

GÁSPÁR VILMOS

# A megszelídített káosz

## A káoszszabályozás

A káoszszabályozás címszót hiába keressük a Magyar értelmező kéziszótár 1972-es kiadásában. Az általánosan elterjedt vélekedés – egészen a legutóbbi időkig – ugyanis az volt, hogy ami kaotikus (nem megjósolható), az *ab ovo* nem kontrollálható. Például a Wolf-díjas Freeman Dyson 1988-ban megjelent könyvének „Engineers Dreams” című fejezetében [1] a következő, eléggé egyértelmű állásfoglalás olvasható: „Egy kaotikus folyamat általában nem jósolható meg és nem is szabályozható. Nem jósolható meg, mert már egy kis zavaró hatás is a folyamat exponenciálisan növekvő perturbációját eredményezi. Nem szabályozható, mert a kicsiny zavarások csak más kaotikus állapothoz, nem pedig valamilyen stabil, megjósolható alternatívához vezetnek. Von Neumann tévedett, amikor úgy képzelte, hogy a megfelelő helyeken alkalmazott kicsiny taszigálásokkal minden instabil mozgás stabiláá bökődhető.” Az elmúlt évtized kutatásainak eredményeként azonban Neumann János álma végül mégiscsak beteljesülni látszik: a káosz megszelídíthető. Ennek módszereit ismertetem különböző kaotikus kémiai rendszerekkel végzett kísérleteink eredményeit felhasználva [2–7].

Kaotikusan viselkedő rendszerek szabályozására elsőként Hübler és Lüscher javasolt megoldást [8]. Módszerük, amely a differenciálegyenlet-rendszer szisztematikus átalakításán alapul, igen jól működik modelszámításokban, de nehezen alkalmazható valós rendszerekre. Az első, kísérletileg megvalósíthatónak tűnő módszert Ott, Grebogi és Yorke (OGY) közölte 1990-ben [9]. Cikkük robbanásszerű fejlődést idézett elő a témakör kutatásában. Egy évtizeddel később a *Physics Reports* összefoglaló cikkében Boccaletti és szerzőtársai már közel kétszáz közleményre hivatkozva ismertették a káoszszabályozással kapcsolatos kutatások legjelentősebb elméleti és kísérleti eredményeit [10]. Az OGY-módszert sikerrel alkalmazták egyszerű mechanikai gépek, komplex hidrodinamikai rendszerek, elektronikus eszközök, lézerek, sejtrendszerek (szív- és agyszövetminták) és gazdasági modellek kaotikus viselkedésének szabályozására. Az általunk vizsgált

kaotikus kémiai és elektrokémiai rendszerek szabályozására mi az OGY-algoritmus egyszerűsített változatát alkalmaztuk [11]. E módszer részleteinek ismertetése előtt azonban definiálni szeretném, hogy pontosan mit is értünk a káosz szabályozásán, s mi is történik valójában a káosz megszelídítésekor.

A káoszszabályozás azt jelenti, hogy a véletlenszerűnek tetsző kaotikus (aperiodikus) „mozgást” egy (vagy több) paraméter kicsiny változtatásával (perturbáció) előre jelezhető (periodikus) „mozgássá” alakítjuk. Nem tekintjük káoszszabályozásnak azt, ha a paraméter új értéke a kaotikus tartományon kívülre esik, mert ez nem más, mint a káosz megszüntetése egyszer s mindenkorra. Ezzel szemben, a káosz szabályozásakor a rendszer dinamikai állapotát megszabó paraméterértékek mindvégig a kaotikus tartományban maradnak. Ezt igen könnyen ellenőrizhetjük, ugyanis a perturbációt megszüntetve a rendszer (egy rövid átmeneti szakaszt követően) ismét kaotikusan fog viselkedni.

A káoszszabályozás kiindulópontja az, hogy egy kaotikus rendszer mozgása nem akármilyen rendezetlen módon, hanem – bizonyítottan – mindig az ún. kaotikus attraktoron történik.<sup>1</sup> A szabályozás módszereit két nagy csoportba osztjuk. A szakaszos módszerek alkalmazásakor a szabályozó paraméter értékét csak jól meghatározott időközönként, a folytonos módszerekben pedig folyamatosan változtatjuk. A perturbációk nagyságát mindkét esetben a rendszer állapotának ismeretében határozzuk meg.

