációk között. A kutatások célja ilyenkor annak megértése, hogy az n+1-edik generáció számossága (N_{n+1}) hogyan függ az előző, n-edik generáció számosságától (N_n). Az ismert tendenciát figyelembe véve, nevezetesen, hogy az utódok száma (N_{n+1}) általában nő, ha a populáció számossága kicsi, és csökken, ha N_n értéke nagy, egy egyszerű nemlineáris differenciaegyenletet írhatunk fel:

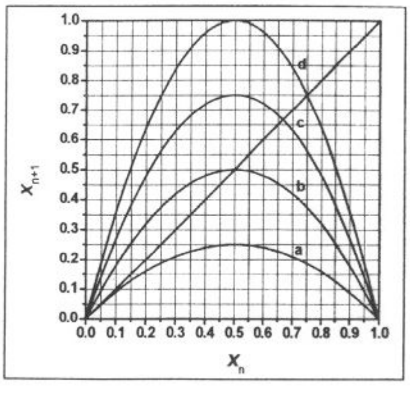
$$N_{n+1}=kN_n-bN_n^{\,2}=N_n(k-bN_n),$$

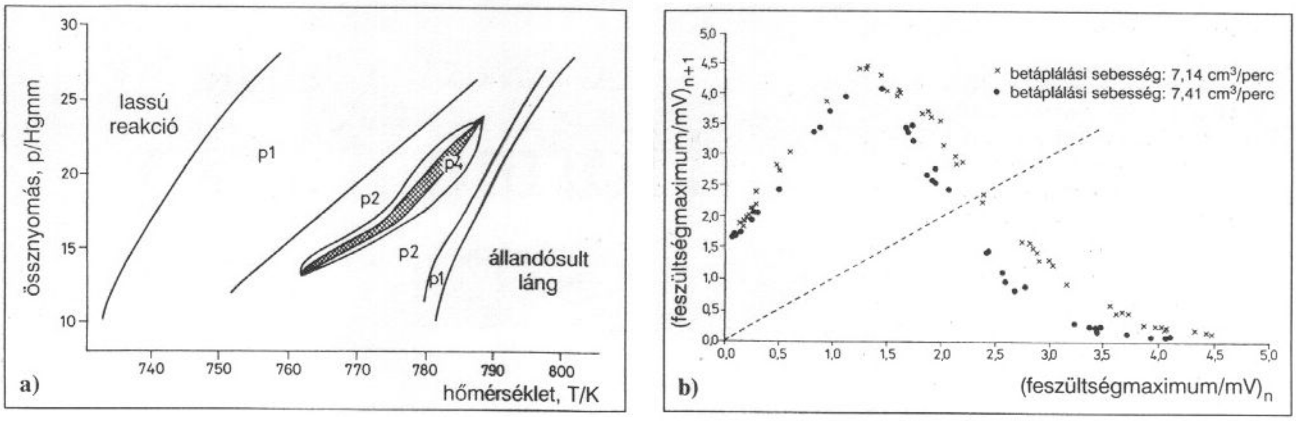
amelyet logisztikus differenciaegyenletnek neveznek, s amelyben k és b a populációk növekedésének, illetve csökkenésének mértékét megszabó paraméterek. Az $x=bN/k$ jelölést bevezetve az egyenlet a következő egyszerű alakra hozható:

$$x_{n+1}=kx_n(1-x_n),$$

amit logisztikus leképezésnek nevezünk. Az egyenlet alapján megszerkesztett görbéket a k paraméter különböző értékeinél a **7. ábrán** láthatjuk. A pókhálóábra alap-

7. ábra. Az $x_{n+1}=kx_n(1-x_n)$ differenciaegyenlet (logisztikus leképezés) dinamikájának elemzésére használható pókhálóábrák különböző k értékeknél (a: 1; b: 2; c: 3; d: 4)