### A kaotikus attraktor rekonstrukciója

Egy szakaszos módszer (például az OGY-algoritmus) alkalmazásához ismernünk kell *a)* a dinamikai változók fázissterében kialakuló kaotikus attraktort és *b)* az attraktor változását a paraméterek változtatásának hatására. A kísérleti munka során azonban legtöbbször nincs lehetőségünk arra, hogy egy dinamikai rendszer összes változóját nyomon követhessük. Nagyon gyakran csak egyetlen változó (például egy köztitermék koncentrációja) vagy több változó értékétől függő összetett „jel”

(például elektródpotenciál, fényelnyelés, az áramkör teljes árama stb.) mérésére van lehetőségünk. Ha csak egyetlen jel időbeli változását,  $x(t)$ , ismerjük, akkor az attraktort az ún. rekonstrukciós eljárással [14] állítjuk elő a következő módon. Egy  $m$ -dimenziós térben ábrázoljuk az  $x(t)$ ,  $x(t-\tau)$ ,  $x(t-2\tau)$ , ...,  $x(t-(m-1)\tau)$  értékeket, ahol  $m$  a rekonstruált fázister dimenziója,  $\tau$  pedig az eljárás során alkalmazott ún. késleltetési idő. Ennek értéke elvileg tetszőlegesen választható. Gyakorlati tapasztalat, hogy  $\tau$  optimális értéke a kaotikus oszcillációt jellemző átlagos „periódusidő” egytizede és egyharmada között van. Ugyancsak kísérleti tapasztalat, hogy a káosz szabályozásához nem mindig szükséges az eredeti attraktortól topológiailag ekvivalens  $m$ -dimenziós attraktort előállítani. Kisszámú (2-3) dinamikai változóval leírható, ún. alacsony dimenziójú dinamikai rendszerekben (a legtöbb ismert kaotikus kémiai rendszer ilyen) ugyanis elegendő az  $x(t)$  és  $x(t-\tau)$  értékeket használni. Ezzel a módszerrel állítottuk elő például egy rézelektrod felületének elektrokémiai (anódos) tisztítása során mérhető kaotikus áramoszcilláció alacsony dimenziójú kaotikus attraktorát (1. ábra).

### A kaotikus leképezés és a káosz szabályozása

A káosz szabályozásához ismernünk kell a rendszer mozgását a kaotikus attraktoron. Ezért a fázissterben elhelyezünk egy hipersíkot (Poincaré-síkot)<sup>2</sup> úgy, hogy az elmetssze az attraktort. Ezután nyomon követjük a kaotikus mozgást, és rögzítjük az azonos, előre kiválasztott irányból érkező pályavonalak és a Poincaré-sík ismétlődő

<sup>1</sup> Az itt is gyakran alkalmazott szak kifejezéseket (pl. kaotikus attraktor, ergodicitás, fázister, Ljapunov-exponens, perturbáció, steady-state stb.) részletesen tárgyalja *Tél Tamás és Grúz Márton*: Mi a káosz? (és mi nem az?) című sorozatindító cikke [12]. Ezen alapfogalmak pontos matematikai definíciója a sorozat közelmúltban megjelent cikkének (Krámlí András: A káosz matematikusszemmel) glosszáriumában olvasható [13].

<sup>2</sup> A hipersík dimenziója – értelemszerűen – mindig pontosan eggyel kisebb, mint a kaotikus attraktor dimenziója.

metszéséhez tartozó  $x_1, x_2, \dots, x_i, \dots, x_n$  metszéspontok koordinátáit. Mivel a kaotikus rendszer determinisztikus és autonóm [12], az  $x_i$  vektor értéke egyértelműen meghatározza a következő metszéshez tartozó  $x_{i+1}$  vektor értéket. Más szóval, a kaotikus rendszer dinamikáját egyértelműen leírhatjuk egy egyszerű diszkrét leképezéssel:

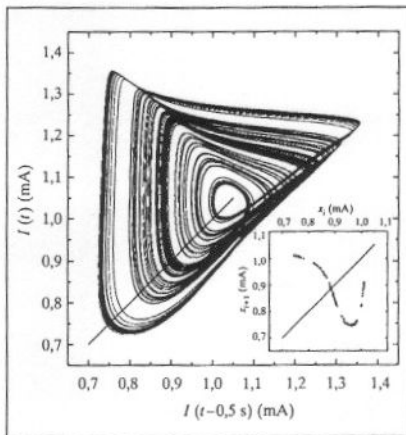
$$x_{i+1} = F(x_i). \quad (1)$$

Ezek a diszkrét leképezések ugyanolyan tulajdonságokkal rendelkezhetnek, mint a *Játsszunk káosz!* című cikkben [15] bemutatott „pókhálódigramok”, csak itt nem két, hanem több térbeli dimenzióban kell elképzelnünk az iterációt. A leképezés  $\bar{x}$  „stacionárius pontját”, ahol

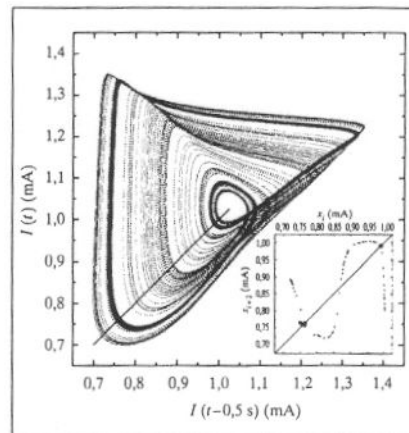
$$\bar{x} = F(\bar{x}), \quad (2)$$

a leképezés *fixpontjának* nevezzük. Mivel a fixpontban  $x_{i+1} = x_i$ , az instabil pont egészen biztosan része annak az egyperiódusú zárt pályának (P<sub>1</sub>), amely az egyszerű oszcillációhoz rendelhető. Ha a leképezést csak a minden második metszésre vonatkozó adatokból készítjük el, akkor ez az instabil fixpont a kétperiódusú periodikus pályához (P<sub>2</sub>) rendelhető stb. A kaotikus áramoszcillációt mutató réz-ortofoszforsav elektrokémiai rendszerben az áramadatokból rekonstruált attraktor kétdimenziós, s így a Poincaré-sík helyett elegendő egy egyenest definiálni. A metszéspontokból szerkesztett ( $x_{i+1}$  vs.  $x_i$ ) és ( $x_{i+2}$  vs.  $x_i$ ) egydimenziós leképezések az 1. és 2. ábrán láthatók. A pontok (mindkét ábrán) egy-egy jól meghatározott görbére esnek. Talán ezek létezése demonstrálja legszebben (bár mint tudjuk, a szépség nem tudományos eredetű és a káoszban uralkodik a rendet.

Egy szabályos oszcilláció „fenntartásához” – más szóval egy tetszőleges periodikus pályához tartozó instabil fixpont stabilizálásához – a kaotikus rendszert először is a kívánt fixpont közelébe kell terelnünk. A másik lehetőség az, hogy türelmesen megvárjuk azt a pillanatot, amikor a rendszer a fixpont közelébe kerül. Mivel a kaotikus rendszer ergodikus, ez előbb-utóbb be is következik [13]. Az ezt követő káoszszabályozás pedig lényegében nem más, mint egy (vagy több) paraméter alkalmas megváltoztatása annak érdekében, hogy a pályavonal és a Poincaré-sík következő metszése a fixpont kis közelségében (ideális esetben pontosan a fixpontban) történjen meg. Az 1. és 2. ábrán látható kaotikus áramoszcilláció szabályozására mi az egyszerűsített OGY-algoritmust alkalmaztuk [11]. A továbbiakban ezt az eljárást fogom ismertetni, és a szakirodalomban elterjedt



1. ábra. Rézelektrod foszforsavban lejátszó anódos oldódása során mért áramoszcilláció kaotikus attraktora. A belső ábrán látható egydimenziós leképezést az attraktor és a diagonális egymást követő metszéseihez rendelhető  $x_{i+1}$  és  $x_i$  értékekből szerkesztettük meg [3]



2. ábra. Stabilizált kétperiódusú (P<sub>2</sub>) áramoszcilláció zárt pályavonala a réz elektrokémiai oldódásához rendelhető kaotikus attraktor belsejében. A belső ábrán látható egydimenziós leképezést a kaotikus attraktor és a diagonális minden második metszéshez rendelhető  $x_{i+2}$ , illetve  $x_i$  értékekből szerkesztettük meg [3]

angol elnevezés: *Simple Proportional Feedback*<sup>3</sup> kezdőbetűiből képzett rövidítést (SPF) fogom használni.

### A káoszszabályozás egyszerű szakaszos módszere

Az SPF-módszer alapja az a kísérleti megfigyelés, hogy az alacsony dimenziójú kaotikus rendszerekben a szabályozó paraméterek értékének kicsiny megváltoztatásakor képződő új kaotikus attraktor nagyon hasonló az eredetihez. Ennek megfelelően az új attraktorból szerkeszthető új leképezés is nagyon hasonló lesz az eredetihez. Feltételezzük, hogy a paraméter perturbálásának hatására az egydimenziós leképezés egyszerűen csak párhuzamosan eltolódik az alkalmazott koordináta-rendszer átlója mentén (3. ábra). Egyszerű geometriai megfontolások alapján a paraméterperturbáció értékének kiszámítására alkalmas ún. „szabályozási formula” a következőképpen vezethető le.