8. ábra. a) A (CO_2+1% H_2):O_2=7,2:5,6 összetételű gázelegy égése a különböző össznyomás- és hőmérséklet-értékeknél más és más dinamikájú: p1 periodikus, p2 és p4 két-, illetve négyperiódusú gyulladási reakció. A szürkére satírozott tartományban a gyulladási reakció kaotikus. (Térfogat: 0,57 dm^3, az átáramlásos reaktorra jellemző tartózkodási idő: 25±3 s.) b) Az egymást követő felvillanásokban mérhető, kaotikusan változó feszültségmaximum-értékek pókhálóábrája a CO betáplálási sebességének két, egymáshoz közeli értékénél. A logisztikus leképezéshez hasonló, kicsit torzult „parabolák" metszéspontja a diagonálissal (szaggatott vonal) kijelöli az instabilis fixpontok helyzetét [4]

ján megérthetjük, hogy a logisztikus leképezés egyik nagy előnye az, hogy $1<k<4$ esetén a megoldás mindig a $0<x<1$ intervallumban marad, míg korábbi példáinkban x negatív értéket is felvehetett. A $k<1$ esetet azért nem tárgyaljuk, mert az összes megoldás az $x=0$ ponthoz tart, azaz a populáció kihal. A nemtriviális dinamikai viselkedés tartományai grafikus módszerrel is megállapíthatók, de egyszerűbb, ha most is inkább egy Excel-makrót használunk. A logisztikus leképezés dinamikai viselkedésének tanulmányozására alkalmas fájl a következő internetcímről tölthető le: www.kfki.hu/chemonet.hu/hun/eloado/gaspar/logistic_map_movie.xls (a program a [CTRL+Z] paranccsal indítható). Az eredmények az alábbi táblázatban foglalhatók össze:

k	megfigyelt dinamikai viselkedés
3,0000	a fixpont instabilissá válik, megjelenik az oszcilláció
3,4500	a perióduskettőződés kezdete
3,5700	a 2^n periódusú oszcillációk torlódási pontja, a kaotikus tartomány kezdete
3,6786	az első páratlan periódusú oszcilláció megjelenése
3,8284	a háromperiódusú oszcilláció megjelenése
4,0000	a kaotikus tartomány vége

A kaotikus viselkedés matematikai szerkezetének mélyebb megértése (pl. miért éppen ezeknél a paraméterértékeknél következik be a dinamika megváltozása; miért éppen 2^n periódusú oszcillációk születnek; miért egyre kisebb az ezekhez rendelhető tartomány stb.) túlmutat e cikk célkitűzésén: annak bemutatásán, hogy milyen vad dolgokat csinálhatnak ezek az egyszerű nemlineáris egyenletek. Az érdeklődőknek ajánlom *R. May* klasszikusnak számító cikkét, illetve annak magyar fordítását [2].

Káosz valós rendszerekben: meglepő kémiai példák

Az első kémiai reakció, amellyel az iskolában találkoztunk – s gondolom, hogy ez ma is így van –, a víz képződése hidrogénből és oxigénből:

$$2H_2+O_2 \rightarrow 2H_2O.$$

A tankönyvírók – nagyon helyesen – egy egyszerű reakció bemutatásával kívánták demonstrálni a kémiai reakciók lényegét: egy új anyagi minőség képződését. Azonban az egyszerűnek látszó folyamat – ellentétben azzal, amit a reakcióegyenlet sugall – nem egyetlen lépésben játszódik le, hisz a hármas ütközések valószínűsége nagyon kicsi (ezt elhallgatták az első kémia órán!). A reakció valójában annyira összetett, hogy a vízképződés kinetikáját széles koncentráció-, hőmérséklet- és nyomástartományban csak olyan részletes reakciómechanizmussal lehet leírni – a kísérleti adatokkal jól egyezően –, amelyben a H_2, O_2 és H_2O mellett az O- és H-atom, az OH-gyök és egyéb részecskék szerepelnek. S ezek között mintegy 90 (!) elemi reakció játszódik le. *Johnson* és *Scott* [3] gondos kísérletekkel igazolta, hogy ún. átáramlásos reaktorban (amelyet állandóan friss hidrogénnel és oxigénnel táplálunk) a vízképződési reakció bizonyos hőmérséklet- és nyomástartományban periodikus vagy kaotikus.

Hasonlóan egyszerű folyamatnak tűnik a szén-dioxid képződése szén-monoxidból és oxigénből:

$$2CO+O_2 \rightarrow 2CO_2.$$

A reakció technológiai jelentősége az, hogy a szénhidrogénalapú üzemanyagok elégetésekor ez a nagy hőfelszabadulással járó folyamat a reakciósor utolsó lépése. A folyamat fontos szerepet játszik az üvegházhatás kialakulásában is. A reakció mechanizmusa ebben az esetben is jóval bonyolultabb, mint azt az egyszerű reakcióegyenlet alapján gondolnánk, s talán nem meglepő, hogy – hasonlóan a vízképződési reakcióhoz – megfelelő nyomás- és hőmérséklettartományban egyszerű oszcillációs, 2^n periódusú, illetve kaotikus viselkedést tapasztalunk (**8.a ábra**). A reakció előrehaladását úgy tudjuk nyomon követni, hogy az égés során képződő, gerjesztett állapotú CO_2 kemilumineszcenciás felvillanásait egy fotoelektron-sokszorozó segítségével detektáljuk [4]. Az egymást követő felvillanásokban mért feszültségértékek maximumát ábrázolva (**8.b ábra**) ahhoz hasonlóan, ahogy korábban a leképezéseket készítettük, talán nem meglepő, hogy a kaotikus felvillanások során mért kísérleti adatok egy fordított parabolára emlékeztető (bár a nagy feszültségértékeknél eltorzuló, de csak egyetlen maximumot mutató) görbére esnek. Az ábrán azt is megfigyelhetjük, hogy a kísérletben alkalmazott szabályozó paraméter értékének kicsiny megváltoztatásakor csekély mértékben ugyan, de megváltozik a kísérleti adatokból származtatható leképezés görbéje is. Ez azt jelzi, hogy a kaotikus rendszerek nagyon érzékenyen reagálnak a külső körülményekben bekövetkező még oly kicsiny változásra is. Ennek jelentőségét majd a cikksorozatban később megjelenő, a káosz szabályozásáról szóló dolgozatban fogom megmutatni. ►

Káoszszabályozás: káosz és rend

A káoszelmélet megszületésével a nyugati civilizáció több évszázad alatt összerakott világképe kártyavárként omlott össze. Vagy legalábbis egy darabig úgy tűnt. Még az 1980-as évek végén is általános volt az a vélekedés, hogy a kaotikus rendszerek nem szabályozhatók. A tipikusan mérnöki feladatot, a bonyolult dinamikai rendszerek szabályozását, végül is az alapkutatás eszközeivel sikerült megoldani. 1990-ben az amerikai University of Maryland három kutatója, *Edward Ott, Ceslo Grebogi* és *James A. Yorke* [5] kidolgozott egy eljárást, amelynek alkalmazásával a kaotikus rendszereket meg lehet szelídíteni, és a káoszt egyszerű periodikus folyamatokká lehet alakítani. A káosz megszelídítésekor azonban komoly dilemma elé kerülünk: döntenünk kell, hogy a sokféle lehetséges jövő közül melyik megjósolható viselkedést (rendet) választjuk.

A klasszikus hindu mitológia szerint a kozmosz története három szakaszra osztható: teremtés, karbantartás (rend) és pusztulás (rendezetlenség, káosz). *Brahma* a teremtés, *Visnu* a rend, *Siva* pedig a káosz istene. Közülük Siva a legsokoldalúbb, a vad, a megszelídíthetetlen. *Ian Stewart* angol matematikus mutat rá a káoszról szóló ismeretterjesztő könyvében [6], hogy Siva káosza és Visnu rendje között nem olyan természetű a különbség, mint a jó és gonosz között. Inkább azt a két különböző utat reprezentálja, ahogyan az istenség megnyilvánul: harag és jóindulat, zűrzavar és harmónia, káosz és rend.

Úgy tűnik, hogy a XXI. század hajnalán a nyugati és keleti világok filozófiái ugyan más-más utakon, de végül is egymásra találtak: káosz és rend elválaszthatatlan fogalmak lettek. **TV**

IRODALOM

[1] *Tél T.; Gruiz M.*: Mi a káosz? (És mi nem az), Természet Világa, 2002. július.

[2] *May, R. M.*: Simple mathematical models with very complicated dynamics. Nature 261. kötet, 459–467. o. (1976); magyar fordítása (ford. Turányi Tamás): Alkalmazott Matematikai Lapok 8. kötet, 427–446 o. (1982).

[3] *Johnson, B. R.; Scott, S. K.*: Complex Nonperiodic Oscillations in the $H_2 + O_2$ Reaction, J. Chem. Soc. Faraday Trans. 93. kötet, 2997–3004 o. (1997).

[4] *Davies, M. L.; Halford-Maw, P. A.; Hill, J.; Tinsley, M. R.; Johnson, B. R.; Scott, S. K.; Kiss, I. Z.; Gáspár, V.*: Control of Chaos in Combustion Reactions, J. Phys. Chem. A, 104. kötet, 9944–9952. o. (2000).

[5] *Ott, E; Grebogi, C.; Yorke, J.*: Controlling Chaos, Phys. Rev. Lett. 64. kötet, 1196–1199 o. (1990).