Legyen  $p$  a vizsgált kaotikus rendszer egyik paramétere, amelyet a szabályozás során változtatunk. Tegyük fel, hogy  $p \equiv p_0$  értéknél a rendszer kaotikus. Az egydimenziós leképezés  $\bar{x}(p_0)$  fixpontjának értékét (a pókhálódigramok esetén alkalmazott eljárásához hasonlóan) a leképezés és a diagonális metszéspontjából határozzuk meg (lásd 1. és 2. ábra). A fixpont instabil, ha a leképezés fixpontbeli meredeksége abszolút értékben egynél nagyobb.

Legyen a leképezés értéke az  $n$ -edik metszéspont  $x_n$ . Célunk az, hogy a következő,  $(n+1)$ -edik metszés pontosan a fixpontban történjen, azaz  $x_{n+1} = \bar{x}(p_0)$  teljesüljön.

<sup>3</sup> Egyszerű arányos visszacsatolás.

Ezt úgy próbáljuk meg elérni, hogy a paraméter értékét az „iterációs” ciklus alatt pontosan annyiával ( $\delta p_n$ ) változtatjuk meg, hogy az így előállított új leképezés pontosan az eredeti leképezés instabil fixpontjába juttassa a rendszert. Ehhez először ismernünk kell  $x_n$  távolságát ( $\delta x_n$ ) a fixponttól, mely az ábráról leolvasható:

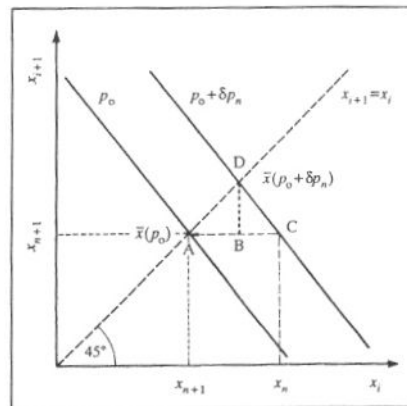
$$\delta x_n = x_n - \bar{x}(p_0) = \overline{AB} + \overline{BC}. \quad (3)$$

A paraméter megváltoztatásával (a leképezés párhuzamos eltolásával) a fixpont is eltolódik. Az eltolódás nagysága ( $\delta \bar{x}$ ) az ábra szerint:

$$\delta \bar{x} = \bar{x}(p_0 + \delta p_n) - \bar{x}(p_0) = \overline{DB} = \overline{AB}. \quad (4)$$

Tételezzük fel, hogy a fixpont eltolódása egyenesen arányos a paraméterperturbációval:

3. ábra. Az SPF-módszer szerinti káoszszabályozás geometriai értelmezése



$$\delta \bar{x} = K \delta p_n, \quad (5)$$

ahol  $K$  az arányossági tényező. A (4) és (5) egyenletek alapján:

$$\overline{AB} = K \delta p_n. \quad (6)$$

Feltételeztük, hogy a leképezések párhuzamosak. Meredekségük ( $\mu$ ) a 3. ábra szerint

$$\mu = -\frac{\overline{DB}}{\overline{BC}} = -\frac{K \delta p_n}{BC},$$

melyből a  $\overline{BC}$  szakasz hossza:

$$\overline{BC} = -\frac{K \delta p_n}{\mu}. \quad (8)$$

A (3), (6) és (8) egyenletek alapján:

$$\begin{aligned} \delta x_n &= K \delta p_n - \frac{K \delta p_n}{\mu} \\ &= \left[ \frac{(\mu - 1)K}{\mu} \right] \delta p_n = g \delta p_n, \end{aligned} \quad (9)$$

ahol  $g = (\mu - 1)K/\mu$ . A (9) egyenletből egyszerű átrendezéssel megkapjuk az SPF-módszer szerinti szabályozási formulát:

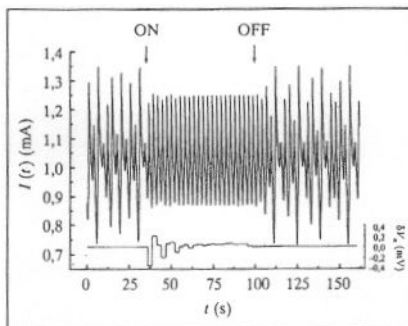
$$\delta p_n = \frac{\delta x_n}{g} = \frac{x_n - \bar{x}(p_0)}{g}. \quad (10)$$

A (10) egyenlet szerint tehát a káosz szabályozásához szükséges *viszacsatolás* (a perturbáció nagysága) *egyenesen arányos* az  $n$ -edik metszéspont fixponttól vett távolságával az egydimenziós leképezésen. Innen származik a módszer elnevezése. A  $g$  szabályozási állandó értékét a (9) egyenlet szerint számítjuk ki  $\mu$  és  $K$  értékének kísérleti meghatározása után.

Mivel az adatgyűjtés pontossága a kísérleti technika által mindig korlátozott, a

Az SPF-algoritmus szerinti káoszszabályozás lépései (csak egydimenziós leképezéssel leírható kaotikus rendszerek esetén alkalmazható):

1. a kaotikus attraktor rekonstrukciója;
2. az egydimenziós leképezés elkészítése;
3. a  $g$  szabályozandó fixpont meghatározása;
4. a leképezés elkészítése a szabályozó paraméter kicsit eltérő értékénél;
5. a leképezésnek  $\mu$  meredekségének meghatározása;
6. a fixpont eltolódásának meghatározása és a  $K$  állandó kiszámítása;
7. a  $g$  szabályozási állandó kiszámítása  $\mu$  és  $K$  ismeretében;
8. az  $n$ -edik metszéspont ( $x_n$ ) meghatározása;
9. a perturbáció nagyságának kiszámítása; s végül
10. a perturbáció alkalmazása.



4. ábra. Kaotikus áramoszcilláció szabályozása a réz-ortofoszforsav elektrokémiai rendszerben [3]

rendszer kaotikus jellegéből – a kezdeti feltételekre való érzékenységből – az következik, hogy a perturbáció hatására a rendszer – nagy valószínűséggel – nem pontosan a kívánt fixpontba, hanem csak annak közelébe kerül. Ha újabb perturbációt nem alkalmazunk, a pályavonalak előbb-utóbb eltávolodnak az instabil fixpont környezetéből, és a rendszer továbbra is kaotikusan fog viselkedni. A káosz sikeres szabályozásához tehát az szükséges, hogy a 8., 9. és 10. lépéseket ciklikusan végrehajtsuk. Az ismételt perturbációk hatására a pályavonalak egyre közelebb kerülnek a fixponthoz, s így a perturbációk is egyre kisebbek lesznek. Ha a rendszer végül pontosan a fixpontba kerül, akkor további perturbációra már nincs szükség – a paraméter értéke *azonos* az eredetivel, ám most az aperiodikus viselkedés helyett előre jelezhető periodikus oszcillációt figyelhetünk meg. **A káoszt megszelídítettük!**

A 4. ábrán rézelektrod ortofoszforsavban lejátszódó anódos oldódása során mért kaotikus áramoszcilláció szabályozását követhetjük nyomon. Az SPF-algoritmus szerint először meghatároztuk a (10) egyenletben szereplő állandók értékeit, majd elkezdtük alkalmazni a szakaszos paraméterperturbációt (ON). Az áram-Idő görbe igazolja, hogy sikerrel stabilizáltuk a P\_1 típusú oszcillációt. Az alsó görbén látható, hogy a káoszszabályozás során alkalmazott  $\delta V_n$  (mV) potenciálperturbáció egyre csökkenő mértékű volt, vagyis az egydimenziós leképezésen egyre közelebb kerültünk a P\_1 oszcillációnak megfelelő instabil fixponthoz. A várakozásnak megfelelően az algoritmus kikapcsolása után (OFF) az áram ismét kaotikusan oszcillált, azaz a káoszt nem megszüntettük, hanem valóban szabályoztuk [3].

A szakaszos módszerek előnye az, hogy a fixpont körüli dinamika ismeretében pontos képletet tudunk adni a perturbáció nagyságának kiszámítására. Kiss István Zalánal olyan módszert fejlesztettünk ki, amely akkor is sikeresen alkalmazható, ha a (10) egyenletnek megfelelő képletet nem

tudjuk kísérletileg meghatározni [4]. Műszerünkben ún. mesterséges neuronhálózatokat „tanítottunk” meg kaotikus rendszerek dinamikájának elemzésére, s ezt a „tudást” hasznosítjuk a káoszszabályozás automatizálására.