[6] *Stewart, I.*: Does God Play Dice? The new mathematics of chaos, 2nd edition; Penguin Books: London, 1997.

TALIÁN CSABA GÁBOR

Hormonfüggő sejthalál

Egy lárvakori rovarszerv lebomlása

A magasabb rendű rovarok teljes átalakulással fejlődnek, melynek bizonyos állomásainál szervezetük jelentős mértékben átformálódik. Ez történik a metamorfózis során is, amikor a lárvakori szervek zöme lebomlik, s helyettük a kifejlett rovar szövetei, szervei jönnek létre. Az egyedfejlődés minden szakasza szigorú hormonális szabályozás alatt áll; ebben igen jelentősek a szteroid típusú vegyületek. A muslicalárva nyálmirigyének hormonhatásra történő működésváltása, majd lebomlása kiváló vizsgálati terep ahhoz, hogy betekintést nyerhessünk e sejttani jelenségek molekuláris szintű szabályozásába. Ebben a rendszerben számos szteroidhormon által aktivált gént és fehérjét ismerünk már, melyek meghatározott egymásutánban lépnek működésbe, sokrétű kapcsolatokat alakítanak ki egymással, s tevékenységük specifikus végeredménye a mirigy sejtjeinek pusztulása egy megszabott fejlődési stádiumban. A kiterjedt sejtszintű kutatások alapján egy hormonfüggő, igen összetetten és alaposan szabályozott, hierarchikusan építkező működési-fejlődési mechanizmus részletei kezdenek kibontakozni.

A legfejlettebbnek tartott rovarok közé a bogarak, a lepkék, a kétszárnyúak (legyek, szúnyogok) és a hártyásszárnyúak (darazsak, méhek, hangyák) tartoznak, ezek egyúttal a legnagyobb fajszámú rendek is. Egyedfejlődésükre jellemző, hogy négyszakaszos; megkülönböztethetünk benne pete-, lárva-, báb- és imágó- (kifejlett, ivarérett rovar) állapotokat. Azt a folyamatsort, amely alatt az állat eljut az egysejtű petétől az imágóig, teljes átalakulásnak, vagy *holometaboliának* nevezzük. Az ilyen fejlődési mód nyilvánvalóan óriási változásokkal jár a testfelépítésben és a -működésben is. Ezek az átalakulások két nagy hullámban jelentkeznek. Az első az *embrionális fejlődés*, amikor kialakulnak a lárvára jellemző szervek, az állat kibújik a peteburokból, és táplálkozni kezd. A második hullám, melyet *metamorfózisnak* nevezünk, a lárvaállapot utolsó szakaszában indul, és a bábszakasz nagy részében is tart. Ennek során egyes lárvakori szövetek (például az izomzat és az idegsejtek nagy része) lebomlanak, s helyettük új, az imágóra jellemző struktúrák jönnek létre. A szervek másik csoportja nem tűnik el, inkább lassan, fokozatosan alakul át, tehát a sejtpusztulás mellett a sejtosztódás is komoly szerepet játszik. Így viselkedik például a középbél és a kültakaró hámja. A felnőttkori szervek gyakran olyan kis sejtcsoportokból (imaginális korongokból) alakulnak ki, melyek hosszú ideig nyugalomban várakoznak.

A modern biológiai tudományok egyik igen kedvelt és sikeres vizsgálati objektuma egy kicsiny légy, a közönséges ecetmuslica (*Drosophila melanogaster*), amely bő évszázada a legintenzívebben és legtöbbet kutatott állatfajok közé tartozik. Számos kedvező tulajdonsága teszi alkalmassá erre a szerepre. Kis mérete és egyszerű táplálékigénye miatt könnyen tartható. Viszonylag kényelmesen tenyészthető, nem bonyolult elkülöníteni és fenntartani egy sereg mutációját, ráadásul ezek nagy része szabad szemmel, vagy kis nagyítású mikroszkóppal is felismerhető. Lényeges szempont, hogy könnyen hozzáférhető mind a klasszikus, mind a molekuláris biológiai módszerek számára. Testfelépítése és egyedfejlődése is kiválóan ismert, s az ezzel kapcsolatos kutatások már számos óriási fontosságú felfedezést eredményeztek, amelyek jelentősége olykor egészen az emlősökig mutat. A Drosophila komolyabb hátránya, hogy apró mérete miatt egy-egy szövetből vagy szervből csak óriási munka árán, vagy egyáltalán