Az SPF-algoritmus csak azokban a szerencsés esetekben alkalmazható sikeresen, amikor a kaotikus dinamika jól jellemezhető egydimenziós leképezéssel, és az attraktor alakváltozása is könnyen megjósolható. A bonyolultabb rendszerekre kínál megoldást az OGY-elmélet [9], s pontosan ez tette a módszert széles körben ismertté.

### A káoszszabályozás folytonos módszerei

Ha az instabil fixpont ún. Ljapunov-kitevője (a ponttól való eltávolodás sebességét jellemző mértékszám) olyan nagy ( $|\lambda| \gg 1$ ), hogy két egymást követő metszés koordinátáira nem tudunk megbízható jóslást tenni, akkor a szakaszos módszerek már nehezen használhatók. Erre az esetre Hübinger és munkatársai dolgoztak ki egy eljárást, amelyben nem egy, hanem több Poincaré-síkot alkalmaznak, s így egy ciklus alatt több perturbációval stabilizálják a rendszert [16]. Végtelen számú síkot feltételezve eljutunk a *folytonos* módszerekhez. Ezek teljes elméletét még nem dolgozták ki.

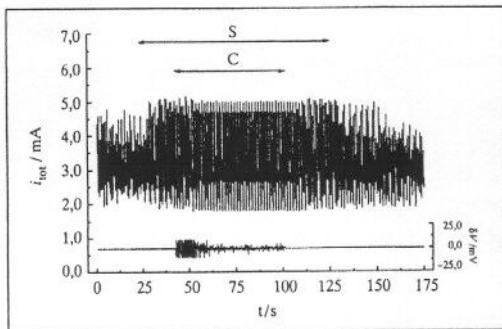
Az ún. *folytonosan késleltetett visszacsatolás* alkalmazásakor a folytonosan változó perturbáció nagyságát,  $\delta p(t)$ , a következő képlettel számítjuk ki:

$$\delta p(t) = C[x(t) - x(t - \tau)], \quad (11)$$

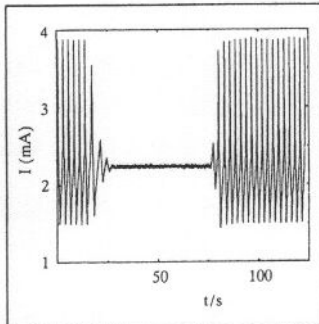
ahol  $x(t)$  a rendszer egy mért dinamikai változójának  $t$  időpontbeli értéke,  $\tau$  az ún. késleltetési idő,  $C$  pedig a szabályozási állandó. Könnyen belátható, hogy ez az eljárás, amelyet a szakirodalomban Pyragas-módszernek neveznek [17], a kísérletező szempontjából sokkal egyszerűbb. A módszer további előnye, hogy a perturbációk folytonos alkalmazása miatt a kísérleti zaj okozta hiba kisebb. Hátránya viszont az, hogy nem tudjuk előre megtervezni, melyik periodikus pályát is fogjuk szabályozni. Ráadásul a szabályozási állandót és a késleltetési időt is – általában – próbálgatással kell megállapítani.

A Pyragas-módszert alkalmazva tudtuk például csatolt kaotikus elektrokémiai oszcillátorok szinkronizált, kollektív kaotikus viselkedését szabályozni [5].

Négy nikkelelektrodból készített elektrodrendszer kénsvanban lejátszódó anódos oldódását úgy vizsgáltuk, hogy egyidejűleg mértük az elektrodok egyedi és az elektrodrendszer teljes áramát. Megállapítottuk, hogy a teljes áram ( $i_{tot}$ ) kaotikus oszcillációja esetén az elektrodok egyedi ára-



5. ábra. A teljes áram  $i_{tot}$  (mA) oszcillációja négy csatolt nikkelelektrod kénsvan lejátszódo anódos oldódása során: S szakasz – fázisszinkronizáció; C szakasz – a szinkronizált kaotikus viselkedés szabályozása (P<sub>2</sub> oszcilláció stabilizálása) Pyragas-módszerrel [5]



6. ábra. A Pyragas-módszer alkalmazása a forgó rézkorong-elektrod-nátrium-acetát/ecetsav elektro-kémiai rendszer instabil egyensúlyi pontjának stabilizálására [6]

mai ( $i_k$ ) szintén kaotikusan oszcillálnak, de eltérő fázisban. Az elektrodrendszer kaotikus oszcillációját kétlépéses algoritmussal szabályoztuk. Először az elektrodok kaotikus áramoszcillációját szinkronizáltuk<sup>4</sup> úgy, hogy a velük sorba kapcsolt egyedi ellenállások értékeit ( $r_k$ ) folytonosan változtattuk a következő összefüggés szerint:

$$\delta r_k(t) = \kappa \left( i_k(t) - \frac{i_{tot}(t)}{4} \right), \quad (12)$$

ahol  $\kappa$  próbálgatással meghatározott csatolási állandó. Az 5. ábrán jól megfigyelhető a fázisszinkronizáció (S szakasz) hatása: a teljes áram  $i_{tot}$  amplitúdója számottevően megnövekedett. A szinkronizáltan, de még mindig kaotikusan oszcilláló elektrodrendszer a Pyragas-módszerrel szabályoztuk (C szakasz); a bemutatott esetben például P<sub>2</sub> típusú oszcillációt stabilizáltunk. A szabályozás és a szinkronizáció megszüntetése után az elektrodok egymástól függetlenül, kaotikusan oszcilláltak [5]. Ezek a kísérletek igazolták, hogy csatolt kaotikus rendszerek is szabályozhatók, ha valamilyen módon szinkronizálni tudjuk az alrendszerek kaotikus viselkedését.

A forgó rézkorong-elektrod-nátrium-acetát/ecetsav elektro-kémiai rendszerrel végzett kísérleteinkkel azt is igazoltuk, hogy a Pyragas-módszerrel nemcsak instabil periodikus pálya, hanem instabil egyensúlyi pont is stabilizálható (6. ábra). A látszólagos elektrodpotenciált a (11) egyenlet szerint folytonosan perturbálva az oszcilláló áram helyett konstans áramot tudunk előállítani. Az egyenletben szereplő állandókat próbálgatással határoztuk meg [6].

Egy újabb javasolt folytonos káosz-szabályozási módszer az ún. rezonancia-kontroll alkalmazásáról számoltunk be [7] közleményünkben. A módszer elnevezése

abból adódik, hogy ebben az esetben a paraméterperturbáció nagyságát a következő képlettel számítjuk:

$$\delta p(t) = \gamma \sin(2\pi\nu t), \quad (13)$$

ahol  $\gamma$  a perturbáció amplitúdóját,  $\nu$  pedig a frekvenciáját jelöli, melynek értékét az  $x(t)$  jelsorozat Fourier-spektrumából lehet meghatározni.

### Káosz és rend

Mindennapi életünk tele van kaotikus jelenségekkel. A repülőgép szárnyának rezgése hirtelen kaotikussá válik, s a végeredmény elkerülhetetlen tragédia. A rakétát toló lángsugár egyik pillanatról a másikra remegni kezd, a masina irányíthatatlanná válik, a fedélzetten elhelyezett műhold pedig nem kerül Föld körüli pályájára. A vért periodikusan pumpáló szív megbetegszik, a szívverés szabálytalanná válik, és ha nincs segítség a közelben, a legrosszabb is bekövetkezhet. A káosz sokszor nemkívánatos, rossz. Megelőzhető ugyan, de ha minden óvintézkedésünk ellenére kialakul, sokáig úgy tűnt, kiszolgáltatottjai vagyunk az előre nem jelezhető folyamatoknak. A káoszszabályozási módszerek sikeres kísérleti alkalmazása biztató jele annak, hogy talán mégsem teljesen reménytelen a helyzet: a káosz megszelídíthető!

A káosz sikeres szabályozása még egy nagyon fontos lehetőséget nyújthat számunkra. Ahogyan az egyszerű oszcillációhoz rendelhető stabil határciklus belsejében megtalálható az instabillá vált egyensúlyi pont, úgy a kaotikus attraktor belsejében is megtalálható a káoszhoz vezető bifurkációk során instabillá vált valamennyi periodikus pálya. A káoszszabályozáskor tehát lehetőségeink száma szinte végtelen; egy kiválasztott dinamikai állapot stabilizálása után a szabályozó paraméter kicsiny megváltoztatásával könnyen átkapcsolhatjuk a rendszert egy másik dinamikai álla-

potba stb., tetszés szerint. A bonyolultnak tűnő feladat megoldása egyszerű: ha eldöntöttük, hogy pontosan melyik dinamikai állapotot szeretnénk előhívni a kaotikus attraktorból, a rendszert – kicsiny perturbációk alkalmazásával – a kívánt állapotnak megfelelő instabil fixpont kicsiny közeledésébe tereljük, majd pedig ott tartjuk. (Hmm, lehet, hogy agyunk is így működik, s nem is olyan nagy baj, ha a fejünkben káosz uralkodik?!) Csak azt kell tudni, hogy mit mikor és miért csinálunk, s akkor a káosz előbb-utóbb oszlanı kezd. Mert örökös a vágy és a feladat:

„Sarolt:

*István fiám, nincs más választás,*

*Rendet kell tenni, rendnek kell lenni végre.*

*Rendet kell tenni, rendnek kell lenni nálunk.*”

Szörényi Levente – Bródy János:

István, a király (rockopera)

Az írás az OTKA T038071 sz. pályázat támogatásával készült.

### IRODALOM

- [1] Dyson, F.: Infinite in All Directions; Harper: N. Y., 1988
- [2] Petrov, V.; Gáspár, V.; Masere, J.; Showalter, K.: Controlling Chaos in the Belousov-Zhabotinsky Reaction, Nature, 361. kötet, 240-243. o. (1993)
- [3] Kiss, I. Z.; Gáspár, V.; Nyikos, L.; Parmananda, P.: Controlling Electrochemical Chaos in the Copper-Phosphoric Acid System, J. Phys. Chem. A, 101. kötet, 8668-8674. o. (1997)
- [4] Kiss, I. Z.; Gáspár, V.: Controlling Chaos with Artificial Neural Network: Numerical Studies and Experiments, J. Phys. Chem. A, 104. kötet, 8033-8037. o. (2000)
- [5] Kiss, I. Z.; Gáspár, V.; Hudson, J. L.: Experiments on Synchronization and Control of Chaos on Coupled Electrochemical Oscillators, J. Phys. Chem. B, 104. kötet, 7554-7560. o. (2000)
- [6] Parmananda, P.; Madrigal, R.; Rivera, M.; Nyikos, L.; Kiss, I. Z.; Gáspár, V.: Stabilization of Unstable Steady States and Periodic Orbits in an Electrochemical System using Delayed-feedback Control, Phys. Rev. E, 59. kötet, 5266-5271. o. (1999)
- [7] Parmananda, P.; Madrigal, R.; Rivera, M.; Kiss, I. Z.; Gáspár, V.: Resonant Control of Electrochemical Oscillations, J. Phys. Chem. B, 104. kötet, 11748-11751. o. (2000)
- [8] Hübler, A.; Lüscher, E.: Resonant Stimulation and Control of Nonlinear Oscillators, Naturwissenschaften, 76. kötet, 67-69. o. (1989)
- [9] Ott, E.; Grebogi, C.; Yorke, J.: Controlling Chaos, Phys. Rev. Lett. 64. kötet, 1196-1199. o. (1990)
- [10] Boccaletti, S.; Grebogi, C.; Lai, Y.-C.; Mancini, H.; Maza, D.: The Control Of Chaos: Theory And Applications, Phys. Rep. 329. kötet, 103-197. o. (2000)
- [11] Peng, B.; Petrov, V.; Showalter, K.: Controlling Chemical Chaos, J. Phys. Chem. US, 95. kötet, 4957-4959 o. (1991)
- [12] Tél T.; Gnaiz M.: Mi a káosz? (és mi nem az?), Természet Világa, 133. évf., 7. szám, 2002. július
- [13] Krámlı A.: A káosz matematikusszemmel, Természet Világa, 135. évf., 7. szám, 2004. július
- [14] Takens, F.: Detecting strange attractors in turbulence. In Dynamical systems and turbulence; Szerk.: Rand, D. A.; Young, L.-S., Lecture notes in mathematics, 989. kötet, 366. o.; Springer: Heidelberg (1981)
- [15] Gáspár V.: Játszunk káoszt! Természet Világa, 133. évfolyam, 7. szám, 2002. július
- [16] Hübingler, B.; Doerner, R.; Martensen, W.; Herdering, M.; Pitka, R.; Dessler, U.: Controlling Chaos Experimentally in Systems Exhibiting Large Effective Lyapunov Exponents, Phys. Rev. E., 50. kötet, 932-948. o. (1994)
- [17] Pyragas, K.; Tamasevicius, A.: Experimental Control of Chaos by Delayed-Self-Controlling Feedback, Phys. Lett. A., 180. kötet, 99-102. o. (1993)

<sup>4</sup> A szinkronizáció hatását mutató, kísérleti adatokból készített animáció megtekinthető a következő címen: <http://delfin.unideb.hu/~gasparv/doktori/4sync.avi> (~2,4 MB).